MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DAVID HILBERT

IN GÖTTINGEN

UNTER MITWIRKUNG VON

OTTO BLUMENTHAL
IN AACHEN

ERICH HECKE
IN HAMBURG

BARTEL L. VAN DER WAERDEN
IN LEIPZIG

111. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1935

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN
VON

DAVID HILBERT
IN GÖTTINGEN

UNTER MITWIRKUNG VON

OTTO BLUMENTHAL
IN AACHEN

ERICH HECKE
IN HAMBURG

BARTEL L. VAN DER WAERDEN
IN LEIPZIG

111. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1935

Inhalt des einhundertundelften Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Algebraischer Beweis der vollständigen Reduzibilität der Darstellungen halbeinfacher Liescher Gruppen.

Von

H. Casimir in Leiden und B. L. van der Waerden in Leipzig.

H. Weyl[1]) hat zuerst einwandfrei bewiesen, daß jede analytische Darstellung einer halbeinfachen Lieschen Gruppe durch lineare Transformationen vollständig in irreduzible Bestandteile zerfällt. Nach J. v. Neumann[2]) ist jede stetige Darstellung analytisch; die Behauptung gilt also für alle stetigen Darstellungen[3]). Sie ist äquivalent dem folgenden rein algebraischen Satz: Jedes System von Matrices $M_1, \ldots, M_n$, das den Bedingungen

$$[M_i M_k] = M_i M_k - M_k M_i = \Sigma c_{ik}^l M_l \tag{1}$$

genügt, wo die c_{ik}^l die Zusammensetzungskonstanten einer halbeinfachen Lieschen Gruppe $\mathfrak{G}$ sind, ist vollständig reduzibel. Ein solches System von Matrices wollen wir im folgenden eine *infinitesimale lineare Darstellung* von $\mathfrak{G}$ nennen.

Es ist natürlich erwünscht, den erwähnten algebraischen Satz auch algebraisch zu beweisen. Der Weylsche Beweis benutzt folgenden transzendenten Umweg: Man betrachtet statt der gegebenen n-gliedrigen Gruppe eine andere, deren Zusammensetzungskonstanten ebenfalls reell sind, aber durch eine komplexe lineare Basistransformation aus den gegebenen c_{ik}^l hervorgehen. Diese neue Gruppe ist nun kompakt, und die volle Reduzibilität ihrer Darstellungen folgt in bekannter Weise mittels der Hurwitzschen Integrationsmethode. Aus dieser vollen Reduzibilität folgt dann der obige algebraische Satz, der seinerseits wieder die volle Reduzibilität der Darstellungen der gegebenen Gruppe nach sich zieht.

Im Oktober 1932 gelang es dem ersten Verfasser, für den Fall der dreidimensionalen Drehungsgruppe, also für den Fall

$$[M_1 M_2] = M_3, \quad [M_2 M_3] = M_1, \quad [M_3 M_1] = M_2, \tag{2}$$

[1]) H. Weyl, Math. Zeitschr. **24** (1925), S. 328—395.

[2]) J. v. Neumann, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 3—42. Vgl. dazu B. L. van der Waerden, Math. Zeitschr. **36** (1933), S. 781, Fußnote [2]).

[3]) Es genügt sogar, daß die darstellenden Matrices in der Umgebung der Gruppeneins beschränkt sind. Vgl. B. L. van der Waerden, Math. Zeitschr. **36**, S. 785.

einen rein algebraischen Beweis der vollen Reduzibilität einer jeden infinitesimalen linearen Darstellung zu geben. Der zweite Verfasser konnte dann diesen Beweis auf den allgemeinen Fall ausdehnen. Da der allgemeine Beweis recht komplizierte Rechnungen erfordert, die einfachen begrifflichen Gedanken aber schon im Spezialfall klar hervortreten, werden wir auch in dieser Publikation den dreigliedrigen Spezialfall vorausschicken.

Wir verwenden die von Weyl ebenfalls benutzte Sprache der Vektorräume und setzen für den allgemeinen Beweis die Ergebnisse der Cartanschen Struktur- und Darstellungstheorie der halbeinfachen Gruppen als bekannt voraus. Wir werden diese Ergebnisse, soweit wir sie brauchen, in § 3 kurz zusammenfassen.

§ 1.

Allgemeine Hilfsbetrachtungen.

Unser Ziel ist der Beweis des folgenden Hauptsatzes:

Wenn eine infinitesimale lineare Darstellung einer halbeinfachen Gruppe $\mathfrak{G}$ genau zwei irreduzible Bestandteile enthält, d. h. wenn der Darstellungsraum $\mathfrak{R}$ einen irreduziblen Teilraum $\mathfrak{r}$ mit irreduziblem Restklassenraum $\mathfrak{R}/\mathfrak{r}$ enthält, so zerfällt $\mathfrak{R}$ in zwei irreduzible Teilräume: $\mathfrak{R} = \mathfrak{r} + \mathfrak{r}'$.

Aus dem Hauptsatz folgt nachher leicht, daß *jede* reduzible infinitesimale lineare Darstellung vollständig zerfällt. Es sei nämlich $\mathfrak{R}$ der Vektorraum einer solchen Darstellung und $\mathfrak{r}$ ein irreduzibler invarianter Teilraum von $\mathfrak{R}$. Wir können annehmen, daß für alle Darstellungen kleineren Grades die volle Reduzibilität schon bewiesen ist. Insbesondere ist $\mathfrak{R}$ modulo $\mathfrak{r}$ vollständig reduzibel:

$$\mathfrak{R}/\mathfrak{r} = \bar{\mathfrak{r}}_1 + \bar{\mathfrak{r}}_2 + \ldots \bar{\mathfrak{r}}_m.$$

Die Vektoren von $\mathfrak{R}$, die modulo $\mathfrak{r}$ zu $\bar{\mathfrak{r}}_1$ gehören, bilden einen Teilraum $\mathfrak{R}_1$, wobei $\mathfrak{R}_1/\mathfrak{r} = \bar{\mathfrak{r}}_1$ ist. $\mathfrak{R}_1$ enthält somit genau zwei irreduzible Bestandteile $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}_1$. Nach dem als richtig angenommenen Hauptsatz ist $\mathfrak{R}_1$ direkte Summe: $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{r} + \mathfrak{r}_1$. Ebenso ist $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{r} + \mathfrak{r}_2, \ldots,$ $\mathfrak{R}_m = \mathfrak{r} + \mathfrak{r}_m$ und schließlich $\mathfrak{R} = \mathfrak{r} + \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots \mathfrak{r}_m$.

Wir brauchen im folgenden noch einen Hilfssatz:

Wenn eine Matrix der Gestalt

$$G = \begin{pmatrix} \lambda I & K \\ 0 & \lambda' I \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda \neq \lambda'$$

(I = Einheitsmatrix) mit allen Matrices M einer Darstellung vertauschbar ist, so zerfällt diese Darstellung.

Beweis. Transformiert man G mit

$$P = \begin{pmatrix} I & (\lambda - \lambda')^{-1} K \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

so geht G in

$$P G P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda I & 0 \\ 0 & \lambda' I \end{pmatrix}$$

über. Das System aller Matrices $P M P^{-1}$, die mit dieser Matrix $P G P^{-1}$ vertauschbar sind, zerfällt wegen $\lambda \neq \lambda'$ in zwei Bestandteile entsprechend den Kästchen λI und $\lambda' I$.

Wir erinnern schließlich an die Bedeutung der charakteristischen Wurzeln einer Matrix H, d. h. der Wurzeln der charakteristischen Gleichung $|\lambda I - H| = 0$. Ist λ eine k-fache Wurzel dieser Gleichung, so gibt es erstens einen Eigenvektor v_1 zum Eigenwert λ:

$$H v_1 = \lambda v_1.$$

Sodann gibt es modulo v_1 einen Eigenvektor v_2, für den gilt

$$H v_2 \equiv \lambda v_2 \pmod{v_1},$$

d. h.

$$H v_2 = \lambda v_2 + \mu v_1.$$

So geht es weiter bis v_k:

$$H v_k = \lambda v_k + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_{k-1} v_{k-1}.$$

Wenn man dieselben Überlegungen für alle charakteristischen Wurzeln anstellt und die so gewonnenen Vektoren $v_1, \ldots, v_k, \ldots$ als Basisvektoren für den Vektorraum $\mathfrak{R}$ benutzt, so erhält man für die Matrix H eine „dreieckige" Normalform, in deren Hauptdiagonale die charakteristischen Wurzeln je so oft vorkommen als ihre Vielfachheit angibt, während unterhalb der Hauptdiagonale lauter Nullen stehen. Die Normalform zerfällt in Kästchen, die den einzelnen charakteristischen Wurzeln entsprechen.

§ 2.

Der Fall der dreigliedrigen Gruppe.

Statt der Matrices (2), welche die Drehungsgruppe $\mathfrak{d}$ darstellen, führen wir die Linearkombinationen

$$\begin{aligned} H &= i M_3, \\ E_1 &= i(M_1 + i M_2), \\ E_{-1} &= i(M_1 - i M_2) \end{aligned}$$

ein, deren Vertauschungsrelationen lauten

$$(3)\qquad \begin{cases} [H E_1] = E_1, \\ [H E_{-1}] = -E_{-1}, \\ [E_1 E_{-1}] = 2H. \end{cases}$$

Die Matrix

$$G = -(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) = \tfrac{1}{2}(E_1 E_{-1} + E_{-1} E_1) + H^2$$

ist mit allen Matrices M_1, M_2, M_3 oder H, E_1, E_{-1} vertauschbar. Für eine irreduzible Darstellung ist daher $G = \lambda I$. Die irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{D}_j$ von $\mathfrak{d}$ sind vollständig bekannt[4]): Sie sind durch eine halb- oder ganzzahlige „Quantenzahl" $j \geqq 0$ charakterisiert; ihr Grad ist $2j + 1$; der Eigenwert λ von G ist $= j(j+1)$, und die Basisvektoren v_m $(m = j, j-1, \ldots, -j)$ werden so transformiert:

$$(4)\qquad \begin{cases} E_{-1} v_m = v_{m-1}, \\ E_1 v_m = (j - m)(j + m + 1) v_{m+1}, \\ H v_m = m v_m. \end{cases}$$

Ist nun eine reduzible Darstellung gegeben, die genau zwei irreduzible $\mathfrak{D}_j$ und $\mathfrak{D}_{j'}$ als Bestandteile enthält:

$$M_k = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ 0 & C_k \end{pmatrix},$$

so können zwei Fälle eintreten:

A. $j \neq j'$. Dann ist auch $j(j+1) \neq j'(j'+1)$. Die Matrix G sieht so aus:

$$G = \begin{pmatrix} j(j+1) I & K \\ 0 & j'(j'+1) I \end{pmatrix}.$$

Sie ist mit allen Matrices der Darstellung vertauschbar. Nach dem Hilfssatz in § 1 zerfällt also die Darstellung.

B. $j = j'$. Dann sind die Darstellungen $\mathfrak{D}_j$ und $\mathfrak{D}_{j'}$ äquivalent. Der Raum $\mathfrak{R}$ enthält einen Teilraum $\mathfrak{r}$, dessen Basisvektoren $v_j, v_{j-1}, \ldots, v_{-j}$ sich nach (4) transformieren; außerhalb von $\mathfrak{r}$ gibt es dann noch Vektoren $v_j', v_{j-1}', \ldots, v_{-j}'$, die sich modulo $\mathfrak{r}$ nach (4) transformieren. Bezieht man die Transformation H auf die Basisvektoren $v_j, \ldots, v_{-j}$ und $v_j', \ldots, v_{-j}'$, so erhält man eine „dreieckige" Matrix, in deren Diagonale die charakteristischen Wurzeln $j, j-1, \ldots, -j$ je zweimal vorkommen. Wir können v_j' nach § 1 so wählen, daß v_j' modulo v_j zum Eigenwert j gehört, d. h. daß

$$H v_j' = j v_j' + \mu v_j$$

[4]) Vgl. etwa B. L. van der Waerden, Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Berlin 1932, § 17.

ist. Die weiteren $v'_{j-1}, \ldots, v'_{-j}$ können durch

(5) $$E_{-1} v'_m = v'_{m-1}$$

definiert werden. Man findet dann auf Grund der Vertauschungsregeln (3):

$$H v'_{j-1} = H E_{-1} v'_j = E_{-1} H v'_j - E_{-1} v'_j = E_{-1}(j v'_j + \mu v_j - v'_j)$$
$$= (j-1) E_{-1} v'_j + \mu E_{-1} v_j = (j-1) v'_{j-1} + \mu v_{j-1},$$
$$E_1 v'_j = 0, \text{ da } E_1 v'_j \text{ zum Eigenwert } j+1 \text{ von } H \text{ gehört,}$$
$$E_1 v'_{j-1} = E_1 E_{-1} v'_j = E_{-1} E_1 v'_j + 2 H v'_j = 0 + 2(j v'_j + \mu v_j)$$
$$= 2 j v'_j + 2 \mu v_j$$

und ebenso weiter für $m = j - i$ durch vollständige Induktion nach i:

(6) $$H v'_m = m v'_m + \mu v'_m,$$

(7) $$E_1 v'_m = (j-m)(j+m+1) v'_{m+1} + 2\mu (j-m) v_{m+1}.$$

Für $m = -j-1$ wird $v'_m = 0$, da v'_{-j-1} zum Eigenwert $-j-1$ von H gehört und da dieser Eigenwert unter den charakteristischen Wurzeln von H nicht vorkommt. Aus (7) folgt also für $m = -j-1$:

$$2\mu(j+j+1) = 0,$$

also

$$\mu = 0.$$

Die Formeln (5), (6), (7) vereinfachen sich daher zu

(8) $$\begin{cases} E_{-1} v'_m = v'_{m-1}, \\ E_1 v'_m = (j-m)(j+m+1) v'_{m+1}, \\ H v'_m = m v'_m. \end{cases}$$

Diese Formeln besagen, daß die Vektoren $v'_j, v'_{j-1}, \ldots, v_{-j}$ einen Raum $\mathfrak{r}'$ aufspannen, der bei der Drehungsgruppe invariant ist und ebenso wie $\mathfrak{r}$ nach der Darstellung $\mathfrak{D}_j$ transformiert wird. Der Raum $\mathfrak{R}$ zerfällt nunmehr in $\mathfrak{r} + \mathfrak{r}'$ und wir sind fertig.

§ 3.

Struktur der halbeinfachen Lieschen Gruppen. Die Matrix G. Die Gewichte der Darstellungen.

Nach Cartan[5]) hat eine halbeinfache Gruppe $\mathfrak{G}$ die infinitesimalen Transformationen $H_1, \ldots, H_n, E_\alpha, E_\beta, \ldots$. Dabei sind die Transformationen $H = \lambda^1 H_1 + \ldots + \lambda^n H_n$ alle untereinander vertauschbar. Die zu $E_\alpha, E_\beta, \ldots$ gehörigen „Wurzeln" $\alpha, \beta, \ldots$ sind gewisse Linearformen in $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$. Mit jeder Wurzel α kommt auch $-\alpha$ unter den

---

[5]) É. Cartan, Sur la structure des groupes de transformations finis et continus, Thèse de Doctorat, Paris 1894, 2. Aufl, Paris 1933. Vgl. auch die Darstellung von Weyl, Math. Zeitschr. 23 (1925), S. 271—309 und 24, S. 328—395.

Wurzeln vor. Die definierenden Vertauschungsrelationen der Gruppe lauten

$$(9) \quad \begin{cases} [H_i H_k] = 0, \\ [H E_\alpha] = \alpha E_\alpha, \\ [E_\alpha E_{-\alpha}] = H_\alpha, \\ [E_\alpha E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} \quad \text{oder} \quad 0. \end{cases}$$

Dabei sind die $N_{\alpha\beta}$ Zahlen und die H_α gewisse Linearkombinationen von $H_1, \ldots, H_n$, unter denen n linear-unabhängige vorkommen. Der Wert irgendeiner Linearform $\beta = \beta(H)$ für $H = H_\alpha$ wird mit β_α bezeichnet. Insbesondere ist $\alpha_\alpha \neq 0$.

Eine infinitesimale lineare Darstellung der Gruppe ist gegeben durch Matrices H_i, E_α, welche die Relationen (9) befriedigen.

Ist

$$\sum_\mu \xi^\mu M_\mu = \sum_i \lambda^i H_i + \sum_\alpha \sigma^\alpha E_\alpha$$

die allgemeinste Linearkombination der infinitesimalen Transformationen M_μ der Gruppe, so gibt es nach Cartan eine nichtsinguläre quadratische Form

$$(10) \quad \sum \sum g_{\lambda\mu} \xi^\lambda \xi^\mu = \sum \sum q_{ik} \lambda^i \lambda^k + \sum_\alpha N_\alpha \sigma^\alpha \sigma^{-\alpha}$$

mit

$$g_{\lambda\mu} = \sum_\varrho \sum_\sigma c^\sigma_{\lambda\varrho} c^\varrho_{\mu\sigma}; \quad \sum \sum q_{ik} \lambda^i \lambda^k = \sum_\alpha \alpha^2.$$

Die mit Hilfe der zu $g_{\lambda\mu}$ komplementären (kontragradienten) Größe $g^{\lambda\mu}$ gebildete Matrix

$$(11) \quad G = \sum \sum g^{\lambda\mu} M_\lambda M_\mu = \sum \sum q^{ik} H_i H_k + \sum_\alpha N_\alpha^{-1} E_\alpha E_{-\alpha}$$

ist nach Casimir[6]) mit allen Matrices M_λ (oder H_i, E_α) vertauschbar.

Die Gewichte. Die charakteristischen Wurzeln der Matrix $H = \sum \lambda^i H_i$ sind nach Cartan Linearformen in $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$; sie heißen die *Gewichte* der vorgelegten Darstellung. Zu jedem Gewicht Λ gehört mindestens ein Eigenvektor v mit

$$H v = \Lambda v \quad \text{oder} \quad (H - \Lambda) v = 0;$$

es kann eventuell auch noch Vektoren v geben, für die nur

$$(12) \quad (H - \Lambda)^l v = 0$$

gilt. Alle diese Vektoren bilden zusammen den zum Gewicht Λ gehörigen Teilraum $\mathfrak{r}_\Lambda$ des Darstellungsraums. Die Gewichte werden lexikographisch angeordnet: man schreibt $\Lambda > \Gamma$, wenn die Differenz $\Lambda - \Gamma$, als Linearform in $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ geschrieben, mit einem positiven Koeffizienten anfängt. Ist v ein Eigenvektor vom Gewicht Λ, so ist $E_\alpha v$ ein Eigenvektor vom Gewicht $\Lambda + \alpha$. Darauf beruht die Einteilung der Gewichte in Serien in bezug auf eine beliebig ausgewählte Wurzel α. Man geht, wenn α etwa

---

[6]) H. Casimir, Proc. Kon. Acad. Amsterdam 34 (1931), S. 144.

eine negative Wurzel ist ($\alpha < 0$ im Sinne der lexikographischen Anordnung), von einem Eigenvektor e_0 höchsten Gewichtes aus und bildet die Reihe

$$(13)\qquad \begin{cases} e_0, \\ e_1 = E_\alpha e_0, \\ e_2 = E_\alpha e_1, \\ \cdots\cdots\cdots, \\ e_l = E_\alpha e_{l-1}, \\ 0 = E_\alpha e_l. \end{cases}$$

Dann sind $e_0, e_1, \ldots, e_l$ Eigenvektoren von H mit Gewichten $\Lambda, \Lambda + \alpha, \ldots, \Lambda + l\alpha$. Die Länge der Serie ist aus

$$(14)\qquad l = -2\frac{\Lambda_\alpha}{\alpha_\alpha}$$

zu entnehmen; weiter ist

$$(15)\qquad E_{-\alpha}\, e_{i+1} = E_{-\alpha} E_\alpha e_i = \frac{(i+1)(l-i)}{2}\,\alpha_\alpha e_i.$$

Modulo $(e_0, \ldots, e_l)$ gibt es wieder einen Eigenvektor e'_0 höchsten Gewichtes Λ' und eine Serie $e'_0, \ldots, e'_{l'}$ (mit Gewichten $\Lambda', \Lambda' + \alpha, \ldots, \Lambda' + l'\alpha$) von der Länge $l' = -2\frac{\Lambda'_\alpha}{\alpha_\alpha}$ mit der Eigenschaft

$$(16)\qquad E_{-\alpha} E_\alpha e'_i = \frac{(i+1)(l'-i)}{2}\,\alpha_\alpha e'_i + (\text{Glieder mit } e_0, \ldots, e_l)$$

usw. Alle Vektoren e_i, e'_i, usw. spannen zusammen den ganzen Raum auf. Übrigens braucht man bei dieser Betrachtung nicht einmal vom höchsten Gewicht auszugehen, sondern es genügt, das Gewicht Λ so zu wählen, daß das $\Lambda - \alpha$ kein Gewicht mehr ist.

Eine irreduzible Darstellung ist bis auf Äquivalenz eindeutig durch ihr höchstes Gewicht Λ bestimmt. Dieses ist einfach, d. h. der zugehörige Raum $\mathfrak{r}_\Lambda$ ist eindimensional und wird von einem einzigen Eigenvektor e_0 erzeugt. Die übrigen Basisvektoren des Darstellungsraumes entstehen aus e_0 durch Ausführung von Operationen $A = E_\alpha E_\beta \ldots E_\delta$. Sie sind offenbar alle Eigenvektoren von H mit Gewichten $\Lambda + \alpha + \beta + \ldots + \delta$.

§ 4.

Drei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. Wenn ein Vektor v eines Darstellungsraumes aus einem anderen w entsteht durch Ausübung einer Operation $\Sigma \varrho_\nu A_\nu$:

$$v = \Sigma \varrho_\nu A_\nu w,$$

wobei jedes A_ν ein Produkt von Faktoren E_α und H_i ist, so kann man die Reihenfolge der Faktoren in diesen Produkten immer so wählen, daß in jedem Produkt von links nach rechts die Faktoren E_α mit negativem α zuerst kommen, dann die E_α mit positivem α und zum Schluß die Faktoren H_i.

Beweis. Auf Grund der Vertauschungsrelationen (9) kann man die Reihenfolge der Faktoren in jedem Glied beliebig ändern unter Hinzufügung von Gliedern, welche einen Faktor H_i oder E_α weniger enthalten. In diesen Zusatzgliedern kann man ebenso die Glieder vertauschen unter Hinzufügung von noch kürzeren Zusatzgliedern. So kann man fortfahren, bis das gestellte Ziel erreicht ist.

Der Hilfssatz wird insbesondere dann angewandt, wenn w ein Eigenvektor der Matrices H_i ist. Die Faktoren H_i können in diesem Fall durch Zahlenfaktoren ersetzt werden. Ist insbesondere w ein Eigenvektor vom höchsten Gewicht Λ, so ist $E_\alpha w = 0$ für $\alpha > 0$, also kommen in diesem Fall nur die E_α mit $\alpha < 0$ wirklich in Betracht.

Hilfssatz 2. $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ seien zwei lineare infinitesimale Darstellungen einer halbeinfachen Gruppe $\mathfrak{G}$. α sei eine Wurzel und Λ auch eine Linearform in $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$. Dann ist es unmöglich, daß Λ ein Gewicht von $\mathfrak{D}_1$ und nicht von $\mathfrak{D}_2$, $\Lambda + \alpha$ dagegen wohl Gewicht von $\mathfrak{D}_2$, aber nicht von $\mathfrak{D}_1$ ist.

Beweis. Wenn Λ ein Gewicht von $\mathfrak{D}_1$ ist, dagegen $\Lambda + \alpha$ kein Gewicht von $\mathfrak{D}_1$, so ist Λ Ausgangspunkt einer Serie von Gewichten $\Lambda, \Lambda - \alpha, \ldots, \Lambda - l_1\alpha$ von der Länge

$$l_1 = 2\,\frac{\Lambda_\alpha}{\alpha_\alpha} \tag{17}$$

(nach Formel (14) mit $-\alpha$ statt α). Ist ebenso $\Lambda + \alpha$ ein Gewicht von $\mathfrak{D}_2$, dagegen Λ nicht, so ist $\Lambda + \alpha$ Ausgangspunkt einer Serie von Gewichten $\Lambda + \alpha, \Lambda + 2\alpha, \ldots, \Lambda + (l_2 + 1)\alpha$ von der Länge

$$l_2 = -2\,\frac{(\Lambda + \alpha)_\alpha}{\alpha_\alpha}. \tag{18}$$

Addition von (17) und (18) ergibt

$$l_1 + l_2 = -2.$$

Das ist aber unmöglich, denn l_1 und l_2 können nicht negativ werden.

Hilfssatz 3. $\mathfrak{D}_\Lambda$ und $\mathfrak{D}_\Gamma$ seien zwei nicht äquivalente irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{G}$, g_Λ und g_Γ die zugehörigen Eigenwerte von G. Wenn nun das höchste Gewicht Λ von $\mathfrak{D}_\Lambda$ zugleich ein Gewicht von $\mathfrak{D}_\Gamma$ ist, so ist $g_\Lambda < g_\Gamma$.

Beweis. Im Raum $\mathfrak{R}_\Gamma$ der Darstellung $\mathfrak{D}_\Gamma$ gibt es einen Teilraum $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_\Lambda$, der zum Gewicht Λ gehört und der sowohl durch alle $H_i H_k$ wie durch alle $E_{-\alpha}E_\alpha$ in sich transformiert wird. Ist nun r die Dimension von $\mathfrak{r}$, so ist der Eigenwert g_Γ von G der r-te Teil der Spur von G über $\mathfrak{r}$[7]):

$$g_\Gamma = \frac{1}{r} Sp_{\mathfrak{r}}(G) = \frac{1}{r}\sum g^{ik}\, Sp_{\mathfrak{r}}(H_i H_k) + \frac{1}{r}\sum \frac{1}{N_\alpha} Sp_{\mathfrak{r}}(E_{-\alpha}E_\alpha). \tag{19}$$

[7]) Die Spur von G über $\mathfrak{r}$ bedeutet die Spur der linearen Transformation, welche von G in $\mathfrak{r}$ induziert wird.

Ebenso gibt es in $\mathfrak{R}_A$ einen Teilraum $\mathfrak{r}'$ zum höchsten Gewicht A, der aber, (weil das höchste Gewicht einfach ist) nur einen Basisvektor v_0 enthält; man hat also

$$g_A = Sp_{\mathfrak{r}'}(G) = \sum q^{ik} Sp_{\mathfrak{r}'}(H_i H_k) + \sum \frac{1}{N_\alpha} Sp_{\mathfrak{r}'}(E_{-\alpha} E_\alpha). \tag{20}$$

Die Spur von $H_i H_k$ über $\mathfrak{r}$ ist $r A_i A_k$, wo $A_i = A(H_i)$, weil der ganze Raum $\mathfrak{r}$ zum Eigenwert $A_i A_k$ von $H_i H_k$ gehört. Also haben die Glieder mit $H_i H_k$ in (19) und (20) beide Male denselben Wert. Wenn wir nun zeigen können, daß für jedes α

$$\frac{1}{r} Sp_{\mathfrak{r}}(E_{-\alpha} E_\alpha) \geqq Sp_{\mathfrak{r}'}(E_{-\alpha} E_\alpha)$$

ist, und daß für mindestens ein α das $>$-Zeichen gilt, so sind wir fertig.

Wegen $Sp(E_\alpha E_{-\alpha}) = Sp(E_{-\alpha} E_\alpha)$ können wir uns auf die negativen Wurzeln beschränken. Ist α eine solche, so können wir nach § 3 im Raum $\mathfrak{R}_\Gamma$ die Serien $e_0, \ldots, e_l$; $e_0', \ldots, e_{l'}'$; ... bilden. Da der ganze Raum $\mathfrak{R}_\Gamma$ von den Vektoren $A e_0 = E_\alpha E_\beta \ldots E_\delta e_0$ aufgespannt wird, welche Eigenvektoren von H mit bestimmten Gewichten sind, so können wir die $e_0, \ldots, e_l$; $e_0', \ldots$ ebenfalls so wählen, daß sie Eigenvektoren mit bestimmten Gewichten sind. Wählen wir dann aus diesen Vektoren diejenigen aus, die zum Gewicht A gehören, so bilden diese eine Basis für den Raum $\mathfrak{r}_A$, welche wir zur Spurberechnung benutzen können. Diese Basis möge aus den Vektoren $\dot{e}_1, \dot{e}_2, \ldots, \dot{e}_r$ bestehen; $\dot{e}_\nu$ möge in einer Serie von der Länge l_ν vorkommen und dort die Nummer i_ν haben. Dann ist nach (15) und (16)

$$\tag{21} \left\{ \begin{aligned} E_{-\alpha} E_\alpha \dot{e}_1 &= \frac{(i_1+1)(l_1-i_1)}{2} \alpha_\alpha \dot{e}_1, \\ E_{-\alpha} E_\alpha \dot{e}_2 &= \frac{(i_2+1)(l_2-i_2)}{2} \alpha_\alpha \dot{e}_2 + (\text{Glied mit } \dot{e}_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_{-\alpha} E_\alpha \dot{e}_r &= \frac{(i_r+1)(l_r-i_r)}{2} \alpha_\alpha \dot{e}_r + (\text{Glieder mit } \dot{e}_1, \ldots, \dot{e}_{r-1}). \end{aligned} \right.$$

An sich könnten die eingeklammerten Glieder beliebige Linearkombinationen von Vektoren aus früheren Serien sein, wie in (16); da sie aber wieder das Gewicht A haben müssen, können es nur Linearkombinationen von vorangegangenen $\dot{e}_\nu$ sein. Die Spur wird nun

$$Sp_{\mathfrak{r}}(E_{-\alpha} E_\alpha) = \sum_{\nu=1}^{r} \frac{(i_\nu+1)(l_\nu-i_\nu)}{2} \alpha_\alpha. \tag{22}$$

Ebenso ist in $\mathfrak{r}'$:

$$Sp_{\mathfrak{r}'}(E_{-\alpha} E_\alpha) = \frac{(0+1)(l-0)}{2} \alpha_\alpha, \tag{23}$$

denn der einzige Basisvektor v_0 hat das höchste Gewicht Λ und ist Anfangsglied der ersten Serie $v_0, v_1, \ldots, v_l$. Nach (14) ist die Länge dieser Serie durch

$$l = -2\frac{\Lambda_\alpha}{\alpha_\alpha}$$

bestimmt. Ebenso ist die Länge l_ν einer Serie, deren i_ν-tes Glied e_ν das Gewicht Λ und deren Anfangsglied daher das Gewicht $\Lambda - i_\nu\alpha$ hat, durch

$$l_\nu = -2\frac{(\Lambda - i_\nu\alpha)_\alpha}{\alpha_\alpha} = -2\frac{\Lambda_\alpha}{\alpha_\alpha} + 2i_\nu = l + 2i_\nu$$

gegeben. Es folgt

$$(i_\nu + 1)(l_\nu - i_\nu) = (i_\nu + 1)(l + i_\nu) \geqq l.$$

Setzt man das in (22) ein, so erhält man

$$Sp(E_{-\alpha}E_\alpha) \geqq \sum_{\nu=1}^{r}\frac{l}{2}\alpha_\alpha = r\frac{l}{2}\alpha_\alpha.$$

Der Vergleich mit (23) ergibt die gesuchte Ungleichung

$$\frac{1}{r}Sp_{\mathfrak{r}}(E_{-\alpha}E_\alpha) \geqq Sp_{\mathfrak{r}'}(E_{-\alpha}E_\alpha). \tag{24}$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn alle $i_\nu = 0$ sind, also alle Serien, die das Gewicht Λ enthalten, beim Gewicht Λ anfangen. Das kann aber nicht für alle negativen α stattfinden. Es sei nämlich $e_1 = E_\alpha E_\beta \ldots E_\delta e_0$, wobei nach der bei Hilfssatz 1 gemachten Bemerkung alle $\alpha, \beta, \ldots, \delta$ als negativ angenommen werden können, da e_0 ein Eigenvektor vom höchsten Gewicht Γ ist. Dann wird $e_1 = E_\alpha v$; mithin kommt e_1 in einer Serie nicht als Anfangsglied, sondern mindestens als zweites Glied vor. Also gilt in (24) mindestens einmal das Zeichen $>$. Damit ist Hilfssatz 3 bewiesen.

§ 5.

Beweis des Hauptsatzes.

Es sei eine infinitesimale lineare Darstellung der halbeinfachen Gruppe $\mathfrak{G}$ vorgelegt, die zwei irreduzible Bestandteile $\mathfrak{D}_\Gamma$ und $\mathfrak{D}_\Lambda$ enthält. Es sind nun drei Fälle möglich:

A. Die Darstellungen $\mathfrak{D}_\Gamma$ und $\mathfrak{D}_\Lambda$ sind nicht äquivalent, aber das höchste Gewicht der einen Darstellung ist zugleich ein Gewicht der anderen Darstellung. Sind dann g_Γ und g_Λ die zugehörigen Eigenwerte von G, so ist nach Hilfssatz 3 (§ 4) $g_\Gamma \neq g_\Lambda$. Genau so wie in § 2 im Fall **A** folgt daraus der Zerfall der vorgelegten Darstellung.

B. Die Darstellungen $\mathfrak{D}_\Gamma$ und $\mathfrak{D}_\Lambda$ sind nicht äquivalent, und das höchste Gewicht der einen Darstellung ist weder ein Gewicht der anderen noch auch umgekehrt. $\mathfrak{R}$ sei der Darstellungsraum, $\mathfrak{r}$ ein Teilraum, der nach der irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_\Gamma$ transformiert wird, während $\mathfrak{R}$ modulo $\mathfrak{r}$

nach $\mathfrak{D}_A$ transformiert wird. Es sei e_0 ein Eigenvektor vom höchsten Gewichte Γ in $\mathfrak{r}$ und e_0' ein Eigenvektor vom Gewichte A in $\mathfrak{R}$. e_0' liegt dann nicht in $\mathfrak{r}$.

Wenn die Ausdrücke $A\,e_0'$ (A = Produkt aus Faktoren H_i und E_α) einen Raum $\mathfrak{r}'$ aufspannen, der mit $\mathfrak{r}$ nur den Nullvektor gemein hat, so zerfällt $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ und es ist nichts mehr zu beweisen. Wenn der von den $A\,e_0'$ aufgespannte Raum aber mehr als die Null mit $\mathfrak{r}$ gemeinsam hat, so umfaßt er $\mathfrak{r}$ ganz, denn $\mathfrak{r}$ ist ja irreduzibel. Insbesondere ist dann e_0 als Linearkombination von Ausdrücken $A\,e_0'$ darstellbar:

(25) $$e_0 = \Sigma\, \varrho_\nu A_\nu e_0'.$$

Nach Hilfssatz 1 (§ 4) können wir annehmen, daß in jedem Glied von (25) zuerst die Faktoren E_α mit $\alpha < 0$, sodann die mit $\alpha > 0$ und schließlich die Faktoren H erscheinen. Die Faktoren H können in Zahlenfaktoren verwandelt werden, da e_0' Eigenvektor ist.

Jedes Glied rechts in (25) hat ein bestimmtes Gewicht. Die linke Seite hat das Gewicht Γ; also kann man sich auf der rechten Seite auch auf die Glieder vom Gewichte Γ beschränken; denn ein Vektor vom Gewichte Γ läßt sich nicht aus Vektoren anderen Gewichtes linear zusammensetzen. Nun gibt es in $\mathfrak{r}$ nur einen Vektor e_0 vom Gewichte Γ, da das Gewicht Γ einfach ist; und modulo $\mathfrak{r}$ gibt es keinen Vektor vom Gewichte Γ. Also ist jedes von Null verschiedene Glied der rechten Seite von (25) proportional zu e_0. Es sei also

(26) $$\varrho\, e_0 = A\,e_0' = E_\alpha E_\beta \ldots E_\delta e_0' \qquad \varrho \neq 0.$$

Wir müssen nun zwei Unterfälle unterscheiden: $\Gamma > A$ und $\Gamma < A$.

Im Fall $\Gamma > A$ ist in (26) mindestens eine der Wurzeln $\alpha, \beta, \ldots, \delta$ positiv; also ist, da die positiven Faktoren ja am Ende stehen, $\delta > 0$. e_0' hat das Gewicht A, das in $\mathfrak{D}_A$, aber nicht in $\mathfrak{D}_\Gamma$ vorkommt. $E_\delta e_0'$ hat das Gewicht $A + \delta$, das größer als A ist, also nicht in $\mathfrak{D}_A$ vorkommt. Wenn es doch in $\mathfrak{R}$ vorkommt, muß es in $\mathfrak{D}_\Gamma$ vorkommen. Dieser Sachverhalt ist aber nach Hilfssatz 2 (§ 4) unmöglich.

Im Fall $\Gamma < A$ ist in (26) mindestens eine der Wurzeln $\alpha, \beta, \ldots, \delta$ negativ, also α negativ. Schreibt man für (26)

$$\varrho\, e_0 = E_\alpha v,$$

so hat $\varrho\, e_0$ das Gewicht Γ, das in $\mathfrak{D}_\Gamma$, aber nicht in $\mathfrak{D}_A$ vorkommt, während v nur das Gewicht $\Gamma - \alpha$ haben kann, welches in $\mathfrak{D}_\Gamma$ nicht vorkommt, da es größer als Γ ist, und welches folglich in $\mathfrak{D}_A$ vorkommt. Dieser Sachverhalt ist aber wiederum nach Hilfssatz 1 unmöglich.

C. Die Darstellungen $\mathfrak{D}_\Gamma$ und $\mathfrak{D}_A$ sind äquivalent: $\Gamma = A$. Der Raum $\mathfrak{R}$ hat wieder einen irreduziblen Teilraum $\mathfrak{r}$, der von einem Eigenvektor e_0 des höchsten Gewichtes A und dessen Transformiertem $A\,e_0$ aufgespannt wird. Modulo diesem Teilraum gibt es wieder einen Vektor e_0'

des höchsten Gewichtes Λ, der so gewählt werden kann, daß er sogar modulo e_0 zum Gewicht Λ gehört:

$$H e_0' = \Lambda e_0' + \mu e_0. \tag{27}$$

Ist nun α eine negative Wurzel und bildet man von e_0 ausgehend die Serie (13) und ebenso von e_0' aus die Serie

$$\begin{aligned} e_1' &= E_\alpha e_0' \\ &\cdots\cdots \\ e_l' &= E_\alpha e_{l-1}' \\ 0 &= E_\alpha e_l' \end{aligned}$$

(welche genau dieselbe Länge hat, da die Länge jedesmal durch (14) bestimmt wird), so gelten die Formeln

$$H e_i' = (\Lambda + i\alpha) e_i' + \mu e_i \tag{28}$$

$$E_{-\alpha} e_i' = -\left(i \Lambda_\alpha + \frac{i(i-1)}{2} \alpha_\alpha\right) e_{i-1}' - i \mu_\alpha e_{i-1}, \tag{29}$$

welche ebenso wie (6), (7) oder wie (15) durch vollständige Induktion nach i bewiesen werden. Aus (29) folgt insbesondere für $i = l + 1$ (wegen $e_{l+1}' = 0$):

$$0 = -(l+1)\left(\Lambda_\alpha + \frac{l}{2}\alpha_\alpha\right) e_l' - (l+1)\mu_\alpha e_l.$$

Das erste Glied ist Null wegen (14), also muß das letzte Glied auch Null sein; daraus folgt

$$\mu_\alpha = 0.$$

Die Linearform $\mu = \mu(H)$ ist demnach Null für alle $H = H_\alpha$; also ist sie überhaupt Null. Damit vereinfacht (27) sich zu

$$H e_0' = \Lambda e_0'. \tag{30}$$

e_0' und alle $A e_0'$, wo A ein Produkt von Faktoren E_α und H_i ist, sind nunmehr Eigenvektoren von H. Wenn diese Vektoren einen Raum aufspannen, der mit $\mathfrak{r}$ nur den Nullvektor gemeinsam hat, ist nichts mehr zu beweisen. Sonst spannen sie einen Raum auf, der $\mathfrak{r}$ ganz umfaßt, und es gilt wieder eine Gleichung von der Gestalt (25), in deren Gliedern immer die E_α mit $\alpha < 0$ zuerst kommen, dann die mit $\alpha > 0$ und schließlich die H, die wegen (30) auch durch Zahlenfaktoren ersetzt werden können. Da e_0' das höchste Gewicht Λ hat, können wir sogar annehmen, daß in (25) rechts keine E_α mit positivem α vorkommen. Beschränken wir uns links und rechts in (25) wieder auf die Glieder vom Gewicht Λ, so können auch keine E_α mit negativem α vorkommen, denn diese erniedrigen das Gewicht. Also nimmt (25) schließlich die Gestalt

$$e_0 = \varrho e_0'$$

an. Eine solche Gleichung ist aber unmöglich, da e_0' nicht in $\mathfrak{r}$ liegt.

Damit ist der Hauptsatz in allen Fällen bewiesen.

(Eingegangen am 15. 10. 1934.)

Eine Verallgemeinerung des Jordan-Hölderschen Satzes.

Alexander Kurosch in Moskau.

1. Der Jordan-Höldersche Satz über den Isomorphismus der Kompositionsreihen einer Gruppe, d. h. über die Übereinstimmung der Mengen der Faktoren jeder zwei Kompositionsreihen, der zuerst nur für endliche Gruppen bewiesen war, gilt auch bei unendlichen Gruppen, die eine Kompositionsreihe besitzen, dabei bei beliebigem Operatorenbereich[1]). Ein Beweis dieses Satzes, dessen Grundideen in der vorliegenden Arbeit erhalten bleiben, stammt von O. Schreier[2]).

Schreier definiert eine Normalreihe, d. h. ein endliches System $\mathfrak{N}$ von Untergruppen

$$H_0 = 1,\ H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_{n-1},\ H_n = G,$$

wo jede Untergruppe H_i ein echter Normalteiler von H_{i+1} ist, nennt eine andere Normalreihe $\mathfrak{N}'$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{N}$, wenn $\mathfrak{N}'$ alle Untergruppen aus $\mathfrak{N}$ enthält, und beweist, daß je zwei Normalreihen einer Gruppe isomorphe Verfeinerungen besitzen. Da jede Kompositionsreihe eine Normalreihe ohne weitere Verfeinerungen ist, so folgt der Jordan-Höldersche Satz unmittelbar daraus.

Besitzt aber eine gegebene Gruppe keine Kompositionsreihen, so kann man eine Normalreihe unendlich verfeinern. Die Vereinigung dieser Verfeinerungen gibt dann eine geordnete unendliche Untergruppenmenge, die wir eine Normalmenge nennen werden (vgl. die genauere Definition unten). Wenn wir diese Menge weiter transfinit verfeinern, so erhalten wir endlich eine Normalmenge ohne weitere Verfeinerungen, d. h. eine Kompositionsmenge.

Es ist im allgemeinen unmöglich, den Jordan-Hölderschen Satz auf beliebige Kompositionsmengen zu übertragen; ist G z. B. eine unendliche zyklische Gruppe, $G = \{a\}$, so bilden die Untergruppen $H_k = \{2^k a\}$ und $F_k = \{3^k a\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, mit Einschluß der Einheitsgruppe zwei nichtisomorphe Kompositionsmengen.

---

[1]) Vgl. E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Annalen **96** (1926), S. 26—61. O. Schmidt, Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette, Math. Zeitschr. **29** (1928), S. 34—41.

[2]) O. Schreier, Über den Jordan-Hölderschen Satz, Abh. math. Seminar Hamburg. Univ. **6** (1928) S. 300—302, wiedergegeben bei B. L. van der Waerden, Moderne Algebra I, Berlin, 1931.

Wir wollen aber zeigen, daß *der Jordan-Höldersche Satz für die wohlgeordneten zunehmenden Kompositionsmengen*, welche Kompositionsfolgen heißen werden, *gültig bleibt*. Wir werden dazu isomorphe Verfeinerungen für zwei gegebene Normalmengen suchen und diese Verfeinerungen, wenn es möglich ist, von Wiederholungen befreien. Wir geben dabei, im Gegensatz zur Schreierschen zweifachen Induktion, eine direkte Konstruktion der gesuchten Verfeinerungen[3]).

Man kann ohne Mühe zeigen, daß *alle Kompositionsmengen einer Gruppe G dann und nur dann Kompositionsfolgen sein werden, wenn G eine Gruppe mit endlichen abnehmenden Untergruppenketten ist*, d. h. wenn jede Untergruppenkette

$$G \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_n \supset \ldots,$$

wo H_n ein echter Normalteiler von H_{n-1} ist, an endlicher Stelle abbricht. Es gibt aber Gruppen, in denen nur einige Kompositionsmengen Kompositionsfolgen sind. Ein Beispiel dafür ist die direkte Summe einer abzählbaren Menge von endlichen zyklischen Gruppen von einer Primzahlordnung; einige Normalmengen dieser Gruppe sind sogar „in sich dicht", d. h. sie haben überhaupt keine Faktoren.

2. Es sei G eine Gruppe mit beliebigem Operatorenbereich. Eine Menge $\mathfrak{N} = \{H\}$ ihrer Untergruppen H soll eine *Normalmenge* heißen, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

a) $\mathfrak{N}$ enthält die Gruppe G selbst und die Einheitsgruppe.

b) Gehören Untergruppen H', H'' zu $\mathfrak{N}$, so ist eine von ihnen ein echter Teil der anderen.

c) Jede zu $\mathfrak{N}$ gehörende Untergruppe H kann in $\mathfrak{N}$ mit G *verbunden* werden, d. h. es gibt in $\mathfrak{N}$ solche Untergruppen $H_1, H_2, \ldots, H_{k-1}$ (k eine ganze positive Zahl), daß

$$H_0 = H \subset H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_{k-1} \subset H_k = G$$

und H_i Normalteiler von H_{i+1} ist ($i = 0, 1, \ldots, k-1$).

Nach b) können und werden wir annehmen, daß jede Normalmenge $\mathfrak{N}$ *geordnet* und dabei sogar *zunehmend* ist, also ist die Einheitsgruppe das erste, die Gruppe G das letzte Element von $\mathfrak{N}$. Man kann daher die Untergruppen H der Menge $\mathfrak{N}$ mit einem Index α versehen, der eine

[3]) Eine eben erschienene Arbeit von H. Zassenhaus über den Jordan-Hölderschen Satz [Abh. math. Seminar Hamburg. Univ. **10** (1934), S. 106—108] benutzt dieselbe Konstruktion zu einem neuen Beweis des Schreierschen Satzes. Die Methode meiner Abhandlung ist also nicht mehr neu, wiewohl ich sie natürlich unabhängig von Zassenhaus gefunden habe. Neu bleibt nur die Verallgemeinerung des Schreierschen Satzes auf wohlgeordnete Kompositionsmengen.

geordnete Indexmenge durchläuft und dabei so, daß $H_{\alpha_1} \subset H_{\alpha_2}$ bei $\alpha_1 < \alpha_2$ (α_1 geht dem α_2 voran) ist.

Gehören die Untergruppen H, H' zu $\mathfrak{N}$ und ist $H \subset H'$, so kann man, wie aus c) folgt, H und H' in $\mathfrak{N}$ verbinden, d. h. in $\mathfrak{N}$ solche Untergruppen $H_1, H_2, \ldots, H_{s-1}$ finden, daß

$$H_0 = H \subset H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_{s-1} \subset H_s = H'$$

und H_i Normalteiler von H_{i+1} ist. Daraus folgt, *wenn H' der unmittelbare Nachfolger von H in $\mathfrak{N}$ ist, daß H ein Normalteiler von H' sein muß.* Gibt es aber in $\mathfrak{N}$ andere Untergruppen zwischen H und H', so kann man gewiß zwischen H und H' Normalteiler von H' finden.

Besitzt die Normalmenge $\mathfrak{N}$ solche Untergruppenpaare H, H', daß H' der unmittelbare Nachfolger von H in $\mathfrak{N}$ ist, so heißt die Faktorgruppe H'/H ein *Faktor* der Normalmenge $\mathfrak{N}$. Zwei Normalmengen $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}''$ heißen *isomorph*, wenn die Mengen aller Faktoren dieser beiden Normalmengen sich so aufeinander eineindeutig abbilden lassen, daß die zugeordneten Faktoren isomorph sind.

Eine Normalmenge $\mathfrak{N}'$ heißt eine *Verfeinerung* der Normalmenge $\mathfrak{N}$, wenn jede Untergruppe aus $\mathfrak{N}$ auch in $\mathfrak{N}'$ aufgeht. Eine Normalmenge, die keine weitere Verfeinerungen zuläßt, heißt eine *Kompositionsmenge*.

Jede Gruppe besitzt eine Kompositionsmenge. In der Tat, die Vereinigung jeder zunehmenden wohlgeordneten Folge von Normalmengen ist selbst eine Normalmenge, also kann man die Konstruktion der Verfeinerungen mit der Normalmenge $\{1, G\}$ beginnen und transfinit fortsetzen.

3. Jede Normalmenge, die nicht nur geordnet, sondern auch *wohlgeordnet* nach der Zunahme ist, soll eine *Normalfolge* und jede wohlgeordnete Kompositionsmenge eine *Kompositionsfolge* heißen. Jede endliche Normalmenge (d. h. sogenannte Normalreihe) ist gewiß eine Normalfolge.

Eine Normalfolge $\mathfrak{N} = \{H_\alpha\}$ der Gruppe G (α ist nun eine Ordnungszahl) soll *vollständig* heißen, wenn jede Untergruppe H_λ, wo λ eine Limeszahl ist, die Vereinigung aller vorhergehenden Untergruppen ist,

$$H_\lambda = \sum_{\alpha<\lambda} H_\alpha.$$

Jede Normalfolge besitzt eine vollständige Verfeinerung.

Beweis. Es sei eine Normalfolge $\mathfrak{N} = \{H_\alpha\}$ gegeben. Ist λ eine Limeszahl und unterscheidet sich H_λ von $H'_\lambda = \sum_{\alpha<\lambda} H_\alpha$, so muß die Untergruppe H'_λ ein Normalteiler von H_λ sein, denn es gibt in $\mathfrak{N}$ zwischen H_λ und jedem H_α, $\alpha < \lambda$, Normalteiler von H_λ, also ist H'_λ die Vereinigung einer zunehmenden Folge der Normalteiler von H_λ. Es ist jetzt

leicht zu sehen, daß die Menge $\mathfrak{N}'$, die aus der Normalfolge $\mathfrak{N}$ und allen von den entsprechenden Gruppen H_λ verschiedenen Gruppen H'_λ gebildet ist, eine vollständige Normalfolge ist.

Daraus folgt, daß *jede Kompositionsfolge vollständig ist.*

4. Die Normalmenge ist so definiert, daß alle sich in dieser Menge befindenden Untergruppen untereinander verschieden sind. Wollen wir dieses nicht fordern, ist also $H_{\alpha_1} = H_{\alpha_2}$ bei $\alpha_1 < \alpha_2$ möglich (alle Untergruppen H_γ, $\alpha_1 < \gamma < \alpha_2$, werden dann auch mit H_{α_1} und H_{α_2} identisch sein), so erhalten wir eine *Normalmenge mit Wiederholungen.* Dieser Begriff spielt nur eine Nebenrolle, unter der Normalmenge schlechthin ist also immer nur eine Normalmenge *ohne* Wiederholungen zu verstehen. Die Definitionen des Isomorphismus und der Verfeinerung kann man ohne Mühe auf die Normalmengen mit Wiederholungen übertragen.

Zwei beliebige Normalmengen einer Gruppe besitzen isomorphe Verfeinerungen mit Wiederholungen.

Es seien $\mathfrak{N}' = \{H_\alpha\}$, $\mathfrak{N}'' = \{F_\beta\}$ zwei Normalmengen, $\alpha_0 \leqq \alpha \leqq \bar{\alpha}$, $\beta_0 \leqq \beta \leqq \bar{\beta}$, also ist $H_{\alpha_0} = F_{\beta_0} = 1$, $H_{\bar{\alpha}} = F_{\bar{\beta}} = G$. Enthält die Menge $\mathfrak{N}'$ eine Untergruppe, die in $\mathfrak{N}'$ der unmittelbare Nachfolger zu H_α ist, so werden wir diese Untergruppe mit $H_{\alpha+1}$ bezeichnen; zwischen den $H_\alpha, H_{\alpha+1}$ gibt es in $\mathfrak{N}'$ keine Untergruppen. Analoge Bezeichnungen werden wir auch für $\mathfrak{N}''$ brauchen.

Wir führen auch folgende Bezeichnungen ein: $D_{\alpha\beta}$ ist der Durchschnitt der Untergruppen H_α, F_β,

$$D_{\alpha\beta} = H_\alpha \cap F_\beta;$$

gibt es in $\mathfrak{N}'$ die Untergruppe $H_{\alpha+1}$ für gegebene Untergruppe H_α, so ist $H_{\alpha\beta}$ das Produkt der Untergruppen H_α, $D_{\alpha+1,\,\beta}$,

$$H_{\alpha\beta} = H_\alpha D_{\alpha+1,\,\beta};$$

gibt es in $\mathfrak{N}''$ die Untergruppe $F_{\beta+1}$ für gegebene Untergruppe F_β, so ist $F_{\alpha\beta}$ das Produkt der Untergruppen F_β, $D_{\alpha,\,\beta+1}$,

$$F_{\alpha\beta} = F_\beta D_{\alpha,\,\beta+1}.$$

Die gesuchte Verfeinerung der Menge $\mathfrak{N}'$ wird nun so erhalten: für jedes α, für welches es in $\mathfrak{N}'$ die Untergruppe $H_{\alpha+1}$ gibt, setzen wir alle Untergruppen $H_{\alpha\beta}$, $\beta_0 < \beta < \bar{\beta}$, zwischen H_α und $H_{\alpha+1}$ ein. Wir erhalten eine Untergruppenmenge $\overline{\mathfrak{N}}'$, die eine Normalmenge mit Wiederholungen ist. Es ist in der Tat $H_\alpha \subseteqq H_{\alpha\beta} \subseteq H_{\alpha+1}$ bei jedem β und $H_{\alpha\beta} \subseteq H_{\alpha\beta'}$ bei $\beta < \beta'$. Ist ferner F_β Normalteiler von $F_{\beta'}$, so ist auch $D_{\alpha\beta}$ Normalteiler von $D_{\alpha\beta'}$, und, da H_α Normalteiler von $H_{\alpha+1}$ ist, muß auch $H_{\alpha\beta}$ Normalteiler von $H_{\alpha\beta'}$ sein. Man kann also jede Untergruppe $H_{\alpha\beta}$ in $\overline{\mathfrak{N}}'$ mit $H_{\alpha+1} = H_{\alpha\bar{\beta}}$ und daher mit G verbinden.

Genau so kann man eine zweite Normalfolge mit Wiederholungen $\overline{\mathfrak{N}}''$ — eine Verfeinerung für $\mathfrak{N}''$ — erhalten, wenn man für jedes β, für welches es in $\mathfrak{N}''$ die Untergruppe $F_{\beta+1}$ gibt, alle Untergruppen $F_{\alpha\beta}$, $\alpha_0 < \alpha < \bar{\alpha}$, zwischen F_β und $F_{\beta+1}$ einsetzt. Wir haben zu zeigen, daß die Mengen $\overline{\mathfrak{N}}'$, $\overline{\mathfrak{N}}''$ isomorph sind.

Jeder Faktor in $\overline{\mathfrak{N}}'$ muß die Gestalt $H_{\alpha,\beta+1}/H_{\alpha\beta}$ haben. Ist dieser Faktor für gegebene α, β tatsächlich vorhanden, so muß die Menge $\overline{\mathfrak{N}}''$ den Faktor $F_{\alpha+1,\beta}/F_{\alpha\beta}$ besitzen und umgekehrt. Wir ordnen diese Faktoren einander zu und behaupten, daß sie isomorph sind,

$$H_{\alpha,\beta+1}/H_{\alpha\beta} \cong F_{\alpha+1,\beta}/F_{\alpha\beta}.$$

In der Tat, das Produkt der Untergruppen $H_{\alpha\beta}$ und $D_{\alpha+1,\beta+1}$ ist gleich $H_{\alpha,\beta+1}$ (und dasjenige der Untergruppen $F_{\alpha\beta}$ und $D_{\alpha+1,\beta+1}$ ist gleich $F_{\alpha+1,\beta}$), also gilt, auf Grund des sogenannten ersten Isomorphiesatzes,

$$H_{\alpha,\beta+1}/H_{\alpha\beta} \cong D_{\alpha+1,\beta+1}/D_{\alpha+1,\beta+1} \cap H_{\alpha\beta}$$

und

$$F_{\alpha+1,\beta}/F_{\alpha\beta} \cong D_{\alpha+1,\beta+1}/D_{\alpha+1,\beta+1} \cap F_{\alpha\beta}.$$

Es bleibt also nur zu zeigen, daß

$$D_{\alpha+1,\beta+1} \cap H_{\alpha\beta} = D_{\alpha+1,\beta+1} \cap F_{\alpha\beta}$$

ist.

Gehört ein Element g zur Untergruppe $H_{\alpha\beta}$, so gilt, da H_α Normalteiler von $H_{\alpha\beta}$ ist, $g = hd$ mit $h \varepsilon H_\alpha$, $d \varepsilon D_{\alpha+1,\beta}$ (also $d \varepsilon F_\beta$). Gehört das Element g gleichzeitig zur Untergruppe $D_{\alpha+1,\beta+1}$ und daher zu $F_{\beta+1}$, so gilt

$$h = g d^{-1} \varepsilon F_{\beta+1}, \quad \text{d. h.} \quad h \varepsilon D_{\alpha,\beta+1}.$$

Daraus folgt, daß das Element g sich als Produkt von Elementen aus $D_{\alpha,\beta+1}$ und F_β darstellen läßt, also gilt $g \varepsilon F_{\alpha\beta}$ und endlich $g \varepsilon D_{\alpha+1,\beta+1} \cap F_{\alpha\beta}$. Jedes Element aus $D_{\alpha+1,\beta+1} \cap F_{\alpha\beta}$ gehört umgekehrt zu $D_{\alpha+1,\beta+1} \cap H_{\alpha\beta}$, also sind unsere Faktoren wirklich isomorph. Damit ist der Isomorphismus der Normalmengen mit Wiederholungen $\overline{\mathfrak{N}}'$, $\overline{\mathfrak{N}}''$ bewiesen.

5. Es ist im allgemeinen unmöglich, die Wiederholungen in den oben gebauten Mengen $\overline{\mathfrak{N}}'$, $\overline{\mathfrak{N}}''$ mit Beibehaltung ihres Isomorphismus zu eliminieren. Es gilt aber folgender Satz:

Zwei beliebige Normalfolgen einer Gruppe besitzen isomorphe Verfeinerungen ohne Wiederholungen.

Es seien jetzt $\mathfrak{N}' = \{H_\alpha\}$, $\mathfrak{N}'' = \{F_\beta\}$ Normal*folgen*, also sind α, β Ordnungszahlen, $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$, $0 \leq \beta \leq \bar{\beta}$. Wir können nach 3. und werden annehmen, daß $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ vollständig sind; ist also λ eine Limeszahl, so gilt $F_\lambda = \sum_{\beta<\lambda} F_\beta$, also $D_{\alpha\lambda} = \sum_{\beta<\lambda} D_{\alpha\beta}$ und daher $H_{\alpha\lambda} = \sum_{\beta<\lambda} H_{\alpha\beta}$,

da H_α Normalteiler in jedem $H_{\alpha\beta}$ ist. Jede Menge von miteinander übereinstimmenden Untergruppen $H_{\alpha\beta}$ in $\overline{\mathfrak{N}}'$ besitzt also nicht nur ein erstes, sondern auch ein letztes Element. Wenn wir in jeder solchen Menge nur eine Untergruppe beibehalten, so wird die Folge $\overline{\mathfrak{N}}'$ zu einer Normalfolge ohne Wiederholungen, und zwar so, daß alle sich von der Einheitsgruppe unterscheidenden Faktoren der Folge $\overline{\mathfrak{N}}'$ beibehalten werden und *kein* neuer Faktor erzeugt wird. Genau so kann man auch die Folge $\overline{\mathfrak{N}}''$ zu einer Normalfolge ohne Wiederholungen reduzieren und damit isomorphe Verfeinerungen für die Normalfolgen $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}''$ erhalten. Unser Satz ist bewiesen.

Daraus folgt *eine Verallgemeinerung des Jordan-Hölderschen Satzes: Je zwei Kompositionsfolgen einer Gruppe sind isomorph.*

(Eingegangen am 26. 6. 1934.)

Primärkomponentenzerlegung in nichtkommutativen Ringen.

Von

Hans Fitting in Königsberg i. Pr.

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit definiere ich zunächst die für die kommutative Idealtheorie grundlegenden *Begriffe: prim und primär für beliebige zwei- und einseitige Ideale eines nichtkommutativen Ringes* (mit Einselement), in dem ich keinerlei Endlichkeitsbedingungen, insbesondere weder Teiler- noch Vielfachkettensatz voraussetze. Ich benutze zwei Hilfsbegriffe: 1. den Oreschen Begriff des Eigenringes eines Ideals, den ich in § 1. 2 erkläre und der wegen des Satzes 1 besonders wichtig ist, 2. den Begriff des Radikals eines Ideals, den ich in § 1. 1 nach dem Vorbild einer Kötheschen Begriffsbildung zunächst für zweiseitige Ideale, hierauf in § 1. 3 — mit Hilfe des Eigenrings — auch für einseitige Ideale definiere. Im Kommutativen geht meine Definition der Primärideale in die übliche Definition der *schwachen* Primärideale über.

Unter Voraussetzung des Teilerkettensatzes ist jedes irreduzibele Ideal, d. h. jedes Ideal, das nicht als Durchschnitt echter Oberideale dargestellt werden kann, *primär, ein beliebiges Ideal also immer als Durchschnitt primärer Ideale darstellbar.* Wie weit diese Darstellungen sich „normieren" lassen und welche Eindeutigkeitsgesetze für solche „normierten" Darstellungen gelten, bleibt noch näher zu untersuchen.

Unter Voraussetzung des Doppelkettensatzes läßt sich jedes Ideal sogar als direkter Durchschnitt primärer Ideale darstellen. Unter diesen Darstellungen gibt es „normierte": 1. *minimale*, bei denen der Durchschnitt zweier Komponenten nicht mehr primär ist; 2. *maximale*, bei denen die Zerlegung soweit wie möglich getrieben ist, bei denen also keine Komponente wieder als direkter Durchschnitt echter primärer Oberideale dargestellt werden kann. Die Komponenten der minimalen Zerlegungen sind bis auf „gleichartige" Ideale, also auch in ihrer Anzahl eindeutig bestimmt; das gleiche gilt auch von den Komponenten der maximalen Zerlegungen; „Gleichartigkeit" bedeutet Isomorphie der zugehörigen Restklassenmoduln. Die *minimalen* Zerlegungen sind stets dann und nur dann *absolut* eindeutig

bestimmt, wenn die zweiseitigen Primideale des Restklassenringes $\mathfrak{o}^*/\mathfrak{a}$ vertauschbar sind, wo $\mathfrak{a}$ das zu zerlegende Ideal und $\mathfrak{o}^*$ seinen Eigenring bedeutet. Absolute Eindeutigkeit der *maximalen* Zerlegungen besteht dann und nur dann, wenn 1. die zweiseitigen Primideale von $\mathfrak{o}^*/\mathfrak{a}$ vertauschbar, 2. die Restklassenringe nach diesen Primidealen Körper sind. 2. ist zugleich die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die minimalen Zerlegungen mit den maximalen übereinstimmen. Im allgemeinen entstehen die minimalen Zerlegungen aus den maximalen durch Zusammenfassung der untereinander gleichartigen Komponenten.

Bei dem Beweis der vorgenannten Sätze ergeben sich noch einige interessante Nebenresultate, von denen ich das folgende hervorheben möchte: *In einer Ordnung einer einfachen rationalen Algebra ist jedes zweiseitige Ideal dann und nur dann in das Produkt zweiseitiger Primärideale zerlegbar, die paarweise teilerfremd und miteinander vertauschbar sind, wenn alle zweiseitigen Primideale der Ordnung vertauschbar sind.* Interessant ist dieses Ergebnis, weil es — auch im Nichtkommutativen — *zahlreiche nichtmaximale* Ordnungen gibt, in denen die Bedingung des letzten Satzes: Vertauschbarkeit der zweiseitigen Primideale, erfüllt ist. Unter diesen gibt es sogar solche, bei denen die Führer durch beliebig viele zweiseitige Primideale teilbar sind; der Fall, daß in den Führern nur ein zweiseitiges Primideal aufgeht, ist nämlich auf Grund der Theorie der regulären Ideale uninteressant. Umgekehrt sind natürlich nicht in allen Ordnungen die zweiseitigen Primideale miteinander vertauschbar.

Neben den Ordnungen der einfachen rationalen Algebren sind in den Anwendungen der folgenden Theorie vor allem noch die Ringe der formalen Differentialausdrücke mit Koeffizienten aus einem festen Körper von Funktionen von einer oder mehreren Veränderlichen interessant, die allgemein beispielsweise von E. Noether und W. Schmeidler[1]), im Spezialfall einer Veränderlichen von Ö. Ore[2]) eingehend untersucht wurden. In diesen Ringen gilt — wie E. Noether und W. Schmeidler[1]) gezeigt haben — der Teilerkettensatz für Links- und Rechtsideale und daher i. a. das in Satz 4 (s. u.) ausgesprochene Zerlegungsgesetz. Die Voraussetzung für die Gültigkeit der feineren Strukturaussagen der Sätze 5a bis f (s. u.), der Doppelkettensatz, ist für spezielle Ideale erfüllt, zu denen u. a. die von E. Noether und W. Schmeidler[1]) betrachteten vollständig reduzibelen Ideale, bei Beschränkung auf den Fall einer einzigen Veränderlichen alle vom Nullideal verschiedenen Ideale gehören (vgl. Ore, a. a. O.).

[1]) E. Noether u. W. Schmeidler, Moduln in nichtkommutativen Bereichen. Math. Zeitschr. 8 (1920).

[2]) Öystein Ore, Formale Theorie der linearen Differentialgleichungen. 1. Teil: Crelle Journal 167 (1932). 2. Teil: Crelle Journal 168 (1932).

§ 1.

Die Grundbegriffe.

$\mathfrak{o}$ sei ein kommutativer oder nichtkommutativer Ring mit dem Einselement 1.

1. **Radikal** eines *zweiseitigen* Ideals $\mathfrak{a}$. Ein Element $c \in \mathfrak{o}$ heiße eigentlich nilpotent modulo $\mathfrak{a}$, wenn das von c erzeugte *zweiseitige* Ideal $\mathfrak{o}c\mathfrak{o}$ nur aus solchen Elementen besteht, die modulo $\mathfrak{a}$ nilpotent sind [so daß also aus $x \in \mathfrak{o}c\mathfrak{o}$ folgt $x^\varrho \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$ für hinreichend großes ϱ]. Sind c und d mod $\mathfrak{a}$ eigentlich nilpotent, so ist $c \pm d$ nilpotent modulo $\mathfrak{a}$; für jedes n wird nämlich $(c \pm d)^n = c^n + d_n$ bzw. $= c^n + d'_n$, wo d_n und d'_n zu dem von d erzeugten zweiseitigen Ideal gehören. Bei genügend großem n wird $(c \pm d)^n \equiv d_n$ bzw. $\equiv d'_n \pmod{\mathfrak{a}}$ und für hinreichend großes m $\{(c \pm d)^n\}^m \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$. Es folgt:

Diejenigen Elemente des Ringes $\mathfrak{o}$, die modulo $\mathfrak{a}$ eigentlich nilpotent sind, bilden ein zweiseitiges Ideal $\mathfrak{c}$: das Radikal[3]) *des Ideals* $\mathfrak{a}$. $\mathfrak{c}$ umfaßt alle zweiseitigen Ideale, welche nur aus solchen Elementen bestehen, die modulo $\mathfrak{a}$ nilpotent sind; insbesondere ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{c}$. Das Radikal selber ist im allgemeinen nicht nilpotent modulo $\mathfrak{a}$.

2. **Eigenring** eines Ideals. Nach Ore[4]) versteht man unter dem „*Eigenring* $\mathfrak{o}^*$" eines Linksideals $(\mathfrak{a}|$ denjenigen Unterring von $\mathfrak{o}$, der aus allen der Bedingung $(\mathfrak{a}| \cdot c^* \subseteq (\mathfrak{a}|$ genügenden Elementen von $\mathfrak{o}$ besteht. (Für jedes $a \in (\mathfrak{a}|$ wird $ac^* \in (\mathfrak{a}|$.) Bei einem Rechtsideal $|\mathfrak{a})$ ist der Eigenring $\mathfrak{o}^*$ die Gesamtheit aller c^* mit $c^* \cdot |\mathfrak{a}) \subseteq |\mathfrak{a})$. Der Eigenring eines Ideals von $\mathfrak{o}$ ist offenbar der maximale Unterring von $\mathfrak{o}$, in dem das Ideal zweiseitig ist. Seine Bedeutung beruht auf:

Satz 1: $\mathfrak{o}^*/(\mathfrak{a}|$ *ist mit dem Automorphismenring des Restklassenmoduls* $\mathfrak{o}/(\mathfrak{a}|$ *isomorph; entsprechendes gilt natürlich für Rechtsideale.*

Beweis: Der Automorphismenring des Moduls $\mathfrak{o}/(\mathfrak{a}|$ werde mit $\mathfrak{A}$, die Menge derjenigen Restklassen modulo $(\mathfrak{a}|$, welche bei den Automorphismen von $\mathfrak{o}/(\mathfrak{a}|$ der vom Einselement erzeugten Restklasse $\bar{1}$ entsprechen, mit $\bar{1} \cdot \mathfrak{A}$ bezeichnet. $\bar{1} \cdot \mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{o}^*/(\mathfrak{a}|$ *sind als Mengen identisch:* Ist y ein Element von $\mathfrak{o}$, das eine zu $\bar{1} \cdot \mathfrak{A}$ gehörige Restklasse $\bar{y}$ erzeugt ($\bar{y} = \bar{1} \cdot \Theta$, wo $\Theta \in \mathfrak{A}$), so gilt offenbar $a \cdot y \in (\mathfrak{a}|$ für jedes $a \in (\mathfrak{a}|$, also $y \in \mathfrak{o}^*$. Ist umgekehrt z^* irgendein Element von $\mathfrak{o}^*$, so erhält man

---

[3]) Als Radikal des *Ringes* $\mathfrak{o}$ wird man das zum Nullideal gehörige Radikal bezeichnen. Dieser Radikalbegriff ist etwas allgemeiner als der von G. Köthe in der Arbeit: Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist, Math. Zeitschr. **32** (1930), S. 169 eingeführte, fällt aber in dem von Köthe betrachtetem Falle mit dem spezielleren zusammen.

[4]) Øystein Ore, Formale Theorie der linearen Differentialgleichungen, 2. Teil. Crelle Journal **168** (1932), Kap. 1, § 4, S. 241—243.

— wie man sich leicht überlegt — durch die Abbildung $x \cdot \bar{1} \to x \cdot z^*$, wo $\bar{z}^*$ die von z^* modulo $(\mathfrak{a}|$ erzeugte Restklasse bedeutet und x alle Elemente von $\mathfrak{o}$ durchläuft, stets einen Automorphismus von $\mathfrak{o}/(\mathfrak{a}|$, bei dem $\bar{z}^*$ der Einsrestklasse $\bar{1}$ zugeordnet ist; hieraus folgt $\bar{z}^* \in \bar{1} \cdot \mathfrak{A}$.

Nachdem die Identität der Mengen $\bar{1} \cdot \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{o}^*/(\mathfrak{a}|$ erkannt ist, ergibt sich die Isomorphie zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{o}^*/(\mathfrak{a}|$, wenn man jedem $\Theta \in \mathfrak{A}$ die Restklasse $\bar{1}\Theta \in \bar{1}\,\mathfrak{A} = \mathfrak{o}^*/(\mathfrak{a}|$ zuweist.

3. **Radikal** eines *einseitigen* Ideals. *Das im Eigenring definierte Radikal* eines Ideals von $\mathfrak{o}$ nenne ich kurz das Radikal dieses Ideals. Bei einem *einseitigen* Ideal ist demnach das Radikal im allgemeinen kein Ideal des Ringes $\mathfrak{o}$, sondern des zugehörigen Eigenrings.

4. **Primideale.** I a: Ein Linksideal $(\mathfrak{p}|$ heißt ein *Primideal*, wenn im *Eigenring* $\mathfrak{o}^*$ ein Produkt zweiseitiger Ideale $\mathfrak{b}_1^*, \ldots, \mathfrak{b}_k^*$ nur dann durch $(\mathfrak{p}|$ teilbar ist, falls $(\mathfrak{p}|$ wenigstens in einem Faktor $\mathfrak{b}_\varkappa^*$ aufgeht; *die* $\mathfrak{b}^*$ *sind dabei zweiseitige Ideale des Eigenrings* $\mathfrak{o}^*$ *von* $(\mathfrak{p}|$.

I b: $(\mathfrak{p}|$ heißt insbesondere ein *vollständiges Primideal*, wenn aus $b_1^* \cdot \ldots \cdot b_k^* \equiv 0 \pmod{(\mathfrak{p}|)}$ für mindestens ein $\varkappa$ $b_\varkappa^* \equiv 0 \pmod{(\mathfrak{p}|)}$ folgt, wobei die b^* diesmal keine Ideale, sondern *Elemente des Eigenrings* $\mathfrak{o}^*$ *von* $(\mathfrak{p}|$ bedeuten. Vollständig prim ist ein Linksideal $(\mathfrak{p}|$ offenbar stets dann und nur dann, wenn der Restklassenring $\mathfrak{o}^*/(\mathfrak{p}|$ keine Nullteiler enthält.

Jedes vollständige Primideal ist selbstverständlich prim im Sinne der Definition I a; denn wäre ein Produkt zweiseitiger Ideale $\mathfrak{b}_1^*, \ldots, \mathfrak{b}_k^*$ des Ringes $\mathfrak{o}^*$, aber kein Faktor dieses Produktes durch $(\mathfrak{p}|$ teilbar, so könnte man aus jedem $\mathfrak{b}_\varkappa^* (\varkappa = 1, \ldots, k)$ je ein Element $b_\varkappa^*$ herausgreifen, das nicht zu $(\mathfrak{p}|$ gehört, während das Produkt $b_1^* \cdot \ldots \cdot b_k^*$ in $(\mathfrak{p}|$ enthalten ist, was der Definition eines vollständigen Primideals widerspricht.

Bei Rechtsidealen lautet die Definition für Prim- bzw. vollständige Primideale genau wie bei den Linksidealen. Ein zweiseitiges Ideal ist gleichzeitig als Links- und als Rechtsideal prim, vollständig prim oder nicht prim.

5. **Primärideale.**

II a: Ein Linksideal $(\mathfrak{q}|$ heißt primär, wenn	II a: Ein Rechtsideal $|\mathfrak{q})$ heißt primär, wenn
(1.) das Radikal $\mathfrak{p}^*$ ein Primideal (des Eigenrings $\mathfrak{o}^*$ von $(\mathfrak{q}|$) ist,	(1.) das Radikal $\mathfrak{p}^*$ ein Primideal (des Eigenrings $\mathfrak{o}^*$ von $|\mathfrak{q})$) ist,
(2.) für *zweiseitige Ideale* $\mathfrak{a}^*$ *und* $\mathfrak{b}^*$ *des Eigenrings* $\mathfrak{o}^*$ aus	(2.) für *zweiseitige Ideale* $\mathfrak{a}^*$ *und* $\mathfrak{b}^*$ *des Eigenrings* $\mathfrak{o}^*$ aus
$\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^* \equiv 0 \pmod{(\mathfrak{q}|)}$, $\mathfrak{a}^* \not\equiv 0 \pmod{(\mathfrak{q}|)}$	$\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^* \equiv 0 \pmod{|\mathfrak{q})}$, $\mathfrak{b}^* \not\equiv 0 \pmod{|\mathfrak{q})}$
folgt, daß $\mathfrak{b}^* \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^*}$ gilt	folgt, daß $\mathfrak{a}^* \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^*}$ gilt

(daß also $\mathfrak{b}^*$ nur aus solchen Elementen besteht, die modulo $(\mathfrak{q}|$ nilpotent sind).

Im allgemeinen wird aus

$$\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^* \equiv 0, \quad \mathfrak{b}^* \not\equiv 0 \pmod{(\mathfrak{q}|)}$$

nicht immer auch $\mathfrak{a}^* \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^*}$ folgen.

Ist $\mathfrak{p}^*$ nilpotent modulo $(\mathfrak{q}|$, so sind die Bedingungen (1.) *und* (2.) äquivalent mit der *einzigen*, daß

(3.) aus

$$\mathfrak{a}^*\cdot\mathfrak{b}^* \equiv 0, \quad \mathfrak{a}^* \not\equiv 0 \pmod{(\mathfrak{q}|)}$$

für genügend großes ϱ $(\mathfrak{b}^*)^\varrho \equiv 0 \pmod{(\mathfrak{q}|)}$ hervorgeht.

(daß also $\mathfrak{a}^*$ nur aus solchen Elementen besteht, die modulo $|\mathfrak{q})$ nilpotent sind).

Im allgemeinen wird aus

$$\mathfrak{a}^*\cdot\mathfrak{b}^* \equiv 0, \quad \mathfrak{a}^* \not\equiv 0 \pmod{|\mathfrak{q})}$$

nicht immer $\mathfrak{b}^* \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^*}$ folgen.

Ist $\mathfrak{p}^*$ nilpotent modulo $|\mathfrak{q})$, so sind die Bedingungen (1.) *und* (2.) äquivalent mit der *einzigen*, daß

(3.) aus

$$\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^* \equiv 0, \quad \mathfrak{b}^* \not\equiv 0 \pmod{|\mathfrak{q})}$$

für genügend großes ϱ $(\mathfrak{a}^*)^\varrho \equiv 0 \pmod{|\mathfrak{q})}$ hervorgeht.

Genau genommen ist — unter Voraussetzung der Nilpotenz von $\mathfrak{p}^*$ modulo $(\mathfrak{q}|$ bzw. $|\mathfrak{q})$ — (3.) mit (2.) äquivalent, was sich ja unmittelbar übersehen läßt, und (1.) eine Folge von (2.) oder (3.); für ein durch $\mathfrak{p}^*$ teilbares Produkt $\mathfrak{b}_1^* \cdot \ldots \cdot \mathfrak{b}_k^*$ zweiseitiger Ideale des Ringes $\mathfrak{o}^*$ gilt nämlich $(\mathfrak{b}_1^* \cdot \ldots \cdot \mathfrak{b}_k^*)^\varrho \equiv 0 \pmod{(\mathfrak{q}| \text{ bzw. } |\mathfrak{q})}$, falls ϱ genügend groß gewählt wird; aus den Idealen $\mathfrak{b}_1^*, \ldots, \mathfrak{b}_k^*$ läßt sich also mindestens ein aus möglichst wenig Faktoren zusammengesetztes Produkt $\mathfrak{b}_i^* \cdot \mathfrak{b}_j^* \cdot \ldots \cdot \mathfrak{b}_s^* \cdot \mathfrak{b}_t^*$ bilden, das durch $(\mathfrak{q}|$ bzw. $|\mathfrak{q})$ teilbar ist; in diesem Produkt ist

$$\mathfrak{a}^* = \mathfrak{b}_i^* \cdot \mathfrak{b}_j^* \cdot \ldots \cdot \mathfrak{b}_s^* \not\equiv 0 \pmod{(\mathfrak{q}| \text{ bzw. } |\mathfrak{q})}$$

und daher $\mathfrak{b}_t^* \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^*}$; $\mathfrak{p}^*$ muß also ein Primideal von $\mathfrak{o}^*$ sein.

Das Radikal eines Primärideals bezeichne ich als das zum Primärideal gehörige Primideal. Bei einem *einseitigen* Primärideal ist demnach das zugehörige Primideal im allgemeinen kein Ideal von $\mathfrak{o}$, sondern des Eigenrings $\mathfrak{o}^*$.

Ist ein zweiseitiges Ideal als Linksideal primär, so braucht es als Rechtsideal nicht primär zu sein und umgekehrt.

II b: Den vollständigen Primidealen entsprechend definiere ich noch vollständige Primärideale:

Ein Linksideal $(\mathfrak{q}|$ heiße *vollständig primär*, wenn für zwei *Elemente a^* und b^* des Eigenrings* $\mathfrak{o}^*$ aus

$$a^* b^* \equiv 0, \quad a^* \not\equiv 0 \pmod{(\mathfrak{q}|)}$$

folgt, daß b^* modulo $(\mathfrak{q}|$ eigentlich nilpotent ist, wenn also in $\mathfrak{o}^*/(\mathfrak{q}|$ *alle rechten* Nullteiler eigentlich nilpotent sind.

Ein Rechtsideal $|\mathfrak{q})$ heiße *vollständig primär*, wenn für zwei Elemente a^* und b^* des Eigenrings $\mathfrak{o}^*$ aus

$$a^* b^* \equiv 0, \quad b^* \not\equiv 0 \pmod{|\mathfrak{q})}$$

folgt, daß a^* modulo $|\mathfrak{q})$ eigentlich nilpotent ist, wenn also in $\mathfrak{o}^*/|\mathfrak{q})$ *alle linken* Nullteiler eigentlich nilpotent sind.

Jedes vollständig primäre Ideal $(\mathfrak{q}|$ *bzw.* $|\mathfrak{q})$ *ist primär im Sinne der Definition* IIa; *das zugehörige Primideal ist ein vollständiges.*

Beweis: Das Radikal von $(\mathfrak{q}|$ bzw. $|\mathfrak{q})$ heiße $\mathfrak{p}^*$. Eine genügend hohe Potenz eines durch $\mathfrak{p}^*$ teilbaren Produkts von Elementen $b_1^* \cdot \ldots \cdot b_k^*$ des Eigenrings $\mathfrak{o}^*$ von $(\mathfrak{q}|$ bzw. $|\mathfrak{q})$ ist $\equiv 0 \pmod{(\mathfrak{q}| \text{ bzw. } |\mathfrak{q})}$. Aus den Elementen $b_1^*, \ldots, b_k^*$ läßt sich daher mindestens ein möglichst wenig Faktoren umfassendes Produkt $b_i^* \cdot b_j^* \cdot \ldots \cdot b_s^* \cdot b_t^*$ bilden, das in $(\mathfrak{q}|$ bzw. $|\mathfrak{q})$ enthalten ist. In diesem Produkt ist

$$a^* = b_i^* \cdot b_j^* \cdot \ldots \cdot b_s^* \not\equiv 0 \pmod{(\mathfrak{q}| \text{ bzw. } |\mathfrak{q})}.$$

Folglich ist b_t^* modulo $(\mathfrak{q}|$ bzw. $|\mathfrak{q})$ eigentlich nilpotent, d. h. $b_t^* \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^*}$ und daher $\mathfrak{p}^*$ ein vollständiges Primideal von $\mathfrak{o}^*$.

$\mathfrak{a}^*$ und $\mathfrak{b}^*$ seien jetzt zweiseitige Ideale von $\mathfrak{o}^*$, die der Bedingung

$$\mathfrak{a}^* \cdot \mathfrak{b}^* \equiv 0 \pmod{(\mathfrak{q}|)}, \text{ aber } \mathfrak{a}^* \not\equiv 0 \pmod{(\mathfrak{q}|)}$$

genügen. Es gibt dann in $\mathfrak{a}^*$ mindestens ein nicht zu $(\mathfrak{q}|$ gehöriges Element a^*. Für *jedes* Element $b^* \in \mathfrak{b}^*$ gilt $a^* \cdot b^* \equiv 0 \pmod{(\mathfrak{q}|)}$. Wegen $a^* \not\equiv 0 \pmod{(\mathfrak{q}|)}$ ergibt sich hieraus $b^* \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^*}$, $\mathfrak{b}^* \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^*}$, entsprechendes gilt modulo $|\mathfrak{q})$.

Einfachste Beispiele für Primärideale sind die Primideale, bei denen das zugehörige Radikal ebenfalls Primideal ist; ein vollständiges Primideal ist stets vollständig primär.

Im Kommutativen gehen die Begriffe primär und vollständig primär in den Begriff eines *schwachen* Primärideals[5]) über.

Genauere Strukturaussagen lassen sich machen, wenn man ein Linksideal $(\mathfrak{a}|$ betrachtet, bei dem für die linksseitigen Oberideale der Doppelkettensatz gilt:

Das Ideal $(\mathfrak{a}|$ ist prim, wenn es in seinem Eigenring $\mathfrak{o}^*$ zweiseitig teilerlos, der Restklassenring $\mathfrak{o}^*/(\mathfrak{a}|$ zweiseitig einfach (voller Matrizenring über einem Körper) ist; es ist vollständig prim, wenn es in seinem Eigenring $\mathfrak{o}^*$ zwei- und *ein*seitig teilerlos, der Restklassenring $\mathfrak{o}^*/(\mathfrak{a}|$ also ein Körper ist. Diese Bedingungen sind notwendig und hinreichend. Primär ist $(\mathfrak{a}|$ dann und nur dann, wenn $(\mathfrak{a}|$ im Eigenring nur durch ein einziges zweiseitiges Primideal $\mathfrak{p}^*$ teilbar ist, so daß $(\mathfrak{a}|$ auch ein einartiges Ideal[6]) (im Dedekindschen Sinne) genannt werden kann; $\mathfrak{p}^*$ ist zweiseitig teilerlos und modulo $(\mathfrak{a}|$ nilpotent. Als primäres Ideal kann $(\mathfrak{a}|$ auch dadurch charakterisiert werden, daß der Restklassenring $\mathfrak{o}^*/(\mathfrak{a}|$ im Artinschen Sinne primär[7]): in $\mathfrak{o}^*/(\mathfrak{a}|$ also jedes vom Einheitsideal verschiedene

[5]) v. d. Waerden, Moderne Algebra — im folgenden mit v. d. W. zitiert — 2, § 82, S. 31 und § 83, S. 35.

[6]) Derselbe, 2, § 86, S. 48 ff.

[7]) E. Artin, Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, Abh. d. Math. Seminars d. Univ. Hamburg 5, S. 256.

zweiseitige Ideal nilpotent ist. Schließlich ist $(\mathfrak{a}|$ vollständig primär dann und nur dann, wenn $(\mathfrak{a}|$ primär und das zugehörige Primideal $\mathfrak{p}^*$ zwei- und *ein*seitig teilerlos, wenn also der Restklassenring $\mathfrak{o}^*/(\mathfrak{a}|$ im Artinschen Sinne vollprimär[7]), d. h. in $\mathfrak{o}^*/(\mathfrak{a}|$ jedes vom Einheitsideal verschiedene zwei- und *ein*seitige Ideal nilpotent ist.

Dieselben Struktursätze gelten natürlich auch für Rechtsideale, bei denen der Doppelkettensatz für die rechtsseitigen Oberideale vorausgesetzt wird. Für ein zweiseitiges Ideal $\mathfrak{a}$ gelten diese Struktursätze, wenn das Radikal $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{a}$ modulo $\mathfrak{a}$ nilpotent und der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ vollständig reduzibel (direkte Summe aus endlich vielen einfachen Linksidealen) ist. Unter dieser Voraussetzung ist $\mathfrak{a}$ als Links- und als Rechtsideal *gleichzeitig* primär, vollprimär oder nicht primär (was ja allgemein nicht der Fall ist! s. o.).

Der Beweis der Behauptungen der beiden letzten Abschnitte ergibt sich, wenn man von $\mathfrak{o}^*$ zum Restklassenring $\mathfrak{o}^*/(\mathfrak{a}|$ übergeht und benutzt, daß wegen des Satzes 1 und wegen der Gültigkeit des Doppelkettensatzes im Restklassenmodul $\mathfrak{o}/(\mathfrak{a}|$ das Radikal $\mathfrak{c}^*$ modulo $(\mathfrak{a}|$ nilpotent und der Restklassenring $\mathfrak{o}^*/\mathfrak{c}^*$ vollständig reduzibel ist[8]).

In den weiteren Ausführungen beschränke ich mich von jetzt an auf Linksideale. Alle Aussagen lassen sich leicht auf Rechtsideale übertragen.

6. **Irreduzibele Ideale.** Ein Linksideal $(\mathfrak{a}|$ heißt **teilerfremd-irreduzibel**[9]), wenn es sich nicht als direkter Durchschnitt *echter* linksseitiger Oberideale $(\mathfrak{b}_1|$, $(\mathfrak{b}_2|$, darstellen läßt. Kann $(\mathfrak{a}|$ überhaupt nicht als Durchschnitt *echter* linksseitiger Oberideale $(\mathfrak{b}_1|$, $(\mathfrak{b}_2|$ dargestellt werden (auch dann nicht, wenn man nicht verlangt, daß $(\mathfrak{b}_1|$, $(\mathfrak{b}_2|$ teilerfremd sind), so heißt $(\mathfrak{a}|$ schlechthin **irreduzibel**[10]).

Satz 2: *Gilt bei einem irreduzibelen Linksideal* $(\mathfrak{a}|$ *der Teilerkettensatz für die linksseitigen Oberideale, so ist* $(\mathfrak{a}|$ *vollständig primär*[11]).

Beweis: stützt sich auf Satz 1. Nach diesem Satz ist *die Struktur des Automorphismenringes irreduzibeler Abelscher Gruppen mit Teilerkettensatz* zu untersuchen: $\mathfrak{G}$ sei eine Abelsche Gruppe mit Operatoren. In $\mathfrak{G}$ gelte der Teilerkettensatz: Jede *aufsteigende* Kette von Unter-

---

[8]) H. Fitting, Die Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen und ihr Analogon bei nichtkommutativen Gruppen, Math. Annalen 107 (1932), Satz 11, § 16, Satz 13b, § 17.

[9]) E. Noether, Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Annalen 83 (1921), § 8 bzw. § 9.

[10]) Dieselbe, a. a. O. [s. Fußnote [9])], § 2 bzw. § 9; oder v. d. W. 2, § 83, S. 36.

[11]) Hinsichtlich des Analogons dieses Satzes im Kommutativen vgl. v. d. W. 2, § 83, S. 36. Der Beweis des Textes weicht auch im Kommutativen vom üblichen ab.

gruppen $\mathfrak{U}_0 \subseteqq \mathfrak{U}_1 \subseteqq \mathfrak{U}_2 \subseteqq \ldots$ besitze nur endlich viele voneinander verschiedene Glieder. Schließlich sei $\mathfrak{G}$ irreduzibel in dem Sinne, daß je zwei Untergruppen $\mathfrak{G}_1 \neq (\varepsilon)$, $\mathfrak{G}_2 \neq (\varepsilon)$ (ε Einheitselement von $\mathfrak{G}$) immer einen von (ε) verschiedenen Durchschnitt, d. h. mehr als nur das Einheitselement gemein haben.

Θ sei irgendein Automorphismus von $\mathfrak{G}$. Mit $\mathfrak{G}_r$ werde die Gesamtheit aller Elemente G_r aus $\mathfrak{G}$ bezeichnet, die der Bedingung $G_r \Theta^r = \varepsilon$ genügen. Offenbar sind die $\mathfrak{G}_\nu$ Untergruppen von $\mathfrak{G}$, für die

$$\mathfrak{G}_1 \subseteqq \mathfrak{G}_2 \subseteqq \mathfrak{G}_3 \subseteqq \ldots \subseteqq \mathfrak{G}_r \subseteqq \ldots$$

gilt. Von einem endlichen Index n an wird schließlich

$$\mathfrak{G}_n = \mathfrak{G}_{n+1} = \mathfrak{G}_{n+2} = \ldots.$$

Ich setze $\mathfrak{G}^{**} = \mathfrak{G}_n$ und $\mathfrak{G}^{*} = \mathfrak{G}\Theta^n$. (Es ist dies ungefähr derselbe Ansatz wie bei der verallgemeinerten Peirceschen Zerlegung.) $\mathfrak{G}^*$ und $\mathfrak{G}^{**}$ haben nur das Einheitselement gemein. Da $\mathfrak{G}$ irreduzibel sein sollte, ist entweder

$$(\alpha) \quad \mathfrak{G}^* = (\varepsilon),\ \mathfrak{G}^{**} \supset (\varepsilon) \qquad \text{oder} \qquad (\beta) \quad \mathfrak{G}^* \supset (\varepsilon),\ \mathfrak{G}^{*} = (\varepsilon).$$

Im ersten Fall ist Θ mehrstufig und nilpotent, im zweiten Fall ist Θ einstufig und *nicht* nilpotent. Man schließt hieraus leicht: Die mehrstufigen Automorphismen bilden ein zweiseitiges Ideal $\mathfrak{C}$ des Automorphismenringes $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$: Ist Θ ein mehrstufiger, Π ein beliebiger Automorphismus, so ist $\Theta\Pi$ wieder mehrstufig, also nilpotent, dann ist auch $\Pi\Theta$ nilpotent, also mehrstufig. Ist Θ' ein zweiter mehrstufiger Automorphismus, $\mathfrak{G}_1$ (wie oben) die Gruppe aller G_1 mit $G_1\Theta = \varepsilon$, $\mathfrak{G}_1'$ die Gruppe aller G_1' mit $G_1'\Theta = \varepsilon$, dann ist laut Voraussetzung $\mathfrak{G}_1 \neq (\varepsilon)$, $\mathfrak{G}_1' \neq (\varepsilon)$, also $\mathfrak{G}_1 \frown \mathfrak{G}_1' \neq (\varepsilon)$; hieraus folgt leicht, daß $\Theta \pm \Theta'$ mehrstufig sein muß. *Das Ideal $\mathfrak{C}$ der mehrstufigen Automorphismen ist das Radikal des Automorphismenringes $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$.* Ist Π ein einstufiger Automorphismus, so kann $\Theta\Pi$ offensichtlich nicht der Nullautomorphismus P_0 sein (wenn $\Theta \neq P_0$)[12]). Aus $\Theta_1\Theta_2 = P_0$ und $\Theta_1 \neq P_0$ folgt also, daß Θ_2 mehrstufig, also eigentlich nilpotent ist. *In $\mathfrak{A}$ ist daher das Nullideal vollständig primär und dementsprechend $\mathfrak{C}$ ein vollständiges Primideal.* Aus diesen Aussagen ergibt sich Satz 2 unmittelbar.

Satz 3: *Setzt man bei einem Linksideal $(\mathfrak{a}|$ für die linksseitigen Oberideale neben dem Teilerkettensatz noch den Vielfachenkettensatz voraus,*

---

[12]) Es ist mir leider nicht gelungen, zu beweisen, daß auch $\Pi\Theta \neq P_0$. Wäre es möglich, dies zu zeigen, so ließe sich die Definition des Primärbegriffs wesentlich vereinfachen, indem man fordert, daß alle Nullteiler, nicht nur die rechten, eigentlich nilpotent wären.

so ist $(\mathfrak{a}|$ *schon dann vollständig primär, wenn* $(\mathfrak{a}|$ *nur teilerfremd-irreduzibel ist. Umgekehrt ist* $(\mathfrak{a}|$ *teilerfremd-irreduzibel, wenn* $(\mathfrak{a}|$ *vollständig primär ist.*

Beweis: Bedeutet $\mathfrak{o}^*$ den Eigenring von $(\mathfrak{a}|$, so besagt die Behauptung, $(\mathfrak{a}|$ sei vollständig primär, daß $\mathfrak{o}^*/(\mathfrak{a}|$ im Artinschen Sinne vollständig primär ist (s. o.), dies ist aber wegen des Satzes 1 stets dann und nur dann der Fall, wenn der Modul $\mathfrak{o}/(\mathfrak{a}|$ direkt unzerlegbar[13]), d. h. $(\mathfrak{a}|$ teilerfremd-irreduzibel ist.

§ 2.

Die Zerlegungsgesetze.

Satz 4: Gilt für die linksseitigen Oberideale eines Linksideals der Teilerkettensatz, so ist dieses Ideal immer Durchschnitt von endlich vielen irreduzibelen Linksidealen. *Nach Satz 2 läßt sich also ein Linksideal von der genannten Art immer als Durchschnitt von endlichen vielen primären (ja sogar vollprimären) Linksidealen darstellen*[14]). *Unter diesen Darstellungen* als Durchschnitt primärer (bzw. vollprimärer) Linksideale *gibt es insbesondere immer „kürzeste“*: bei denen der Durchschnitt verschiedener Komponenten nicht mehr primär (bzw. vollprimär) ist und außerdem keine Komponente den Durchschnitt der übrigen umfaßt, d. h. überflüssig ist. Im Kommutativen sind bei den kürzesten Primärkomponenten-Zerlegungen die zu den Komponenten gehörigen Primideale und die Anzahl der Komponenten eindeutig bestimmt[15]). Ob im Nichtkommutativen ein Analogon zu diesem Eindeutigkeitsgesetz besteht, scheint fraglich, bleibt aber noch näher zu untersuchen. Vielleicht gilt Eindeutigkeit der Komponentenzahl und eine Art „Austauschsatz“, was nach E. Noether[16]) der Fall ist, wenn man sich auf kürzeste Darstellungen als Durchschnitt *irreduzibeler* Ideale beschränkt.

Zu wesentlich schärferen Sätzen gelangt man, wenn man — was in den nächsten Sätzen geschehen soll — ein Linksideal $(\mathfrak{a}|$ betrachtet, bei dem für die linksseitigen Oberideale neben dem Teiler- noch der Vielfachenkettensatz vorausgesetzt wird. Allein auf Grund des Teilerkettensatzes ist ein solches Ideal *direkter* Durchschnitt teilerfremd-irreduzibeler Linksideale. Nach Satz 3 folgt hieraus:

Satz 5a: *Für* $(\mathfrak{a}|$ *gilt Satz 4 in der schärferen Fassung, daß* $(\mathfrak{a}|$ *sich sogar als direkter Durchschnitt primärer Linksideale darstellen läßt.*

---

[13]) H. Fitting, a. a. O. (s. Fußnote 8), § 14, Satz 7.

[14]) Im Spezialfall eines kommutativen Ringes gab E. Noether, a. a. O. (siehe Fußnote 9), § 4, einen Beweis dieses Satzes, den man z. B. auch in v. d. W. 2, § 83, dargestellt findet.

[15]) v. d. W. 2, § 84.

[16]) E. Noether, a. a. O. (s. Fußnote 9), § 3 bzw. § 9.

Bei den Darstellungen im Sinne des Satzes 5a sind zwei Arten besonders interessant: a) die *minimalen*, bei denen der Durchschnitt verschiedener Komponenten nicht mehr primär ist, und b) die *maximalen*, bei denen keine Komponente im Sinne des Satzes 5a weiterzerlegt werden kann, d. h. als *direkter* Durchschnitt von mindestens zwei primären Linksidealen $\neq \mathfrak{o}$ darstellbar ist. Jede minimale (direkte) Primärkomponentenzerlegung ist eine kürzeste Darstellung als Durchschnitt primärer, jede maximale (direkte) Primärkomponentenzerlegung eine kürzeste Darstellung als Durchschnitt vollprimärer Linksideale (hinsichtlich des Begriffes: „kürzeste Darstellung" vgl. Satz 4). Inwieweit das Umgekehrte gilt, inwieweit überhaupt Satz 5a als Spezialfall des Satzes 4 gewonnen werden kann, ist noch nicht aufgeklärt.

Für die minimalen und maximalen (direkten) Primärkomponentenzerlegungen von $(\mathfrak{a}|$ bestehen folgende Sätze:

Satz 5b: *Eine Darstellung von* $(\mathfrak{a}|$ *als direkter Durchschnitt primärer Linksideale ist dann und nur dann maximal, wenn alle Komponenten vollständig primär (teilerfremd-irreduzibel) sind.* Bei zwei maximalen (direkten) Primärkomponentenzerlegungen:

$$(\mathfrak{a}| = (\mathfrak{k}_1| \frown \cdots \frown (\mathfrak{k}_l| = (\mathfrak{k}'_1| \frown \cdots \frown (\mathfrak{k}'_{l'}|$$

gilt folgendes:

1. Krullscher Satz[17]), 1. Fassung: *Die* $(\mathfrak{k}|$ *lassen sich den* $(\mathfrak{k}'|$ auf mindestens eine Weise *umkehrbar eindeutig so zuordnen, daß jedes* $(\mathfrak{k}_i|$ *mit dem zugeordneten* $(\mathfrak{k}'_{i'}|$ *von „gleicher Art"*[19]) *ist:* $\mathfrak{o}/(\mathfrak{k}_i| \simeq \mathfrak{o}/(\mathfrak{k}'_{i'}|$; insbesondere ist $l = l'$. (Die Numerierung der $(\mathfrak{k}'|$ werde so gewählt, daß $i = i'$ ausfällt.)

2. Krullscher Satz, 2. Fassung: Im Eigenring $\mathfrak{o}^*$ von $(\mathfrak{a}|$ gibt es mindestens ein zu $(\mathfrak{a}|$ teilerfremdes Element e^*, für das $(\mathfrak{k}_i| \cdot e^* = (\mathfrak{k}'_i|$ gilt (Numerierung beachten). *Die Komponenten der ersten Zerlegung gehen also durch Multiplikation mit einem zu* $(\mathfrak{a}|$ *teilerfremden Element des Eigenrings* $\mathfrak{o}^*$ *in die der zweiten über.*

3. Schmidtscher Austauschsatz[17]): *In der Gleichung* $(\mathfrak{k}_1| \frown \cdots \frown (\mathfrak{k}_l| = (\mathfrak{k}'_1| \frown \cdots \frown (\mathfrak{k}'_l|$ *kann jedes* $(\mathfrak{k}|$ *gegen mindestens* (nicht genau) *ein* $(\mathfrak{k}'|$ *ausgetauscht werden.* Bei der gewählten Numerierung braucht nicht für jedes i $(\mathfrak{k}_i|$ gerade gegen $(\mathfrak{k}'_i|$ austauschbar zu sein.

4. *Ist das Ideal* $(\mathfrak{a}|$ *in seinem Eigenring* $\mathfrak{o}^*$ *durch die zweiseitigen Primteiler* $\mathfrak{p}^*_1, \ldots, \mathfrak{p}^*_m$ *teilbar und hat* $\mathfrak{o}^* \mathfrak{p}^*_\mu$ *als* $\mathfrak{o}^*$-*Modul die Kompositionsreihenlänge* l_μ, *dann ist* $l = l' = \sum_{\mu=1}^{m} l_\mu$ (der Restklassenring $\mathfrak{o}^*/\mathfrak{p}^*_\mu$ ist

---

[17]) W. Krull, Über verallgemeinerte Abelsche Gruppen, Math. Zeitschr. **23** (1925), § 6, S. 186; Otto Schmidt, Unendliche Gruppen mit endlicher Kette, ebenda **29** (1929).

nach bekannten Struktursätzen mit einem vollen Matrizenring über einem Körper isomorph; l_μ ist der Grad dieses Matrizenringes, nach Speiser heißt l_μ auch die „*Kapazität*“ des Primideals $\mathfrak{p}_\mu^*$.) *Teilt man die Komponenten in „Klassen“ untereinander gleichartiger Ideale ein, so ist die Anzahl dieser Klassen gleich m und die Anzahl der Ideale in den einzelnen Klassen bzw.* $l_1, l_2, \ldots, l_m$[17a]).

Satz 5c[18]): Primär ist $(\mathfrak{a}|$ stets dann und nur dann, wenn alle $(\mathfrak{k}|$ zu einer einzigen Klasse gehören, d. h. von gleicher Art sind. Der Restklassenring $\mathfrak{o}^*/(\mathfrak{a}|$ ist in diesem Fall voller Matrizenring über einem vollprimären Ring, der mit den Restklassenringen $\mathfrak{o}_i^*/(\mathfrak{k}_i|$ isomorph ist, wo $\mathfrak{o}_i^*$ den Eigenring von $(\mathfrak{k}_i|$ bedeutet; der Grad des Matrizenringes ist die Zahl l. — Ist $(\mathfrak{a}|$ insbesondere ein Primideal, so sind die Komponenten $(\mathfrak{k}_i|$ vollständige *Prim*ideale gleicher Art.

Satz 5d: *Die minimalen Darstellungen von* $(\mathfrak{a}|$ *als direkter Durchschnitt primärer Linksideale entstehen aus den maximalen, indem in den letzteren alle untereinander gleichartigen Komponenten zusammengefaßt werden.*

$$(\mathfrak{a}| = (\mathfrak{q}_1| \frown \cdots \frown (\mathfrak{q}_m| = (\mathfrak{q}_1'| \frown \cdots \frown (\mathfrak{q}_{m'}'|$$

seien zwei *minimale* Darstellungen von $(\mathfrak{a}|$ als direkter Durchschnitt primärer Linksideale. Es gilt dann:

1. Krullscher Satz[17]), 1. Fassung[20]): *Jedes* $(\mathfrak{q}_i|$ *ist mit genau einem* $(\mathfrak{q}_{i'}'|$ *von gleicher Art,* in dem Sinn, daß die Restklassenmoduln $\mathfrak{o}/(\mathfrak{q}_i|$, $\mathfrak{o}/(\mathfrak{q}_{i'}'|$ isomorph sind[19]); insbesondere ist $m = m'$. (Ich denke die Numerierung der $(\mathfrak{q}'|$ so gewählt, daß $i = i'$ ausfällt).

17a) Vgl. Zusatz 1 am Schluß der Arbeit.

18) Ich hebe diese Spezialfälle hervor, weil sie zur Herleitung der bekannten Struktursätze dienen können, die für diejenigen hyperkomplexen Systeme gelten, welche durch einfache algebraische Erweiterung des Zentrums einer einfachen Algebra A entstehen; man hat hierzu — nach dem Vorbild der kommutativen Körpertheorie — den *gewöhnlichen* Polynombereich $A[x]$ einzuführen (x mit allen $a \in A$ vertauschbar!) und die Struktur der Restklassenringe nach den zweiseitigen Primidealen $\neq 0$ von $A[x]$ zu untersuchen. Zu weiterführenden Struktursätzen gelangt man, wenn man an Stelle von $A[x]$ den allgemeineren Polynombereich $A[x, S]$ mit der Multiplikationsregel $x \cdot a = a^S \cdot x$ zugrunde legt, wo S irgendeinen festen Automorphismus der Algebra A bedeutet.

19) E. Noether und W. Schmeidler, a. a. O. [s. Fußnote 1)], § 9.

20) In Satz 5d wird zwar nicht der Krull-Schmidtsche Satz selber, aber eine einfache Folgerung daraus angewandt: $\mathfrak{G}$ sei eine Abelsche Gruppe mit Operatoren; außerdem gelte in $\mathfrak{G}$ der Doppelkettensatz. Hat man $\mathfrak{G}$ auf zweierlei Art in das direkte Produkt direkt unzerlegbarer Faktoren zerlegt und faßt man in jeder Zerlegung alle untereinander isomorphen Faktoren zusammen, so ist in den beiden so entstehenden Zerlegungen jeder Faktor der ersten Zerlegung mit *genau* einem Faktor der zweiten isomorph und austauschbar.

2. Krullscher Satz, 2. Fassung: *Im Eigenring* $\mathfrak{o}^*$ *von* $(\mathfrak{a}|$ *gibt es mindestens ein zu* $(\mathfrak{a}|$ *teilerfremdes Element* e^* (das also in $\mathfrak{o}^*/(\mathfrak{a}|$ Einheit ist), *mit der Eigenschaft* $(\mathfrak{q}_i| \cdot e^* = (\mathfrak{q}'_i|$ *für jedes* i. (Man denke an die spezielle Numerierung.)

3. Schmidtscher Austauschsatz[17]): $(\mathfrak{q}_i|$ *und* $(\mathfrak{q}'_i|$ *können in der Gleichung* $(\mathfrak{q}_1| \frown \cdots \frown (\mathfrak{q}_m| = (\mathfrak{q}'_1| \frown \cdots \frown (\mathfrak{q}'_m|$ *gegeneinander ausgetauscht werden.* (Numerierung beachten!)

4. *Die Komponentenzahl* m *ist gleich der Anzahl der zweiseitigen Primteiler* $\mathfrak{p}_1^*, \ldots, \mathfrak{p}_m^*$ *von* $(\mathfrak{a}|$ *im Eigenring* $\mathfrak{o}^*$. Die $\mathfrak{p}^*$ sind übrigens im allgemeinen *nicht* die zu den $(\mathfrak{q}|$ gehörigen Primideale, diese liegen in anderen Ringen: den Eigenringen der $(\mathfrak{q}|$.

Der Beweis der Sätze 5b, 5c, 5d ergibt sich leicht, wenn man den Zusammenhang zwischen direkter Summe und direktem Durchschnitt beachtet, den Krull-Schmidtschen Satz heranzieht und — unter Berücksichtigung des Satzes 1 — die Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen anwendet[21]).

Anschließend will ich noch die Frage behandeln, *wann die maximalen und minimalen direkten Primärkomponentenzerlegungen von* $(\mathfrak{a}|$ nicht nur bis auf gleichartige Ideale, sondern *absolut eindeutig bestimmt sind.* Hierfür gibt es einfache übersichtliche Kriterien (siehe Sätze 5e, f unten). Um diese zu finden, muß ich etwas weiter ausholen. Ich betrachte zunächst ein zweiseitiges Ideal $\mathfrak{m}$ mit den beiden folgenden Eigenschaften:

(E) 1. Das Radikal $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{m}$ ist modulo $\mathfrak{m}$ nilpotent ($\mathfrak{c}^\varrho \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$ für genügend großes ϱ).
2. Der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ ist vollständig reduzibel: direkte Summe von endlich vielen einfachen Linksidealen.

Wendet man die Struktursätze, welche Köthe[22]) für diejenigen Ringe bewiesen hat, bei denen der Restklassenring nach dem Radikal (des Nullideals) in die direkte Summe von endlich vielen einfachen Linksidealen zerfällt (vollständig reduzibel ist), auf den Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ an, so zeigt sich:

Ein zweiseitiges Ideal mit der Eigenschaft (E) *läßt sich immer als direkter Durchschnitt primärer Linksideale darstellen, unter diesen Darstellungen gibt es insbesondere minimale* (*im Sinne unserer obigen Definition*), *für welche alle Eindeutigkeitsaussagen des Satzes* 5d *gelten.*

Ich behaupte jetzt:

Satz 6: *Ein zweiseitiges Ideal* $\mathfrak{m}$ *mit der Eigenschaft* (E) *läßt stets dann und nur dann eine einzige minimale Darstellung als direkter Durch-*

---

[21]) H. Fitting, a. a. O. [siehe Fußnote [8])].
[22]) G. Köthe, a. a. O. [siehe Fußnote [3])].

schnitt primärer Linksideale zu, wenn alle in $\mathfrak{m}$ *aufgehenden zweiseitigen Primideale modulo* $\mathfrak{m}$ *vertauschbar, d. h. alle zweiseitigen Primideale des Restklassenringes* $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ *im gewöhnlichen Sinn vertauschbar sind.*

Die „Vertauschbarkeit zweiseitiger Ideale $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ modulo einem dritten zweiseitigen Ideal $\mathfrak{w}$" wird durch die Gleichung $\mathfrak{u}\mathfrak{v} + \mathfrak{w} = \mathfrak{v}\mathfrak{u} + \mathfrak{w}$ definiert.

Beweis: I. *Die Bedingung ist hinreichend:* Sind die zweiseitigen Primteiler von $\mathfrak{m}$ modulo $\mathfrak{m}$ vertauschbar, so gibt es für $\mathfrak{m}$ nur eine einzige minimale direkte Primärkomponentenzerlegung. Zunächst zeige ich, *daß* $\mathfrak{m}$ *unter den gemachten Voraussetzungen als direkter Durchschnitt zweiseitiger Primärideale dargestellt werden kann.* Der Beweis hierfür ergibt sich aus einer Kette von Hilfssätzen:

Hilfssatz 1: Zu $\mathfrak{m}$ kann man endlich viele zweiseitige Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t$, die alle in $\mathfrak{m}$ aufgehen, so finden, daß $\mathfrak{m}$ in dem Produkt $\mathfrak{p}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_t$ aufgeht.

Beweis: Der Restklassenring nach dem Radikal $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{m}$ ist vollständig reduzibel (siehe E_3), also direkte Summe zweiseitig einfacher Ringe. Dieser direkten Summenzerlegung entspricht eine Darstellung des Ideals $\mathfrak{c}$ als direkter Durchschnitt zweiseitiger Primideale: $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$; es ist also $\mathfrak{p}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_s \subseteqq \mathfrak{p}_1 \frown \ldots \frown \mathfrak{p}_s = \mathfrak{c}$. Nun ist $\mathfrak{c}$ nilpotent modulo $\mathfrak{m}$; für genügend großes ϱ wird daher

$$(1) \qquad (\mathfrak{p}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_s)^\varrho \subseteqq \mathfrak{c}^\varrho \subseteqq \mathfrak{m}.$$

Die $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ gehen in $\mathfrak{c}$, also auch in $\mathfrak{m}$ auf; umgekehrt ist natürlich jedes in $\mathfrak{m}$ aufgehende zweiseitige Primideal unter den $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ enthalten.

Hilfssatz 2: $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ seien zweiseitige Ideale. Ist $\mathfrak{u}$ mit $\mathfrak{v}$ modulo $\mathfrak{w}$ vertauschbar und $\mathfrak{w} \subseteqq \mathfrak{z}$, dann folgt aus $\mathfrak{x}\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{y} \subseteqq \mathfrak{z}$ stets $\mathfrak{x}\mathfrak{v}\mathfrak{u}\mathfrak{y} \subseteqq \mathfrak{z}$ und umgekehrt.

Beweis: $\mathfrak{x}\mathfrak{v}\mathfrak{u}\mathfrak{y} \subseteqq \mathfrak{x}(\mathfrak{w} + \mathfrak{v}\mathfrak{u})\mathfrak{y} = \mathfrak{x}(\mathfrak{w} + \mathfrak{u}\mathfrak{v})\mathfrak{y} \subseteqq \mathfrak{z}$.

Wendet man Hilfssatz 2 auf die Beziehung (1) an, so ergibt sich, da die Ideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ nach Voraussetzung modulo $\mathfrak{m}$ vertauschbar sind:

$$(2) \qquad \mathfrak{p}^\varrho_{\pi(1)} \cdot \mathfrak{p}^\varrho_{\pi(2)} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}^\varrho_{\pi(s)} \subseteqq \mathfrak{m},$$

wo π eine beliebige Permutation der Indizes $1, 2, \ldots, s$ bedeutet. Ich bilde nun die zweiseitigen Primärideale $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1^\varrho + \mathfrak{m}, \ldots, \mathfrak{q}_s = \mathfrak{p}_s^\varrho + \mathfrak{m}$ und behaupte $\mathfrak{q}_1 \frown \mathfrak{q}_2 \frown \ldots \frown \mathfrak{q}_s = \mathfrak{m}$.

Zur Berechnung des Durchschnitts $\mathfrak{q}_1 \frown \ldots \frown \mathfrak{q}_s$ benutze ich

Hilfssatz 3: *Der Durchschnitt zweiseitiger Ideale* $\mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_s$, *die paarweise teilerfremd sind, ist* $\mathfrak{u}_1 \frown \ldots \frown \mathfrak{u}_s = \sum\limits_\pi \mathfrak{u}_{\pi(1)} \cdot \mathfrak{u}_{\pi(2)} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{u}_{\pi(s)}$, *wo die Summe über alle Permutationen* π *der Indizes* $1, 2, \ldots, s$ *zu erstrecken ist.*

Beweis: Im Fall $s = 2$ wird:

$$\mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_2 + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{u}_1 \subseteqq \mathfrak{u}_1 \frown \mathfrak{u}_2 \subseteqq (\mathfrak{u}_1 \frown \mathfrak{u}_2)\, \mathfrak{u}_1 + (\mathfrak{u}_1 \frown \mathfrak{u}_2)\, \mathfrak{u}_2 \subseteqq \mathfrak{u}_2 \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_2.$$

Im Fall $s > 2$ führt ein einfacher Induktionsschluß zum Ziel.

Eine Anwendung der Hilfssätze 2 und 3 auf die Ideale $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$ liefert $\mathfrak{m} \subseteqq \mathfrak{q}_1 \frown \ldots \frown \mathfrak{q}_s \subseteqq \sum\limits_{\pi} \mathfrak{q}_{\pi(1)} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{q}_{\pi(s)} \subseteqq \mathfrak{m}$, also

$$\mathfrak{q}_1 \frown \ldots \frown \mathfrak{q}_s = \mathfrak{m}. \tag{3}$$

(3) ist offenbar eine minimale Darstellung von $\mathfrak{m}$ als direkter Durchschnitt primärer Linksideale. Alle übrigen entstehen aus (3), wenn man die Durchschnitte $\mathfrak{q}_1 e^* \frown \ldots \frown \mathfrak{q}_s e^*$ bildet, wo e^* alle zu $\mathfrak{m}$ teilerfremden Elemente des Ringes $\mathfrak{o}^* = \mathfrak{o}$ durchläuft. Nach Definition sind die $\mathfrak{q}$ alle zweiseitig; infolgedessen wird $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_1 e^*, \ldots, \mathfrak{q}_s = \mathfrak{q}_s e^*$. Es gibt also nur eine eindeutig bestimmte minimale direkte Primärkomponentenzerlegung von $\mathfrak{m}$, q. e. d.

II. *Umgekehrt ist die Bedingung des Satzes 6 auch notwendig:* Wenn $\mathfrak{m}$ nur eine einzige minimale Darstellung

$$\mathfrak{m} = (\mathfrak{q}_1| \frown \ldots \frown (\mathfrak{q}_s| \tag{4}$$

als direkter Durchschnitt primärer Linksideale zuläßt, so sind alle zweiseitigen Primteiler von $\mathfrak{m}$ modulo $\mathfrak{m}$ vertauschbar.

Ich zeige zunächst, daß die Komponenten der Zerlegung (4) alle zweiseitig sein müssen. Dies ergibt sich leicht aus

Hilfssatz 4: Werden bei einer direkten Produktzerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_n$ einer Abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ alle Faktoren von den eigentlichen Automorphismen von $\mathfrak{G}$ auf sich abgebildet, dann werden diese Faktoren von einem beliebigen Automorphismus von $\mathfrak{G}$ auf eine Untergruppe von sich abgebildet. In diesem Satz werden für $\mathfrak{G}$ keine Endlichkeitsbedingungen vorausgesetzt.

Beweis: Θ sei irgendein Automorphismus und H_i derjenige Automorphismus von $\mathfrak{G}$, bei dem jedem Element A von $\mathfrak{G}$ die $\mathfrak{H}_i$-Komponente von A zugeordnet ist. Es gilt dann bekanntlich $H_1 + \ldots + H_n = P_1$ (P_1 = identischer Automorphismus von $\mathfrak{G}$) und für $i \neq j$ $H_i H_j = P_0$ (P_0 = Nullautomorphismus von $\mathfrak{G}$). Hieraus folgt $\Theta = \sum\limits_{i,j=1}^{n} H_i \Theta H_j$. Für $i \neq j$ ist $H_i \Theta H_j = P_0$; denn sonst wäre $H_i \Theta H_j + P_1$ wegen $(H_i \Theta H_j + P_1) \cdot (-H_i \Theta H_j + P_1) = P_1$ ein eigentlicher Automorphismus von $\mathfrak{G}$, der $\mathfrak{H}_i$ nicht auf sich abbildet, was der Voraussetzung widerspricht. Daher ist $\Theta = \sum\limits_{i=1}^{n} H_i \Theta H_i$ und $\mathfrak{H}_i \Theta = \mathfrak{H}_i H_i \Theta H_i \subseteqq \mathfrak{H}_i$.

Ich wende Hilfssatz 4 auf diejenige direkte Summenzerlegung des Restklassenmoduls $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ an, die der direkten Durchschnittsdarstellung (4) entspricht. Die Summanden dieser direkten Summe gehen bei rechts-

seitiger Multiplikation mit einer Einheit des Restklassenringes $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ in sich über, da dies — wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung (4) — für die Ideale $(\mathfrak{q}_\sigma|$ gilt. Nach Hilfssatz 4 gehen also diese Summanden bei rechtsseitiger Multiplikation mit einem beliebigen Element des Restklassenringes $\mathfrak{o}\,\mathfrak{m}$ in eine Untermenge von sich über, das gleiche muß daher auch für die Ideale $(\mathfrak{q}_\sigma|$ gelten. Dies geht aber nur, wenn die Ideale $(\mathfrak{q}_\sigma|$ zweiseitig sind. Für $(\mathfrak{q}_\sigma|$ schreibe ich jetzt einfach $\mathfrak{q}_\sigma$.

Unser nächstes Ziel ist der Nachweis, daß die Ideale $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$ modulo $\mathfrak{m}$ vertauschbar sind; wir benutzen dabei:

Hilfssatz 5: Sind die zweiseitigen Ideale $\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_s$ paarweise teilerfremd, so sind zweiseitige Ideale $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$, die modulo $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2, \ldots$ und $\mathfrak{w}_s$ vertauschbar sind, auch modulo dem Durchschnitt $\mathfrak{w}_1 \frown \mathfrak{w}_2 \frown \ldots \frown \mathfrak{w}_s$ vertauschbar.

Beweis: Wegen $\mathfrak{w}_1 \frown \ldots \frown \mathfrak{w}_s = (((\mathfrak{w}_1 \frown \mathfrak{w}_2) \frown \mathfrak{w}_3) \frown \mathfrak{w}_4) \frown \ldots$ genügt es, sich auf den Fall $s = 2$ zu beschränken. Nach Voraussetzung ist

$$\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{u}\mathfrak{v} = \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{v}\mathfrak{u}, \qquad \mathfrak{w}_2 + \mathfrak{u}\mathfrak{v} = \mathfrak{w}_2 + \mathfrak{v}\mathfrak{u},$$

also auch

$$\mathfrak{w}_2\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2\mathfrak{u}\mathfrak{v} = \mathfrak{w}_2\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2\mathfrak{v}\mathfrak{u}$$
$$\mathfrak{w}_1\mathfrak{w}_2 + \mathfrak{w}_1\mathfrak{u}\mathfrak{v} = \mathfrak{w}_1\mathfrak{w}_2 + \mathfrak{w}_1\mathfrak{v}\mathfrak{u}.$$

Addition führt (nach Hilfssatz 3) zu

$$\mathfrak{w}_1 \frown \mathfrak{w}_2 + \mathfrak{u}\mathfrak{v} = \mathfrak{w}_1 \frown \mathfrak{w}_2 + \mathfrak{v}\mathfrak{u}.$$

Setzt man $\mathfrak{w}_1 = \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{w}_s = \mathfrak{q}_s$, $\mathfrak{u} = \mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{v} = \mathfrak{q}_j$, so ergibt sich die behauptete Vertauschbarkeit der $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$ modulo $\mathfrak{m}$ als Spezialfall des Hilfssatzes 5; denn es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_\sigma + \mathfrak{q}_i\mathfrak{q}_j &= \mathfrak{q}_\sigma + (\mathfrak{q}_i + \mathfrak{q}_\sigma)(\mathfrak{q}_j + \mathfrak{q}_\sigma) = \mathfrak{q}_\sigma \\ &= \mathfrak{q}_\sigma + (\mathfrak{q}_j + \mathfrak{q}_\sigma)(\mathfrak{q}_i + \mathfrak{q}_\sigma) = \mathfrak{q}_\sigma + \mathfrak{q}_j\mathfrak{q}_i \\ &\quad \text{für } \sigma = i \textit{ oder } \sigma = j, \\ \mathfrak{q}_\sigma + \mathfrak{q}_i\mathfrak{q}_j &= \mathfrak{q}_\sigma + (\mathfrak{q}_i + \mathfrak{q}_\sigma)(\mathfrak{q}_j + \mathfrak{q}_\sigma) = \mathfrak{o} \\ &= \mathfrak{q}_\sigma + (\mathfrak{q}_j + \mathfrak{q}_\sigma)(\mathfrak{q}_i + \mathfrak{q}_\sigma) = \mathfrak{q}_\sigma + \mathfrak{q}_j\mathfrak{q}_i \\ &\quad \text{für } \sigma \neq i \textit{ und } \sigma \neq j. \end{aligned}$$

Ich zeige jetzt, daß — im Fall $i \neq j$ — sogar jeder zweiseitige Teiler von $\mathfrak{q}_i$ mit jedem zweiseitigen Teiler von $\mathfrak{q}_j$ modulo $\mathfrak{m}$ vertauschbar ist. Hierzu benötige ich eine weitere Reihe von Hilfssätzen.

Hilfssatz 6: $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ seien zwei teilerfremde, zweiseitige Ideale. Gilt für mindestens ein der Bedingung

$$u + v = 1, \quad u \in \mathfrak{u}, \quad v \in \mathfrak{v}$$

genügendes Elementepaar u, v

$$v \cdot \mathfrak{o} \cdot u \subseteqq \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v}, \quad \text{d. h. } v \cdot c \cdot u \in \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v} \text{ für jedes } c \in \mathfrak{o},$$

so wird

$$\mathfrak{u} \frown \mathfrak{v} = \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v}.$$

Beweis: Zunächst beweise ich $\mathfrak{o}u + \mathfrak{u}\mathfrak{v} = \mathfrak{u}$, $\mathfrak{o}v + \mathfrak{u}\mathfrak{v} = \mathfrak{v}$. Sicherlich ist

$$(5) \qquad \mathfrak{o}u + \mathfrak{u}\mathfrak{v} \subseteqq \mathfrak{u}, \qquad \mathfrak{o}v + \mathfrak{u}\mathfrak{v} \subseteqq \mathfrak{v}.$$

Andererseits gilt für jedes $u' \in \mathfrak{u}$, $v' \in \mathfrak{v}$

$$(6) \qquad u'u + u'v = u', \qquad v'u + v'v = v',$$

woraus unmittelbar $\mathfrak{o}u + \mathfrak{u}\mathfrak{v} \supseteqq \mathfrak{u}$, also $\mathfrak{o}u + \mathfrak{u}\mathfrak{v} = \mathfrak{u}$ folgt. Nun ist

$$\begin{aligned} v'u &= (u+v)v'u = uv'u + vv'u \\ uv' &= uv'(u+v) = uv'u + uv'v \\ \hline v'u &= vv'u - uv'v + uv' \in \mathfrak{u}\mathfrak{v}, \end{aligned}$$

da nach Voraussetzung $vv'u \in \mathfrak{u}\mathfrak{v}$. Nach (6) wird

$$v' = (vv'u - uv'v + uv') + v'v,$$

also

$$\mathfrak{v} \subseteqq \mathfrak{u}\mathfrak{v} + \mathfrak{o}v,$$

was mit (5) zusammen $\mathfrak{v} = \mathfrak{u}\mathfrak{v} + \mathfrak{o}v$ ergibt.

Aus Hilfssatz 3 und der Voraussetzung $v\mathfrak{o}u \subseteqq \mathfrak{u}\mathfrak{v}$ folgt jetzt

$$\mathfrak{u}\mathfrak{v} \subseteqq \mathfrak{u} \frown \mathfrak{v} = (\mathfrak{o}u + \mathfrak{u}\mathfrak{v})(\mathfrak{o}v + \mathfrak{u}\mathfrak{v}) + (\mathfrak{o}v + \mathfrak{u}\mathfrak{v})(\mathfrak{o}u + \mathfrak{u}\mathfrak{v}) \subseteqq \mathfrak{u}\mathfrak{v},$$

das heißt

$$\mathfrak{u}\mathfrak{v} = \mathfrak{u} \frown \mathfrak{v},$$

q. e. d.

Hilfssatz 7: Zwei teilerfremde zweiseitige Ideale $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ sind stets dann und nur dann (im gewöhnlichen Sinne) vertauschbar, falls für mindestens ein (und damit für jedes) der Bedingung $u + v = 1$, $u \in \mathfrak{u}$, $v \in \mathfrak{v}$ genügendes Elementepaar u, v: $u\mathfrak{o}v \subseteqq \mathfrak{v}\mathfrak{u}$, $v\mathfrak{o}u \subseteqq \mathfrak{u}\mathfrak{v}$ gilt.

Beweis: a) Ist $\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v} = \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{u}$, so wird nach Hilfssatz 3:

$$\mathfrak{u} \frown \mathfrak{v} = \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v} = \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{u} \quad \text{und daher} \quad u \cdot \mathfrak{o} \cdot v \subseteqq \mathfrak{u} \frown \mathfrak{v} = \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{u},$$

und ebenso $v \cdot \mathfrak{o} \cdot u \subseteqq \mathfrak{u} \frown \mathfrak{v} = \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v}$.

b) Wird $u \cdot \mathfrak{o} \cdot v \subseteqq \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{u}$, $v \cdot \mathfrak{o} \cdot u \subseteqq \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v}$ vorausgesetzt, so gilt nach Hilfssatz 6: $\mathfrak{u} \frown \mathfrak{v} = \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v}$, $\mathfrak{u} \frown \mathfrak{v} = \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{u}$ also auch $\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v} = \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{u}$.

Hilfssatz 8: *Sind zwei teilerfremde zweiseitige Ideale* $\mathfrak{u}$ *und* $\mathfrak{v}$ *vertauschbar, so ist auch jeder zweiseitige Teiler von* $\mathfrak{u}$ *mit jedem zweiseitigen Teiler von* $\mathfrak{v}$ *vertauschbar.*

Beweis folgt leicht aus Hilfssatz 7.

$\mathfrak{w}$ sei jetzt irgendein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{o}$. Geht man von $\mathfrak{o}$ zum Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$, von den Idealen $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ zu den ihnen in $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ entsprechenden Idealen über, so erschließt man aus Hilfssatz 8 mühelos

Hilfssatz 9: Sind zwei *teilerfremde* zweiseitige Ideale $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ modulo einem dritten zweiseitigen Ideal $\mathfrak{w}$ vertauschbar, so ist auch jeder

zweiseitige Teiler von $\mathfrak{u}$ mit jedem zweiseitigen Teiler von $\mathfrak{v}$ modulo $\mathfrak{w}$ vertauschbar.

Setzt man $\mathfrak{u} = \mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{v} = \mathfrak{q}_j$, $\mathfrak{w} = \mathfrak{m}$, so erkennt man nach Hilfssatz 9, daß in der Tat jeder zweiseitige Teiler von $\mathfrak{q}_i$ mit jedem zweiseitigen Teiler von $\mathfrak{q}_j$ modulo $\mathfrak{m}$ vertauschbar ist, was ich beweisen wollte; damit ist aber die Notwendigkeit der Bedingung des Satzes 6 bewiesen; denn jeder zweiseitige Primteiler von $\mathfrak{m}$ geht in *genau* einem $\mathfrak{q}$ auf.

Aus dem Beweis des Satzes 6 ergibt sich noch:

Satz 6a: Die Bedingung des Satzes 6 ist zugleich notwendig und hinreichend dafür, daß $\mathfrak{m}$ eine Darstellung als direkter Durchschnitt *zweiseitiger* Primärideale zuläßt. Diese ist mit der nach Satz 6 eindeutig bestimmten minimalen Darstellung als direkter Durchschnitt links- bzw. rechtsseitiger Primärideale identisch und daher selber eindeutig bestimmt.

Ich kehre nun wieder zu dem Linksideal $(\mathfrak{a}|$ zurück, von dem ich voraussetzte, daß für die linksseitigen Oberideale von $(\mathfrak{a}|$ der Doppelkettensatz erfüllt sei.

Satz 5e: $(\mathfrak{a}|$ *gestattet stets dann und nur dann eine einzige minimale Darstellung als direkter Durchschnitt primärer Linksideale, wenn* alle in $(\mathfrak{a}|$ aufgehenden zweiseitigen Primideale des Eigenringes $\mathfrak{o}^*$ modulo $(\mathfrak{a}|$ vertauschbar, d. h. *alle zweiseitigen Primideale des Restklassenringes* $\mathfrak{o}^*/(\mathfrak{a}|$ im gewöhnlichen Sinne (modulo Null) *vertauschbar sind.*

Beweis: Nach Satz 6 ist die angegebene Bedingung notwendig und hinreichend dafür, daß $(\mathfrak{a}|$ im Eigenring $\mathfrak{o}^*$ eine eindeutig bestimmte Minimaldarstellung als direkter Durchschnitt primärer Linksideale besitzt. Hieraus folgt die Behauptung, wenn man neben der bekannten Beziehung zwischen direkter Summe und direktem Durchschnitt den aus Satz 1 folgenden Zusammenhang zwischen den direkten Summenzerlegungen des Restklassenmoduls $\mathfrak{o}/(\mathfrak{a}|$ und denen des Restklassenringes $\mathfrak{o}^*/(\mathfrak{a}|$ heranzieht[22a]).

Satz 5f: $(\mathfrak{a}|$ *gestattet stets dann und nur dann eine einzige maximale Darstellung als direkter Durchschnitt primärer Linksideale:*

$$(\mathfrak{a}| = (\mathfrak{k}_1| \frown \ldots \frown (\mathfrak{k}_l|, \tag{7}$$

wenn alle in $(\mathfrak{a}|$ *aufgehenden zweiseitigen Primideale des Eigenringes* $\mathfrak{o}^*$ ***vollständig prim*** *sind* (die Kapazität 1 haben) *und im übrigen der Bedingung des Satzes* 5e *genügen* (modulo $(\mathfrak{a}|$ vertauschbar sind).

Beweis: Die Eindeutigkeit der Zerlegung (7) bedingt Eindeutigkeit der direkten Summenzerlegung des Restklassenmoduls $\mathfrak{o}/(\mathfrak{a}|$ in direkt unzerlegbare Summanden. Letztere besteht dann und nur dann, wenn alle direkten Summanden von $\mathfrak{o}/(\mathfrak{a}|$ charakteristisch sind.

22a) Vgl. Zusatz 2 am Schluß der Arbeit.

Hieraus folgt, daß verschiedene Komponenten der Darstellung (7) nicht gleichartig sein können, da sonst in der der Darstellung (7) entsprechenden direkten Summenzerlegung des Moduls $\mathfrak{o}/(\mathfrak{a}|$ zwei Summanden isomorph, also gewiß nicht charakteristisch wären. Nach Satz 5b ergibt sich also aus der Eindeutigkeit von (7): $1 = l_1 = l_2 = \ldots$, d. h. daß jedes in $(\mathfrak{a}|$ aufgehende zweiseitige Primideal $\mathfrak{p}_\mu^*$ des Eigenringes $\mathfrak{o}^*$ die Kapazität $l_\mu = 1$ besitzt, also vollständig prim ist, und hieraus nach Satz 5d, daß die maximalen direkten Primärkomponentenzerlegungen mit den minimalen übereinstimmen, wodurch Satz 5f auf Satz 5e zurückgeführt ist.

Ich will jetzt noch die Aussagen des Satzes 6 in einigen Punkten ergänzen:

Satz 6b: Gilt die Bedingung des Satzes 6 in der scharfen Form, daß die zweiseitigen Primteiler $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ von $\mathfrak{m}$ nicht nur modulo $\mathfrak{m}$, sondern im gewöhnlichen Sinne (modulo Null) vertauschbar sind: $\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_j = \mathfrak{p}_j \mathfrak{p}_i$, dann sind die Komponenten $(\mathfrak{q}_1|, \ldots, (\mathfrak{q}_s|$ der nach Satz 6 eindeutig bestimmten minimalen Darstellung von $\mathfrak{m}$ als direkter Durchschnitt primärer Linksideale nicht nur zweiseitig, sondern auch miteinander vertauschbar; ihr Durchschnitt ist also (nach Hilfssatz 3) mit ihrem Produkt identisch. *Aus der Vertauschbarkeit der $\mathfrak{p}$ folgt also, daß $\mathfrak{m}$ sich eindeutig in das Produkt zweiseitiger Primärideale zerlegen läßt, die paarweise teilerfremd und vertauschbar sind. Umgekehrt ist für die Möglichkeit einer Zerlegung dieser Art die Vertauschbarkeit der $\mathfrak{p}$ notwendig* (auch dann, wenn man Eindeutigkeit nicht verlangt. die immer von selbst erfüllt ist).

Beweis: Sind die $\mathfrak{p}$ vertauschbar, so erhält man die Komponenten $(\mathfrak{q}|$ auf Grund der beim Beweis des Satzes 6 durchgeführten Überlegung, indem man — unter ϱ eine hinreichend große natürliche Zahl verstanden — die Ideale $\mathfrak{p}_1^\varrho + \mathfrak{m}, \ldots, \mathfrak{p}_s^\varrho + \mathfrak{m}$ bildet. Diese Ideale sind zweiseitig und nach Hilfssatz 8 miteinander vertauschbar. Ihr Durchschnitt stimmt nach Hilfssatz 3 mit ihrem Produkt überein.

Liegt umgekehrt irgendeine Zerlegung von $\mathfrak{m}$ in das Produkt vertauschbarer, teilerfremder, zweiseitiger Primärideale $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$ vor, so sind nach Hilfssatz 8 auch alle zweiseitigen Primteiler $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ von $\mathfrak{m}$ vertauschbar, da jedes $\mathfrak{p}$ in *genau* einem $\mathfrak{q}$ aufgeht.

Satz 6c: $\mathfrak{K}$ sei eine multiplikativ abgeschlossene Menge zweiseitiger Ideale von $\mathfrak{o}$, die alle die Eigenschaft (E) besitzen; außerdem enthalte $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{a}$ auch jeden zweiseitigen Teiler von $\mathfrak{a}$. *Damit jedes Ideal der Menge $\mathfrak{K}$ nur eine einzige minimale Darstellung als direkter Durchschnitt primärer Links- (bzw. Rechts-) ideale zuläßt, ist notwendig und hinreichend, daß alle Primideale der Menge $\mathfrak{K}$ miteinander vertauschbar sind. Nach Satz* 6b *ist dies zugleich das notwendige und hinreichende Kriterium dafür, daß alle*

Ideale der Menge $\mathfrak{R}$ sich in das Produkt zweiseitiger Primärideale zerlegen lassen, die 1. teilerfremd, 2. vertauschbar sind.

Beweis: Daß die Bedingung hinreicht, besagt Satz 6. Die Notwendigkeit der Bedingung ergibt sich, wenn man das zu $\mathfrak{R}$ gehörige Ideal $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_j \mathfrak{p}_i$ betrachtet, wo $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j$ irgend zwei von einander verschiedene Primideale der Menge $\mathfrak{R}$ bedeuten. Nach Satz 6 müssen $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_j$ modulo $\mathfrak{m}$ vertauschbar sein: $\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_j + \mathfrak{m} = \mathfrak{p}_j \mathfrak{p}_i + \mathfrak{m}$. Dies ist aber, wegen $\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_j + \mathfrak{m} = \mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_j$, $\mathfrak{p}_j \mathfrak{p}_i + \mathfrak{m} = \mathfrak{p}_j \mathfrak{p}_i$ mit $\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_j = \mathfrak{p}_j \mathfrak{p}_i$ äquivalent.

Satz 6c gibt Aufschluß darüber, wann im Nichtkommutativen die vom Kommutativen her geläufigen Verhältnisse[23]) vorliegen. In der hyperkomplexen Arithmetik führt dies zu interessanten Ergebnissen:

Ist $\mathfrak{o}$ Ordnung einer einfachen rationalen Algebra A, dann sind die Forderungen, die wir in Satz 6c für $\mathfrak{R}$ stellten, für die Menge aller zweiseitigen Ideale erfüllt. (Das Nullideal ist dabei — wie allgemein üblich — auszuschließen.) Nach Satz 6c sind offenbar diejenigen Ordnungen von A besonders interessant, in denen alle zweiseitigen Primideale vertauschbar sind, da in ihnen der im Kommutativen von Dedekind[24]) aufgestellte Satz von der eindeutigen Darstellbarkeit aller zweiseitigen Ideale als Produkt teilerfremder und vertauschbarer Primärideale uneingeschränkt gilt. Hierzu gehören zunächst die maximalen Ordnungen von A, weiter gehören — nach der Theorie der „regulären" Ideale — alle Ordnungen dazu, deren „Führer" nur durch ein einziges (zweiseitiges) Primideal teilbar sind (Beispiel: Gruppenring einer p-Gruppe mit ganzrationalen Koeffizienten). Satz 6c gewinnt durch die Feststellung an Bedeutung, daß die Vertauschbarkeit der zweiseitigen Primideale — auch im Nichtkommutativen — noch in *zahlreichen nicht maximalen* Ordnungen erfüllt ist, deren „Führer" durch beliebig viele zweiseitige Primideale teilbar sind. Der Beweis für diese Behauptung läßt sich durch $\mathfrak{p}$-adisch konstruierte Beispiele leicht erbringen: Ist A an der Stelle $\mathfrak{p}$ des Zentrums voller Matrizenring vom Grade k über dem Körper $K_\mathfrak{p}$, so wähle man die Ordnung so, daß sie an der Stelle $\mathfrak{p}$ voller Matrizenring vom Grade k über einer Ordnung des Körpers $K_\mathfrak{p}$ wird, die für endlich viele $\mathfrak{p}$ *nicht* maximal sein möge. Umgekehrt kann $\mathfrak{p}$-adisch mühelos bestätigt werden, daß die Vertauschbarkeit aller zweiseitigen Primideale nicht in allen Ordnungen von A zu gelten braucht; als Vorbild mag dabei folgendes Beispiel im Großen dienen: $\mathfrak{o}$ sei der Ring aller Matrizen $\begin{pmatrix} \alpha & p\beta \\ p\gamma & \delta \end{pmatrix}$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganzrationale Zahlen bedeuten und p eine

[23]) v. d. W. 2, § 86, S. 48—50.

[24]) Dedekind, Ges. Werke, Bd III, S. 303 ff.

feste ganzrationale Primzahl ist. Die beiden Primidale $\mathfrak{p}_1 = \begin{pmatrix} p\alpha & p\beta \\ p\gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\mathfrak{p}_2 = \begin{pmatrix} \alpha & p\beta \\ p\gamma & p\delta \end{pmatrix}$ sind nicht vertauschbar.

Ich kehre noch einmal zu dem allgemeinen Fall eines beliebigen Ringes $\mathfrak{o}$ zurück. Zum Schluß möchte ich noch darauf hinweisen, daß die beim Beweis des Satzes 6 benutzten Methoden weiter reichen und auch auf den Fall eines *beliebigen* zweiseitigen Ideals $\mathfrak{m}$ mit der Eigenschaft (E) (dessen Primteiler nicht der Bedingung des Satzes 6 zu genügen brauchen) angewandt werden können. Sie führen dann ebenfalls zu Zerlegungen in teilerfremde, zweiseitige Komponenten mit einer gewissen Unzerlegbarkeitseigenschaft, die aber im allgemeinen nicht mehr primär sind (wegen des Satzes 6a). Ich will auf diese Zerlegungen hier auch noch kurz eingehen, da — wie gesagt — wesentlich neue Überlegungen dabei nicht notwendig sind. Als Hilfsmittel benutze ich:

Satz 7: $\mathfrak{w}$ sei ein festgewähltes zweiseitiges Ideal des Ringes $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{S}$ irgendeine Menge zweiseitiger Ideale von $\mathfrak{o}$. $\mathfrak{S}$ läßt sich stets eindeutig derart in Teilsysteme einteilen, daß Ideale, die verschiedenen Teilsystemen angehören, modulo $\mathfrak{w}$ vertauschbar sind, und jedes Teilsystem im selben Sinne nicht weiter zerlegt werden kann.

Beweis: Stellt man jedes Ideal der Menge durch einen Punkt dar, und verbindet man zwei dieser Punkte, wenn die ihnen entsprechenden Ideale modulo $\mathfrak{w}$ nicht vertauschbar sind, dann ist Satz 7 einfach die Übersetzung der unmittelbar evidenten Tatsache, daß das entstandene Liniensystem (Graph) *eindeutig* in zusammenhängende Liniensysteme zerfällt, die zu je zweien nicht mehr zusammenhängen[25]).

Satz 8: $\mathfrak{m}$ sei ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{o}$ mit der Eigenschaft (E) und $\mathfrak{w}$ irgendein zweiseitiges Unterideal (Vielfaches) von $\mathfrak{m}$, das nicht die Eigenschaft (E) zu haben braucht. $\mathfrak{m}$ *läßt sich stets eindeutig als direkter Durchschnitt von solchen zweiseitigen Idealen* $\mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_k$ *darstellen, die modulo* $\mathfrak{w}$ *vertauschbar sind und im Sinne dieses Satzes nicht weiter zerlegt werden können.* Bezeichnet $\mathfrak{S}$ das System der zweiseitigen Primteiler vom $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{S}_x$ das System der zweiseitigen Primteiler von $\mathfrak{u}_x$, so ist $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \ldots + \mathfrak{S}_k$ die Einteilung von $\mathfrak{S}$ im Sinne des Satzes 7. Die Anzahl k der auftretenden Komponenten $\mathfrak{u}$ und die Verteilung der zweiseitigen Primteiler von $\mathfrak{m}$ auf die einzelnen Komponenten hängt also nicht von $\mathfrak{m}$, sondern nur von $\mathfrak{S}$ ab: *Sind zwei zweiseitige Teiler* $\mathfrak{m}$ *und* $\mathfrak{m}'$ *von* $\mathfrak{w}$, *die beide die Eigenschaft* (E) *haben, durch dieselben zweiseitigen Primideale teilbar, so zerfallen sie im Sinne dieses Satzes in gleichviel*

[25]) Den Beweis des Satzes 7 verdanke ich Herrn v. d. Waerden.

Komponenten, außerdem lassen sich die Komponenten der Zerlegung von $\mathfrak{m}$ *denen der Zerlegung von* $\mathfrak{m}'$ *umkehrbar eindeutig so zuordnen, daß in entsprechenden Idealen dieselben zweiseitigen Primideale aufgehen.* Unzerlegbar im Sinne dieses Satzes ist $\mathfrak{m}$ stets dann und nur dann, wenn das System seiner zweiseitigen Primteiler im Sinne des Satzes 7 unzerlegbar ist.

Beweis: Bis auf die Eindeutigkeitsbehauptung ergeben sich alle Aussagen des Satzes 8 mühelos aus Satz 7 und den Hilfssätzen 1, 2, 3 und 9, wenn man die im ersten Teil des Beweises von Satz 6 durchgeführten Überlegungen auf den allgemeinen Fall eines beliebigen $\mathfrak{m}$ überträgt; eine kleine Schwierigkeit bietet dabei vielleicht noch die richtige Zusammenfassung der Faktoren auf der linken Seite der Beziehung (1) (von der man natürlich wieder auszugehen hat): Nach Hilfssatz 2 lassen sich die Faktoren dieses Produktes — *ohne die Teilbarkeit durch* $\mathfrak{m}$ *aufzuheben* — derart umordnen, daß das neue Produkt $\underbrace{\mathfrak{p}_{\sigma_1}\mathfrak{p}_{\sigma_2}\dots}\;\dots\;\underbrace{\dots\mathfrak{p}_{\sigma_{s_\varrho}}}$

so, wie es die Haken andeuten, in „Abschnitte" zerfällt, von denen der x-te nur Ideale des Systems $\mathfrak{S}_x$ enthält. Nennt man das Produkt der Ideale des x-ten Abschnittes $\mathfrak{v}_x$, dann gilt $\mathfrak{v}_{\pi(1)}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{v}_{\pi(k)}\subseteq\mathfrak{m}$, wo π irgendeine Permutation der Indizes $1, 2, \ldots, k$ bedeutet. Hieraus folgt nach Hilfssatz 3 die Existenzbehauptung des Satzes 8, wenn man

$$\mathfrak{u}_1=\mathfrak{v}_1+\mathfrak{m},\ldots,\mathfrak{u}_k=\mathfrak{v}_k+\mathfrak{m}$$

setzt.

Um noch die Eindeutigkeit zu beweisen, nehmen wir an, es gäbe zwei Zerlegungen im Sinne des Satzes 8: $\mathfrak{u}_1\cap\ldots\cap\mathfrak{u}_k=\mathfrak{u}'_1\cap\ldots\cap\mathfrak{u}'_{k'}$. Mit Hilfe des Satzes 7 überlege man sich zunächst, daß die $\mathfrak{u}$ sich den $\mathfrak{u}'$ umkehrbar eindeutig zuordnen lassen müssen, derart, daß entsprechende Ideale durch dieselben zweiseitigen Primideale teilbar sind; die genaue Durchführung des Schlusses überlasse ich dem Leser. Die Numerierung der $\mathfrak{u}'$ sei so gewählt, daß gerade $\mathfrak{u}_x$ und $\mathfrak{u}'_x$ dieselben (zweiseitigen) Primteiler besitzen.

Nach Hilfssatz 3 wird:

$$\sum_\pi \mathfrak{u}_{\pi(1)}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{u}_{\pi(k)}=\mathfrak{u}_1\cap\ldots\cap\mathfrak{u}_k=\mathfrak{u}'_1\cap\ldots\cap\mathfrak{u}'_k=\sum_\pi \mathfrak{u}'_{\pi(1)}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{u}'_{\pi(k)},$$

also

$$\begin{aligned}\mathfrak{u}_x+\sum_\pi \mathfrak{u}_{\pi(1)}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{u}_{\pi(k)}&=\mathfrak{u}_x+\sum_\pi(\mathfrak{u}_{\pi(1)}+\mathfrak{u}_x)\cdot\ldots\cdot(\mathfrak{u}_{\pi(k)}+\mathfrak{u}_x)\\=\mathfrak{u}_x+\sum_\pi \mathfrak{u}'_{\pi(1)}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{u}'_{\pi(k)}&=\mathfrak{u}_x+\sum_\pi(\mathfrak{u}'_{\pi(1)}+\mathfrak{u}_x)\cdot\ldots\cdot(\mathfrak{u}'_{\pi(k)}+\mathfrak{u}_x),\end{aligned}$$

woraus $\mathfrak{u}_x=\mathfrak{u}_x+\mathfrak{u}'_x$, also $\mathfrak{u}_x\subseteq\mathfrak{u}'_x$ folgt. Aus Symmetriegründen ist ebenso $\mathfrak{u}'_x\subseteq\mathfrak{u}_x$ und damit $\mathfrak{u}_x=\mathfrak{u}'_x$ bewiesen.

In Satz 8 *sind namentlich die beiden Extremfälle* $\mathfrak{w}=$ *Nullideal,* $\mathfrak{w}=\mathfrak{m}$ *interessant:*

Satz 8a: Im Fall $\mathfrak{w}$ = Nullideal geht die direkte Durchschnittsdarstellung des Satzes 8 (nach Hilfssatz 3) in eine *eindeutig bestimmte* Produktzerlegung in zweiseitige Faktoren über, die 1. paarweise teilerfremd, 2. miteinander vertauschbar sind und 3. selber nicht mehr als Produkt zweiseitiger, teilerfremder, vertauschbarer Ideale $\neq \mathfrak{o}$ dargestellt werden können.

Satz 8b: Stimmt $\mathfrak{w}$ mit dem zu zerlegenden Ideal $\mathfrak{m}$ überein, so ergibt sich aus Satz 8 als Spezialfall die bekannte eindeutig bestimmte Darstellung von $\mathfrak{m}$ als direkter Durchschnitt zweiseitiger und zweiseitig-teilerfremd-irreduzibeler Komponenten; zweiseitig-teilerfremd-irreduzibel heißt dabei ein zweiseitiges Ideal, wenn es sich nicht als direkter Durchschnitt zweiseitiger Ideale $\neq \mathfrak{o}$ darstellen läßt. Für das Ideal $\mathfrak{m}$ ist das also dann und nur dann der Fall, wenn das System seiner zweiseitigen Primteiler im Sinne des Satzes 7 unzerlegbar ist, wobei $\mathfrak{w} = \mathfrak{m}$ zu setzen ist.

Beweis: beruht darauf, daß paarweise teilerfremde, zweiseitige Ideale modulo ihrem Durchschnitt immer vertauschbar sind, was aus Hilfssatz 5 leicht erschlossen werden kann (dieser Schluß wurde oben beim Beweis des Satzes 6 genau durchgeführt).

Satz 8c: Ist das Ideal $\mathfrak{m}$ durch das Quadrat seines Radikals $\mathfrak{c}$ teilbar, so fallen die Zerlegungen der Sätze 8, 8a, 8b zusammen: $\mathfrak{m}$ ist dann also das Produkt seiner zweiseitigen und zweiseitig-teilerfremd-irreduzibelen Komponenten, die im Fall $\mathfrak{m} \subseteqq \mathfrak{c}^2$ miteinander vertauschbar sind.

Beweis: Für zwei zweiseitige Primteiler $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_j$ von $\mathfrak{m}$ gilt offensichtlich:

$$\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_j \supseteqq \mathfrak{c}^2 \supseteqq \mathfrak{m} \supseteqq \mathfrak{w}, \quad \mathfrak{p}_j \mathfrak{p}_i \supseteqq \mathfrak{c}^2 \supseteqq \mathfrak{m} \supseteqq \mathfrak{w}.$$

Darum ist $\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_j + \mathfrak{w} = \mathfrak{p}_j \mathfrak{p}_i + \mathfrak{w}$ mit $\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_j = \mathfrak{p}_j \mathfrak{p}_i$ äquivalent. Die Bedingung $\mathfrak{m} \subseteqq \mathfrak{c}^2$ ist übrigens für das Bestehen des Satzes 8c nur hinreichend, nicht notwendig.

Zusätze bei der Korrektur [Dezember 1934].

1. Die unter 4 ausgesprochene Behauptung des Satzes 5b folgt aus Satz 13a der in Fußnote [8]) zitierten Arbeit (§ 17): Da der Restklassenring $\mathfrak{o}^*/\mathfrak{c}^*$ (wo $\mathfrak{c}^*$ das Radikal von $(\mathfrak{a}|$ bedeutet) in die direkte Summe zweiseitig einfacher Ringe zerfällt, ist $\mathfrak{c}^*$ direkter Durchschnitt zweiseitiger und zweiseitig teilerloser Ideale, die natürlich mit den zweiseitigen Primteilern $\mathfrak{p}^*$ von $(\mathfrak{a}|$ (aufgefaßt als Ideal des Ringes $\mathfrak{o}^*$) übereinstimmen müssen, so daß die einfachen Ringe, in deren direkte Summe sich $\mathfrak{o}^*/\mathfrak{c}^*$ zerlegen läßt, den $\mathfrak{p}^*$ umkehrbar eindeutig entsprechen und mit den m Restklassenringen $\mathfrak{o}^*/\mathfrak{p}_1^*, \ldots, \mathfrak{o}^*/\mathfrak{p}_m^*$ isomorph sind.

2. Zum Beweis des Satzes 5e: Jeder Darstellung von $(\mathfrak{a}|$ als direkter Durchschnitt von Linksidealen des Ringes $\mathfrak{o}^*$:

(1) $$(\mathfrak{a}| = (\mathfrak{q}_1^*| \frown \ldots \frown (\mathfrak{q}_m^*|$$

entspricht eine eindeutig bestimmte Zerlegung des Restklassenrings $\bar{\mathfrak{o}}^* = \mathfrak{o}^*/(\mathfrak{a}|$ in die direkte Summe von Linksidealen des Ringes $\bar{\mathfrak{o}}^*$:

(2) $$\bar{\mathfrak{o}}^* = \bar{\mathfrak{o}}^* \bar{e}_1^* + \ldots + \bar{\mathfrak{o}}^* \bar{e}_m^*.$$

Nach der Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen gehört zu (2) die Zerlegung

(3) $$\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{o}}\, \bar{e}_1^* + \ldots + \bar{\mathfrak{o}}\, \bar{e}_m^*$$

des Restklassenmoduls $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}/(\mathfrak{a}|$ in die direkte Summe linksseitiger Untermoduln von $\bar{\mathfrak{o}}$; denn $\bar{\mathfrak{o}}^*$ ist ja nach Satz 1 der Automorphismenring von $\bar{\mathfrak{o}}$. Der Zerlegung (3) entspricht schließlich wieder eine bestimmte Darstellung von $(\mathfrak{a}|$ als direkter Durchschnitt von Linksidealen des Ringes $\mathfrak{o}$:

(4) $$(\mathfrak{a}| = (\mathfrak{q}_1| \frown \ldots \frown (\mathfrak{q}_m|.$$

Aus dem umkehrbar eindeutigen Zusammenhang zwischen (1) und (4) folgt Satz 5e, weil $\mathfrak{o}^*/(\mathfrak{q}_\mu^*| \cong \bar{\mathfrak{o}}^* \bar{e}^*$ und $\mathfrak{o}/(\mathfrak{q}_\mu| \cong \bar{\mathfrak{o}}\, \bar{e}_\mu^*$ und daher sowohl der Automorphismenring von $\bar{\mathfrak{o}}^*/(\mathfrak{q}_\mu^*|$ wie der von $\mathfrak{o}/(\mathfrak{q}_\mu|$ mit $\bar{e}_\mu^* \bar{\mathfrak{o}}^* \bar{e}_\mu^*$ isomorph ist, so daß $(\mathfrak{q}_\mu^*|$ und $(\mathfrak{q}_\mu|$ immer beide gleichzeitig primär oder nichtprimär sind.

(Eingegangen am 20. 8. 1934.)

Konstruktion nichtrekursiver Funktionen.

Von

Rózsa Péter in Budapest.

Einleitung.

1. Unter *rekursiven Funktionen* werden diejenigen zahlentheoretischen Funktionen verstanden, die aus gewissen einfachen Ausgangsfunktionen durch eine endliche Kette von Substitutionen und Rekursionen entstehen. Als Ausgangsfunktionen wählt man zweckmäßig die Funktionen 0 und $n+1$, die schon bei Peano als die Grundbegriffe der Arithmetik dienen (auf die alle übrigen Begriffe zurückgeführt werden); bei verschiedener Wahl des Rekursionsbegriffes kann die Klasse der rekursiven Funktionen verschieden ausfallen.

Hilbert[1]) verwendet zu seinen Untersuchungen über das Kontinuumproblem das folgende Rekursionsschema, das ich als *eingeschachtelte Rekursion* bezeichnen werde:

$$\begin{cases} \varphi(0, a_1, a_2, \ldots, a_r) = \alpha(a_1, a_2, \ldots, a_r), \\ \varphi(n+1, a_1, a_2, \ldots, a_r) = \mathfrak{f}_{b_1 b_2 \ldots b_r}(n, a_1, a_2, \ldots, a_r, \varphi(n, b_1, b_2, \ldots, b_r)); \end{cases}$$

wobei der „Term" $\mathfrak{f}_{b_1 b_2 \ldots b_r}$ aus den Variablen $n, a_1, a_2, \ldots, a_r$, ferner gewissen schon eingeführten rekursiven Funktionen und der Funktion $\varphi(n, a_1, a_2, \ldots, a_r)$ — aufgefaßt nur als Funktion der Argumente $a_1, a_2, \ldots, a_r$, d. h. bei Festhaltung von n in der ersten Argumentstelle — durch Substitutionen aufgebaut ist[2]).

---

[1]) D. Hilbert, Über das Unendliche, Math. Annalen **95** (1925), S. 161—190. Daselbst erscheint dieser Rekursionsbegriff als Spezialfall (Rekursion erster Stufe) des allgemeinen Rekursionsbegriffes, bei dem nicht nur zahlentheoretische Funktionen (d. h. solche, deren Argumente und Werte natürliche Zahlen sind), sondern auch beliebige höhere Funktionentypen (Funktionsfunktionen, Funktionsfunktionsfunktionen usw.) durch Rekursion nach einer *Zahlenvariablen* definiert werden können. Ich beschränke mich in dieser Arbeit auf den einfachsten Funktionentyp, nämlich auf zahlentheoretische Funktionen.

[2]) Die Indizes $b_1, b_2, \ldots, b_r$ von $\mathfrak{f}$ weisen üblicherweise darauf hin, daß $\mathfrak{f}_{b_1 b_2 \ldots b_r}(n, a_1, a_2, \ldots, a_r, g(n, b_1, b_2, \ldots, b_r))$ von der Funktion g, und nicht von den Argumenten $b_1, b_2, \ldots, b_r$ abhängt; diese dienen vielmehr nur zur Numerierung der „freien" Leerstellen von g, die in $\mathfrak{f}$ durch Einsetzungen „gebunden" werden sollen.

Eine solche Rekursion ist z. B.

$$\begin{cases} \psi(0, a) = a + 1, \\ \psi(n+1, a) = 1 + \psi(n, \psi(n, n+a)). \end{cases}$$

Legt man jenes Rekursionsschema zugrunde, so ist also unter einer rekursiven Funktion eine zahlentheoretische Funktion zu verstehen, die aus den Ausgangsfunktionen 0 und $n+1$ durch eine endliche Kette von Substitutionen und eingeschachtelten Rekursionen aufgebaut werden kann. In diesem Sinne soll im folgenden der Ausdruck „rekursive Funktion" verstanden werden.

2. Es ist klar, daß es abzählbar viele rekursive Funktionen gibt, diese entstehen ja alle derart, daß man, ausgehend von einer endlichen Anzahl von Ausgangsfunktionen, eine endliche Anzahl von Substitutionen und Rekursionen durchführt. So kommt je eine endliche Anzahl solcher Funktionen zustande, bei denen die Gesamtzahl der zu ihnen führenden Substitutionen und Rekursionen 1, 2, 3, ... ist; und abzählbar mal endlich ist tatsächlich abzählbar. Demgegenüber bilden alle zahlentheoretischen Funktionen eine Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums. Es müssen also auch nichtrekursive zahlentheoretische Funktionen existieren.

Jedoch könnte man denken, daß man eine solche Funktion gar nicht effektiv angeben kann, oder, daß die Angabe solcher Funktionen Operationen ganz anderer Art erfordert, als die Rekursion.

3. Ackermann[3]) hat dagegen ein effektives Beispiel für eine nichtrekursive Funktion angegeben, die auf eine verhältnismäßig einfache Weise definiert wird: durch eine Rekursion, die gleichzeitig nach mehreren Variablen läuft. Eine solche Definition werde ich eine *mehrfache Rekursion* nennen.

Der Beweis von Ackermann kann wesentlich vereinfacht werden auf Grund der Tatsache, daß die eingeschachtelte Rekursion — wie ich in einer früheren Arbeit[4]) bewiesen habe — auf das speziellere Schema der „primitiven Rekursion" zurückführbar ist, so daß man sich, ohne die Klasse der rekursiven Funktionen einzuengen, darauf beschränken kann, statt der eingeschachtelten Rekursionen nur die viel einfacheren „primitiven Rekursionen" zu betrachten, sogar nur solche, bei denen die zu

---

[3]) W. Ackermann, Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen, Math. Annalen **99** (1928), S. 118—133.

[4]) R. Péter (Politzer), Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion, Math. Annalen **110** (1934), S. 612—632. Zitiert im folgenden als „I".

definierende Funktion *zweistellig* ist. Die allgemeine Form einer solchen *primitiven Rekursion* ist die folgende:

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi(0, a) = \alpha(a), \\ \varphi(n+1, a) = \beta(n, a, \varphi(n, a)), \end{cases}$$

wobei α und β schon eingeführte rekursive Funktionen sind.

4. Das Beispiel von Ackermann ist zugleich ein Beweis dafür, daß die mehrfache Rekursion aus der Klasse der rekursiven Funktionen hinausführt.

Für diese Tatsache gebe ich in dieser Arbeit zwei weitere Beweise. Der erste beruht auf dem klassischen Diagonalverfahren, indem ich zeigen werde, daß dieses, bei geeigneter Wahl der Anordnung der rekursiven Funktionen, ebenfalls zu einer solchen Funktion führt, die sich durch eine mehrfache Rekursion definieren läßt[5]). Der zweite ist eine Modifikation des Ackermannschen Beispiels, wobei die schon genannten Vereinfachungen vollzogen, und außerdem gewisse Unebenheiten, die im Beweise Ackermanns Schwierigkeiten verursachen, abgeglättet werden.

Der erste Beweis hat den Vorteil, daß der nichtrekursive Charakter der definierten Funktion ohne weiteres klar ist, so daß die einzige Schwierigkeit in der formalen Aufstellung der Definition liegt. Dagegen ist beim zweiten Beweis eben die Definition der Funktion sehr einfach, nur der Beweis, daß sie nichtrekursiv ist, erfordert hier eine eingehende, auf den Gedanken von Ackermann beruhende Überlegung.

5. Wie in meiner Arbeit „I", *setze ich* auch hier *keinerlei besondere Vorkenntnisse*, insbesondere nichts aus der mathematischen Logik, *voraus*. Auch die Kenntnis meiner Arbeit „I" wird im allgemeinen nicht vorausgesetzt. Ich werde außer der bereits erwähnten Zurückführbarkeit der eingeschachtelten Rekursionen auf primitive Rekursionen der Form (1),

---

[5]) Eine andere Abzählung der rekursiven Funktionen hat mir Herr Bernays freundlicherweise mitgeteilt. Bei dieser Abzählung läßt sich die abzählende Funktion (und damit auch die beim Diagonalverfahren entstehende Funktion) durch eine Rekursion zweiter Stufe im Sinne Hilberts definieren, nämlich durch eine Rekursion, bei der neben gewöhnlichen Zahlfunktionen auch die Funktionenfunktion $\varrho_{b,c,d}(g(b,c,d), a, m, n)$ auftritt, welche diejenige Funktion von m und n bezeichnet, die aus der Konstanten a und der Funktion $g(b,c,d)$ durch folgende primitive Rekursion entsteht:

$$\begin{cases} \varrho_{b,c,d}(g(b,c,d), a, m, 0) = a, \\ \varrho_{b,c,d}(g(b,c,d), a, m, n+1) = g(\varrho_{b,c,d}(g(b,c,d), a, m, n), m, n). \end{cases}$$

Der Gedanke in dieser Abzählung ist, daß die Rekursion als eine Substitution in ϱ aufgefaßt werden kann.

nur noch die (z. B. in „I“ bewiesene) Rekursivität der folgenden Funktionen benutzen:

$$n,\quad n+a,\quad n\cdot a,\quad a^n,$$

ferner

$$\operatorname{sg} n = \begin{cases} 0, \text{ falls } n = 0, \\ \text{sonst } 1; \end{cases}$$

$$\left[\frac{a}{n}\right] = \begin{cases} 0, \text{ falls } n = 0, \\ \text{sonst die größte ganze Zahl, die } \leqq \frac{a}{n}; \end{cases}$$

$$p_n = \begin{cases} 2, \text{ falls } n = 0, \\ \text{sonst die der Größe nach } n\text{-te ungerade Primzahl}; \end{cases}$$

$$\pi_n(a) = \begin{cases} 0, \text{ falls } a = 0, \\ \text{sonst der Exponent von } p_n \text{ in der Primfaktorenzerlegung von } a; \end{cases}$$

$$a \dot{-} b = \begin{cases} 0, \text{ falls } a \leqq b, \\ \text{sonst die Differenz } a - b. \end{cases}$$

6. In § 1 beweise ich, daß man sich auf primitive Rekursionen ohne Parameter beschränken darf, wenn man zu den Ausgangsfunktionen noch gewisse zweistellige Funktionen hinzunimmt. Durch diesen Satz wird die Abzählung der rekursiven Funktionen erleichtert.

Diese Abzählung und das Diagonalverfahren führe ich in § 2 durch. In § 3 folgt endlich das modifizierte Ackermannsche Beispiel.

§ 1.

Zurückführung der Rekursion (1) auf Rekursionen ohne Parameter.

7. Ich beweise zunächst, daß man jede primitive Rekursion von der Form (1) durch Einsetzungen und durch eine Rekursion von der einfacheren Form

$$(2)\qquad \begin{cases} \varphi(0) = 1, \\ \varphi(n+1) = \gamma(n, \varphi(n)) \end{cases}$$

ersetzen kann.

Es sei $\varphi(n, a)$ eine Funktion, die durch eine Rekursion

$$\begin{cases} \varphi(0, a) = \alpha(a), \\ \varphi(n+1, a) = \beta(n, a, \varphi(n, a)) \end{cases}$$

von der Form (1) aus den Funktionen α und β definiert wird. Ich betrachte die Funktion

$$\psi(n) = \varphi(\pi_0(n), \pi_1(n)).$$

In der Definition von $\varphi(n, a)$ sind die Fälle $n = 0$ und $n \neq 0$ zu unterscheiden. Für $\psi(n)$ bedeutet das — da $\varphi(n, a)$ gleich dem Werte

von $\psi(n)$ an der Stelle $2^n \cdot 3^a$ ist — die Unterscheidung der Fälle, wo n ungerade bzw. gerade ist.

Es ist

$$\pi_0(2n+1) = 0; \quad \pi_0(2n) = \pi_0(n) + 1 \quad \text{und} \quad \pi_1(2n) = \pi_1(n)$$

und daher

$$\begin{aligned} \psi(2n+1) &= \varphi(\pi_0(2n+1),\ \pi_1(2n+1)) \\ &= \varphi(0,\ \pi_1(2n+1)) = \alpha(\pi_1(2n+1)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \psi(2n) = \varphi(\pi_0(2n),\ \pi_1(2n)) &= \varphi(\pi_0(n)+1,\ \pi_1(n)) \\ &= \beta(\pi_0(n),\ \pi_1(n),\ \varphi(\pi_0(n),\ \pi_1(n))) \\ &= \beta(\pi_0(n),\ \pi_1(n),\ \psi(n)). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung zeigt, daß man $\psi(2n)$ aus $\psi(n)$ gewinnen kann. Wir haben hier einen Spezialfall der Definitionsart, die ich in meiner Arbeit „I" Wertverlaufsrekursion genannt habe. Und ich wende hier auch ein analoges Verfahren an, wie es in „I" bei der Wertverlaufsrekursion angewandt wurde (ohne aber hier dieses Verfahren als bekannt vorauszusetzen). Da der Wert von $\psi(0)$ für unsere Zwecke belanglos ist, führe ich zur Charakterisierung des Wertverlaufs von ψ die folgende Funktion ein:

$$\xi(0) = 1, \quad \xi(n) = p_1^{\psi(1)} p_2^{\psi(2)} \dots p_n^{\psi(n)} \qquad (\text{für } n \neq 0).$$

Dann ist

$$\xi(n+1) = \xi(n) \cdot p_{n+1}^{\psi(n+1)};$$

ist hier $n+1$ ungerade, so ist $\psi(n+1) = \alpha(\pi_1(n+1))$; ist aber $n+1$ gerade, so läßt sich $\psi(n+1)$ wegen $\frac{n+1}{2} \leqq n$ mit Hilfe von $\psi\left(\frac{n+1}{2}\right) = \psi\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right) = \pi_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(\xi(n))$ ausdrücken, und zwar folgendermaßen:

$$\psi(n+1) = \beta\left(\pi_0\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right),\ \pi_1\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right),\ \pi_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(\xi(n))\right).$$

Daß $n+1$ ungerade bzw. gerade ist, kann auch so ausgedrückt werden, daß $\pi_0(n) \neq 0$ bzw. $\pi_0(n+1) \neq 0$; also läßt sich $\xi(n)$ endlich wie folgt definieren:

$$\begin{cases} \xi(0) = 1, \\ \xi(n+1) = \xi(n) \cdot \Big\{ \operatorname{sg} \pi_0(n) \cdot p_{n+1}^{\alpha(\pi_1(n+1))} \\ \qquad + \operatorname{sg} \pi_0(n+1) \cdot p_{n+1}^{\beta\left(\pi_0\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right),\ \pi_1\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right),\ \pi_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(\xi(n))\right)} \Big\}. \end{cases}$$

Das ist aber eine Rekursion der Form (2) mit

$$\gamma(n, a) = a \cdot \Bigl\{ \operatorname{sg} \pi_0(n) \cdot p_{n+1}^{a(\pi_1(n+1))} + \operatorname{sg} \pi_0(n+1) \cdot p_{n+1}^{\beta\left(\pi_0\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right),\ \pi_1\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right),\ \pi_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(a)\right)} \Bigr\}.$$

Mit Hilfe der Funktion $\xi(n)$ läßt sich nun $\psi(n)$ (für $n \neq 0$) folgendermaßen definieren:

$$\psi(n) = \pi_n(\xi(n));$$

endlich gewinnt man $\varphi(n, a)$ aus

$$\varphi(n, a) = \psi(2^n \cdot 3^a).$$

8. Zum Aufbau der Funktion $\gamma(n, a)$ aus $\alpha(a)$ und $\beta(n, a, b)$, ferner zum Übergang von $\xi(n)$ zu $\psi(n)$ und $\varphi(n, a)$ wurden die folgenden Hilfsfunktionen verwendet:

$$0, \quad n+1, \quad \operatorname{sg} n, \quad \left[\frac{n}{2}\right], \quad n+a, \quad n \cdot a, \quad p_n, \quad a^n, \quad \pi_n(a).$$

Dabei lassen sich die sechs ersten dieser Funktionen mit Hilfe der übrigen drei durch Substitutionen und Rekursionen der Form (2) darstellen. In der Tat gewinnt man sukzessive

$$0 = \pi_n(\pi_n(p_n))$$

(oder $0 = \pi_n(n)$);

$$n \cdot a = \pi_0((p_0^n)^a);$$

$$n + a = \pi_0(p_0^n \cdot p_0^a),$$

speziell

$$n + 1 = \pi_0(p_0^n \cdot p_0);$$

wird ferner die Funktion $\operatorname{sg} n$ durch

$$\begin{cases} \overline{\operatorname{sg}}\, 0 = 1, \\ \overline{\operatorname{sg}}\,(n+1) = 0 \end{cases}$$

definiert, so ist

$$\operatorname{sg} n = \overline{\operatorname{sg}}(\overline{\operatorname{sg}}\, n);$$

endlich gewinnt man die Funktion $\left[\frac{n}{2}\right]$ wie folgt. Es ist

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] - \left[\frac{n}{2}\right] = \begin{Bmatrix} 0 & \text{für gerades } n \\ 1 & \text{für ungerades } n \end{Bmatrix} = \operatorname{sg} \pi_0(n+1),$$

also gilt für die durch die Rekursion

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1, \\ \varphi(n+1) = \varphi(n) + \operatorname{sg} \pi_0(n+1) \end{cases}$$

definierte Funktion

$$\varphi(n) = \left[\frac{n}{2}\right] + 1;$$

definiert man also $\delta(n)$ durch

$$\begin{cases} \delta(0) = 1, \\ \delta(n+1) = n \end{cases}$$

(wobei man n z. B. aus der Funktion $n + a$ durch die Substitution $a = 0$ gewinnt), so hat man

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \delta(\varphi(n)).$$

Werden also statt 0 *und* $n + 1$ *die Funktionen*

$$\text{(A)} \qquad p_n, \quad a^n \quad \textit{und} \quad \pi_n(a)$$

als Ausgangsfunktionen betrachtet[6]), *so läßt sich jede rekursive Funktion durch eine endliche Kette von Rekursionen der Form* (2), *Substitutionen und Umbenennungen der Argumente gewinnen.*

Die Umbenennung der Argumente (eine Operation, die ich im Vorangehenden stillschweigend oft verwendet habe) läßt sich natürlich als Spezialfall der Substitution auffassen, falls man alle nötigen Argumente zu den Ausgangsfunktionen (A) hinzunimmt.

Beschränkt man sich auf die ein- und zweistelligen rekursiven Funktionen, so genügt es, auch Substitutionen nur zur Bildung von höchstens zweistelligen Funktionen zu verwenden. In der Tat sind die Ausgangsfunktionen (A), die zu einer Rekursion der Form (2) benötigte Funktion $\gamma(n, a)$ und die durch diese Rekursion definierte Funktion $\varphi(n)$ sämtlich höchstens zweistellig; es genügt daher zu zeigen, daß eine Kette von Substitutionen, die aus lauter ein- und zweistelligen Funktionen eine ebensolche erzeugt, sich immer in solcher Reihenfolge ausführen läßt, daß alle Zwischenfunktionen ebenfalls höchstens zweistellig ausfallen. Dies folgt aber aus der einfachen Tatsache, daß, falls die Substitutionen von innen nach außen durchgeführt werden, die Zwischenfunktionen kein Argument enthalten können, das nicht auch im Endresultat der Substitutionen figuriert.

Also kann das Resultat für Funktionen der beiden Argumente n und a auch wie folgt ausgesprochen werden:

Jede rekursive Funktion der beiden Argumente n *und* a *läßt sich aus den Ausgangsfunktionen*

$$\text{(A')} \qquad n, \quad a, \quad p_n, \quad a^n, \quad \pi_n(a)$$

durch endlichmalige Anwendung der folgenden beiden Schemata gewinnen:

[6]) Damit ist freilich nicht gemeint, daß diese Funktionen beim axiomatischen Aufbau der Arithmetik das Ausgangselement 0 und die Funktion $n + 1$ vertreten könnten; diese beiden Grundelemente spielen ja auch auf den linken Seiten der Rekursionsgleichungen eine ausgezeichnete Rolle.

1. **Rekursionsschema**: *Aus einer Funktion* $\gamma(n, a)$ *gewinnt man die Funktion* $\varphi(n)$, *die durch*

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi(0) = 1, \\ \varphi(n+1) = \gamma(n, \varphi(n)) \end{cases}$$

definiert wird.

2. **Substitutionsschema**: *Aus drei Funktionen* $\alpha(n, a)$, $\beta(n, a)$ *und* $\gamma(n, a)$ *gewinnt man die Funktion*

$$(3) \qquad \varphi(n, a) = \alpha(\beta(n, a), \gamma(n, a)).$$

Dabei sind auch die Funktionen n, a, p_n, *ferner die aus dem Rekursionsschema* (2) *gewonnenen Funktionen als zweistellig, nämlich als Funktionen von* n *und* a *zu betrachten.*

Das Substitutionsschema (3) enthält für $\beta(n, a) = n$ bzw. $\gamma(n, a) = a$ auch die Substitutionen als Spezialfälle, bei denen das eine oder andere Argument ungeändert bleibt.

§ 2.

Das Diagonalverfahren.

9. Das Ergebnis des vorangehenden Paragraphen ermöglicht eine sehr einfache Anordnung aller zweistelligen rekursiven Funktionen in eine abgezählte Reihe

$$(4) \qquad \varphi_0(n, a), \; \varphi_1(n, a), \; \ldots, \; \varphi_m(n, a), \; \ldots,$$

wobei eine Funktion auch öfters vorkommen kann. Betrachtet man die m-te Funktion $\varphi_m(n, a) = \varphi(m, n, a)$ als eine Funktion der drei Argumente m, n und a, so gewinnt man eine Funktion, die nicht rekursiv sein kann. Sonst wäre nämlich auch $\varphi_n(n, a)$, also auch $\varphi_n(n, a) + 1$ eine rekursive Funktion, also gäbe es eine feste Zahl m, so daß $\varphi_n(n, a) + 1$ mit $\varphi_m(n, a)$ identisch ist. Das ist aber unmöglich, da die beiden Funktionen für $n = m$ verschiedene Werte besitzen. (Natürlich würde auch eine Abzählung

$$\varphi_0(n), \; \varphi_1(n), \; \ldots, \; \varphi_m(n), \; \ldots$$

der einstelligen rekursiven Funktionen zu einem Beispiel $\varphi_m(n)$ einer nichtrekursiven Funktion führen; es handelt sich aber hier um die effektive Angabe einer nichtrekursiven Funktion, dazu wird also die effektive Aufstellung der genannten Abzählung benötigt. Nun könnte man aber eine Abzählung der einstelligen rekursiven Funktionen, ohne den Umweg über eine Abzählung der zweistelligen rekursiven Funktionen, nur in ziemlich komplizierter Weise ausführen.)

10. Nun werde ich die Anordnung (4) wirklich angeben; es wird sich herausstellen, daß die Funktion $\varphi(m, n, a)$ sich doch auf eine Weise

aus rekursiven Funktionen definieren läßt, die der eingeschachtelten Rekursion sehr ähnlich ist, nämlich durch eine zweifache Rekursion (nebst einer Substitution). Dabei wird unter einer *zweifachen Rekursion* eine Definition von der Form

$$(5)\begin{cases}\varphi(0, n, a_1, a_2, \ldots, a_r) = \alpha(n, a_1, a_2, \ldots, a_r),\\ \varphi(m+1, 0, a_1, a_2, \ldots, a_r)\\ \quad = \mathfrak{f}_{b_0 b_1 b_2 \ldots b_r}(m, a_1, a_2, \ldots, a_r, \varphi(m, b_0, b_1, b_2, \ldots, b_r)),\\ \varphi(m+1, n+1, a_1, a_2, \ldots, a_r)\\ \quad = \mathfrak{g}_{b_0 b_1 b_2 \ldots b_r}(m, n, a_1, a_2, \ldots, a_r, \varphi(m, b_0, b_1, b_2, \ldots, b_r), \varphi(m+1, n, b_1, b_2, \ldots, b\end{cases}$$

verstanden, wobei die Schreibweise $\mathfrak{f}_{b_0 b_1 b_2 \ldots b_r}$, $\mathfrak{g}_{b_0 b_1 b_2 \ldots b_r}$ die entsprechende Bedeutung hat wie in der Einleitung. (Die Indizes zeigen auch hier diejenigen Leerstellen an, die durch Einsetzungen gebunden werden sollen; die übrigen Argumente von φ, nämlich m, $m+1$, n, sollen dabei festgehalten werden.) Ich sage auch, die Funktion $\varphi(m, n, a_1, a_2, \ldots, a_r)$ sei durch die zweifache Rekursion (5) aus der Funktion α und den in den Termen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ außer φ auftretenden Funktionen definiert.

Ich beginne die Abzählung (4) mit den Ausgangsfunktionen (A′), ich setze also

$$\varphi_0(n, a) = n,\quad \varphi_1(n, a) = a,\quad \varphi_2(n, a) = p_n,\quad \varphi_3(n, a) = a^n,\quad \varphi_4(n, a) = \pi_n(a).$$

Für $m > 4$ definiere ich durch „Rekursion" (natürlich nicht im bisher gebrauchten Sinne dieses Wortes) in bezug auf m, welche Funktion als $\varphi_m(n, a)$ gelten soll. Es sei also $\varphi_k(n, a)$ für $k < m$ bereits bekannt; dann definiere ich $\varphi_m(n, a)$ als die aus der Funktion $\varphi_{\pi_0(m)}(n, a)$ durch das Rekursionsschema (2), oder die aus den Funktionen $\varphi_{\pi_1(m)}(n, a)$, $\varphi_{\pi_2(m)}(n, a)$, $\varphi_{\pi_3(m)}(n, a)$ durch das Substitutionsschema (3) entstandene Funktion, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Dann enthält die Folge (4) zufolge des zu Ende von Nr. 8 ausgesprochenen Satzes jede zweistellige rekursive Funktion mindestens einmal. Um diese Behauptung einfacher beweisen zu können, zeige ich etwas mehr, nämlich daß jede zweistellige rekursive Funktion in der Folge (4) mit einem Index > 4 auftritt (dies sagt nur für die Ausgangsfunktionen (A′) mehr aus, als die ursprüngliche Behauptung). In der Tat gilt das für die Ausgangsfunktionen (A′), da für $m = 0, 1, 2, 3$ und 4 $m' = 3^m \cdot 7$ gewiß größer als 4 ist, also $\varphi_{m'}(n, a)$ aus $\varphi_m(n, a)$ durch die „identische Substitution" entsteht (nämlich durch Einsetzung von n für n und a für a), also mit diesem identisch ist. Ist ferner die Behauptung für die Funktion $\gamma(n, a)$ richtig, ist also für ein $k > 4$ $\gamma(n, a) = \varphi_k(n, a)$, so gilt für die aus $\gamma(n, a)$ mit Hilfe des Rekursionsschemas (2) entstandene Funktion: $\varphi(n) = \varphi_{2^k}(n, a)$. Enthält endlich die Folge (4) die Funktionen

$\alpha(n, a)$, $\beta(n, a)$ und $\gamma(n, a)$ mit einem Index > 4, ist also für gewisse $i, j, k > 4$

$$\alpha(n, a) = \varphi_i(n, a), \quad \beta(n, a) = \varphi_j(n, a), \quad \gamma(n, a) = \varphi_k(n, a),$$

so gilt

$$\alpha(\beta(n, a), \gamma(n, a)) = \varphi_{3^i \cdot 5^j \cdot 7^k}(n, a),$$

also ist auch die aus α, β, γ mit Hilfe des Substitutionsschemas (3) entstandene Funktion in der Folge (4) enthalten.

11. Die Definition der Funktion $\varphi_m(n, a) = \varphi(m, n, a)$ (ich verwende die letztere Schreibweise, um den wichtigen Umstand, daß auch m als Argument gilt, hervorzuheben) lautet explizit aufgeschrieben:

$$(6) \quad \varphi(m, n, a) = \begin{cases} n, \text{ falls } m = 0, \\ a, \quad \text{,,} \quad m = 1, \\ p_n, \quad \text{,,} \quad m = 2, \\ a^n, \quad \text{,,} \quad m = 3, \\ \pi_n(a), \quad \text{,,} \quad m = 4, \\ 1, \quad \text{,,} \quad m > 4,\ m \text{ gerade},\ n = 0, \\ \varphi(\pi_0(m), n-1, \varphi(m, n-1, a)), \text{ falls } m > 4, m \text{ gerade}, n > 0 \\ \varphi(\pi_1(m), \varphi(\pi_2(m), n, a), \varphi(\pi_3(m), n, a)), \\ \qquad \text{falls } m > 4,\ m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Diese Definition ist insofern einer zweifachen Rekursion ähnlich, als $\varphi(m, n, a)$ mittels gewisser Werte $\varphi(m', n', a')$ dieser Funktion ausgedrückt wird, wobei entweder $m' < m$, oder $m' = m$, $n' < n$ ist. In der Tat werde ich die Definition (6) auf eine zweifache Rekursion von der Form (5) nebst einer Substitution zurückführen. Dies wird dieselbe Methode erfordern, wie die Zurückführung einer Wertverlaufsrekursion auf eine primitive Rekursion in meiner Arbeit „I", da ja (6) sich als eine zweifache Wertverlaufsrekursion auffassen läßt.

Vor allem drücke ich die Fallunterscheidungen in (6) in einer Formel aus. Zu diesem Zweck benötigt man außer den bisher gebrauchten Funktionen die Hilfsfunktion

$$\iota(m, n) = \begin{cases} 1, \text{ falls } m = n, \\ 0, \quad \text{,,} \quad m \neq n; \end{cases}$$

der rekursive Charakter derselben läßt sich z. B. aus der Darstellung

$$\iota(m, n) = \overline{\mathrm{sg}}((m \dot{-} n) + (n \dot{-} m))$$

erkennen. Setzt man

$$\alpha(m, n, a, b, c) = a \cdot \iota(m, 1) + p_n \cdot \iota(m, 2) + a^n \cdot \iota(m, 3) + \pi_n(a) \cdot \iota(m, 4) \\ + \mathrm{sg}(m \dot{-} 4)(b \cdot \mathrm{sg}\, \pi_0(m) + c \cdot \overline{\mathrm{sg}}\, \pi_0(m)),$$

dann gilt für die rekursive Funktion $\alpha(m, n, a, b, c)$

$$\alpha(m, n, a, b, c) = \begin{cases} a, & \text{falls } m = 1, \\ p_n, & \text{,, } m = 2, \\ a^n, & \text{,, } m = 3, \\ \pi_n(a), & \text{,, } m = 4, \\ b, & \text{,, } m > 4,\ m \text{ gerade}, \\ c, & \text{,, } m > 4,\ m \text{ ungerade}, \end{cases}$$

so daß (6) sich einfacher durch

$$\varphi(m,n,a) = \begin{cases} n, \text{ falls } m = 0, \\ \alpha\Big(m, n, a, 1, \varphi\big(\pi_1(m), \varphi(\pi_2(m), n, a), \varphi(\pi_3(m), n, a)\big)\Big), \\ \qquad \text{falls } m > 0,\ n = 0, \\ \alpha\Big(m, n, a, \varphi(\pi_0(m), n-1, \varphi(m, n-1, a)), \\ \qquad \varphi\big(\pi_1(m), \varphi(\pi_2(m), n, a), \varphi(\pi_3(m), n, a)\big)\Big), \\ \qquad \text{falls } m > 0,\ n > 0 \end{cases}$$

ausdrücken läßt. Setzt man also weiter

$$\alpha(m+1, 0, a, 1, c) = \beta(m, a, c),$$
$$\alpha(m+1, n+1, a, b, c) = \gamma(m, n, a, b, c),$$

dann sind β und γ ebenfalls rekursive Funktionen und man gewinnt:

$$(7)\begin{cases} \varphi(0, n, a) = n, \\ \varphi(m+1, 0, a) = \beta\Big(m, a, \varphi\big(\pi_1(m+1), \varphi(\pi_2(m+1), 0, a), \\ \qquad\qquad \varphi(\pi_3(m+1), 0, a)\big)\Big), \\ \varphi(m+1, n+1, a) = \gamma\Big(m, n, a, \varphi\big(\pi_0(m+1), n, \varphi(m+1, n, a)\big), \\ \qquad \varphi\big(\pi_1(m+1), \varphi(\pi_2(m+1), n+1, a), \varphi(\pi_3(m+1), n+1, a)\big)\Big). \end{cases}$$

12. Der Wertverlauf von φ läßt sich durch die Funktion

$$\psi(m, n, a) = \prod_{i=0}^{m} p_i^{\varphi(i, n, a)}$$

charakterisieren; in der Tat ist für $i = 0, 1, 2, \ldots, m$

$$(8) \qquad \varphi(i, n, a) = \pi_i(\psi(m, n, a)).$$

Nun ist

$$\psi(0, n, a) = 2^n,$$
$$\psi(m+1, 0, a) = \psi(m, 0, a) \cdot p_{m+1}^{\varphi(m+1, 0, a)},$$
$$\psi(m+1, n+1, a) = \psi(m, n+1, a) \cdot p_{m+1}^{\varphi(m+1, n+1, a)}.$$

Ich setze hier statt $\varphi(m+1, 0, a)$ bzw. $\varphi(m+1, n+1, a)$ ihre Werte aus (7) ein; dabei drücke ich aber die rechts auftretenden Werte von φ mit Hilfe von (8) durch $\psi(m, n, a)$ aus. Wegen $\pi_k(m+1) \leqq m$ ist

$$\begin{aligned} &\varphi\big(\pi_1(m+1),\ \varphi(\pi_2(m+1), n, a),\ \varphi(\pi_3(m+1), n, a)\big) \\ &= \pi_{\pi_1(m+1)}\Big(\psi\big(m, \pi_{\pi_2(m+1)}(\psi(m, n, a)), \pi_{\pi_3(m+1)}(\psi(m, n, a))\big)\Big) \\ &= \mu_1\Big(m, \psi\big(m, \mu_2(m, \psi(m, n, a)), \mu_3(m, \psi(m, n, a))\big)\Big), \end{aligned}$$

falls man

$$\mu_k(m, b) = \pi_{\pi_k(m+1)}(b)$$

setzt; ferner ist

$$\begin{aligned} \varphi(\pi_0(m+1), n, \varphi(m+1, n, a)) &= \pi_{\pi_0(m+1)}\Big(\psi\big(m, n, \pi_{m+1}(\psi(m+1, n, a))\big)\Big) \\ &= \mu_0\Big(m, \psi\big(m, n, \nu(m, \psi(m+1, n, a))\big)\Big) \end{aligned}$$

mit

$$\nu(m, b) = \pi_{m+1}(b).$$

Setzt man also

$$\begin{aligned} \varkappa(m, a, b, c) &= b \cdot p_{m+1}^{\beta(m, a, \mu_1(m, c))}, \\ \lambda(m, n, a, b, c, d) &= b \cdot p_{m+1}^{\gamma(m, n, a, \mu_0(m, c), \mu_1(m, d))}, \end{aligned}$$

so gewinnt man für ψ die zweifache Rekursion

$$(9)\begin{cases} \psi(0, n, a) = 2^n, \\ \psi(m+1, 0, a) = \varkappa\Big(m, a, \psi(m, 0, a), \psi\big(m, \mu_2(m, \psi(m, 0, a)), \mu_3(m, \psi(m, 0, a))\big)\Big), \\ \psi(m+1, n+1, a) = \lambda\Big(m, n, a, \psi(m, n+1, a), \psi\big(m, n, \nu(m, \psi(m+1, n, a))\big), \\ \qquad\qquad \psi\big(m, \mu_2(m, \psi(m, n+1, a)), \mu_3(m, \psi(m, n+1, a))\big)\Big), \end{cases}$$

ersichtlich von der Form (5); die dabei auftretenden Funktionen 2^n, $\varkappa$, λ, μ_2, μ_3, ν sind sämtlich rekursiv.

Aus ψ gewinnt man φ durch

$$\varphi(m, n, a) = \pi_m(\psi(m, n, a)).$$

Dies zeigt, daß auch ψ nicht mehr rekursiv sein kann; wir sind auf diese Weise zu dem zuerst von Ackermann bewiesenen Satz gelangt, daß *die zweifache Rekursion aus der Klasse der rekursiven Funktionen hinausführt.*

Ich erwähne noch, daß man die Methode des § 1 auf die Definition (9) anwenden kann und so die Funktion φ auch durch eine zweifache Rekursion *ohne Parameter*, also von der Form

$$\begin{cases} \xi(0, n) = \alpha(n), \\ \xi(m+1, 0) = \mathfrak{f}_a(m, \xi(m, a)), \\ \xi(m+1, n+1) = \mathfrak{g}_a(m, \xi(m, a), \xi(m+1, n)), \end{cases}$$

nebst einigen Substitutionen definieren kann.

§ 3.

Das Ackermannsche Beispiel.

13. Das von Ackermann zur Aufstellung einer nichtrekursiven Funktion angewandte Verfahren kann als ein modifiziertes Diagonalverfahren aufgefaßt werden. Statt — wie ich es im vorigen Paragraphen getan habe — alle zweistelligen rekursiven Funktionen in einer Reihe

(4) $$\varphi_0(n,a),\ \varphi_1(n,a),\ \ldots,\ \varphi_m(n,a),\ \ldots$$

derart anzuordnen, daß jede Funktion aus gewissen vorangehenden Funktionen entweder durch Rekursion, oder durch Substitution entsteht, definiert Ackermann eine Reihe

(10) $$\psi_0(n,a),\ \psi_1(n,a),\ \ldots,\ \psi_m(n,a),\ \ldots$$

von Funktionen durch sukzessive Iterationen in bezug auf n. Da eine Iteration das Wachstum einer Funktion stärker beeinflußt, als eine Rekursion oder eine Substitution, so majorisieren die Funktionen (10) — bei geeigneter Wahl der Anfangsfunktion $\psi_0(n,a)$ und der Anfangswerte $\psi_m(0,a)$ der Iteration — der Reihe nach die Funktionen (4). Jedenfalls gibt es zu jeder zweistelligen rekursiven Funktion $\varphi(n,a)$ ein m derart, daß für alle n und a

(11) $$\varphi(n,a) < \psi_m(n,a)$$

besteht. Daher kann $\psi_m(n,a)$ als Funktion von m, n, a nicht rekursiv sein; sonst wäre die zur Folge (10) (als Folge von Funktionen des Argumentes n betrachtet) gehörige „Diagonalfunktion" $\psi_n(n,a)$ ebenfalls rekursiv; es müßte also durchwegs für ein gewisses m

$$\psi_n(n,a) < \psi_m(n,a)$$

bestehen, was für $n = m$ nicht zutrifft.

14. Das von Ackermann durch dieses Verfahren konstruierte Beispiel lautet im einzelnen, bis auf Abänderungen in der Bezeichnung, wie folgt: zum Ausgang wählt er die Funktionen

$$\psi_0(n,a) = n + a, \quad \psi_1(n,a) = n \cdot a, \quad \psi_2(n,a) = a^n;$$

für $m \geqq 2$ definiert er $\psi_{m+1}(n,a)$ durch die Rekursion

$$\begin{cases} \psi_{m+1}(0,a) = a, \\ \psi_{m+1}(n+1,a) = \psi_m(\psi_{m+1}(n,a),a); \end{cases}$$

d. h. $\psi_{m+1}(n,a)$ ist die n-te Iterierte der Funktion $\psi_m(n,a)$ in bezug auf n. Statt diese Funktionen mit den zweistelligen rekursiven Funktionen zu vergleichen, setzt er $a = n$ und verwendet die so entstehenden Funktionen $\psi_m(n,n)$ zur Majorisierung aller einstelligen rekursiven Funktionen.

So gelangt er zur Funktion $\psi_n(n, n)$, welche also den Wert darstellt, den für die Argumente n, n die n-te der Operationen ergibt, die man ausgehend von der Addition durch Iterationen gewinnt, als ziemlich frappantem Beispiel einer nichtrekursiven einstelligen Funktion.

Beim Beweis von Ackermann machen zwei Umstände gewisse technische Schwierigkeiten. Erstens legt er das allgemeine eingeschachtelte Rekursionsschema zugrunde, so daß er auch einen — nicht leicht zu erbringenden — Beweis der Tatsache benötigt, daß auch diese allgemeinere Art der Rekursion sich durch (eventuell mehrere nacheinander auszuführende) Iterationen majorisieren läßt. Diese Schwierigkeit kann man an Hand des Hauptergebnisses meiner Arbeit „I" überwinden, indem man sich auf primitive Rekursionen (nach Nr. 8 sogar auf solche ohne Parameter) beschränken kann. Dies würde schon eine wesentliche Vereinfachung bedeuten. Zweitens verursachen bei Ackermann gewisse Unebenheiten, die in den zum Beweis nötigen Monotonitätseigenschaften der Funktionen (10) auftreten, Schwierigkeiten. Demzufolge kann man die der Ungleichung (11) entsprechende Majoranteneigenschaft der Ackermannschen Funktionen nur für hinreichend große Werte der Argumente beweisen. Um diese Schwierigkeiten zu umgehen und damit zu einem weiter vereinfachten Beweis zu gelangen, glätte ich jene Unebenheiten durch eine vorteilhaftere Wahl der Anfangswerte der Iterationen ab. Das so konstruierte Beispiel ist mit dem Ackermannschen zwar nicht identisch, stimmt aber mit diesem in allen wesentlichen Eigenschaften überein.

Endlich wird das Verfahren einfacher, wenn statt zweistelliger Funktionen $\psi_m(n, a)$ einstellige Funktionen $\varphi_m(n)$ iteriert werden; das kann man z. B. so erreichen, daß man anstatt von $\psi_0(n, a) = n + a$ von $\varphi_0(n) = 2n$ ausgeht.

15. Zur Herstellung des Beispiels sind Funktionen $\varphi_m(n)$ mit folgenden Monotonitätseigenschaften notwendig:

a) $\varphi_m(n) > n$ (und folglich $\varphi_m(n) \geqq 1$),

b) für $n < n'$ ist $\varphi_m(n) < \varphi_m(n')$,

c) $\varphi_m(n)$ wächst auch in bezug auf m monoton, sogar ist $\varphi_m(n)$ gegenüber dem Wachsen von m mindestens so „empfindlich", wie gegenüber dem Wachsen von n, d. h.

$$\varphi_{m+1}(n) \geqq \varphi_m(n+1).$$

(Aus dieser Ungleichung samt b) folgt, daß $\varphi_{m+1}(n) > \varphi_m(n)$).

Die Eigenschaft c) besteht für $n = 0$ nicht, wenn man von der Definition $\varphi_{m+1}(0) = \varphi_m(0)$ — welche der Ackermannschen Definition $\psi_{m+1}(0, a)$

$= a = \psi_m(0, a)$ entspricht — ausgeht. Statt dessen wähle ich die Definition $\varphi_{m+1}(0) = \varphi_m(1)$ zum Ausgang.

Die Funktion $\varphi_0(n) = 2n$, welche der Ackermannschen Ausgangsfunktion $\psi_0(n, a) = n + a$ entspricht, genügt für $n = 0$ der Bedingung a) nicht. Statt ihrer nehme ich die ebenfalls lineare und den Bedingungen a), b) genügende Funktion $2n + 1$ als Ausgangsfunktion.

Also definiere ich die Funktionen $\varphi_m(n)$ wie folgt:

$$\varphi_0(n) = 2n + 1$$

und für alle m

$$\begin{cases} \varphi_{m+1}(0) = \varphi_m(1) \\ \varphi_{m+1}(n+1) = \varphi_m(\varphi_{m+1}(n)). \end{cases}$$

Ich beweise, daß $\varphi_m(n)$ für alle m den Bedingungen a), b) und c) genügt.

a) $$\varphi_m(n) > n, \text{ d. h. } \varphi_m(n) \geqq n + 1.$$

Dies besteht für $\varphi_0(n)$; angenommen, daß es schon für m besteht, kann man auf $m + 1$ so schließen:

$$\varphi_{m+1}(0) = \varphi_m(1) \geqq 2 \geqq 0 + 1$$

und falls a) für $\varphi_{m+1}(n)$ schon besteht, so besteht es auch für $\varphi_{m+1}(n+1)$, da

$$\varphi_{m+1}(n+1) = \varphi_m(\varphi_{m+1}(n)) \geqq \varphi_{m+1}(n) + 1 \geqq (n+1) + 1.$$

b) Die Monotonität in bezug auf n ist eine unmittelbare Folge der Eigenschaft a), da sie für $\varphi_0(n)$ besteht und für alle m

$$\varphi_{m+1}(n+1) = \varphi_m(\varphi_{m+1}(n)) > \varphi_{m+1}(n).$$

c) $\varphi_{m+1}(n) \geqq \varphi_m(n+1)$; denn

$$\varphi_{m+1}(0) = \varphi_m(1),$$

und wenn c) für n schon erfüllt ist, so kann man auf $n + 1$ folgendermaßen schließen:

$$\varphi_{m+1}(n+1) = \varphi_m(\varphi_{m+1}(n)) \geqq \varphi_m(\varphi_m(n+1)),$$

und hier ist nach a) $\varphi_m(n+1) \geqq n + 2$, also nach b)

$$\varphi_{m+1}(n+1) \geqq \varphi_m(n+2).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ich werde im folgenden die Eigenschaften a), b) und c) der Funktionen $\varphi_m(n)$ anwenden, ohne diese jedesmal anzuführen.

16. Nun behaupte ich, daß es zu einer jeden einstelligen rekursiven Funktion $\alpha(n)$ ein solches m gibt, daß $\varphi_m(n) > \alpha(n)$ für alle n.

Zu diesem Zwecke beweise ich die folgenden Hilfssätze:

1. Ist $\alpha(n, a)$ eine der Funktionen (A'), (diese betrachte ich auch hier alle als zweistellig), so gibt es ein solches m, daß für alle n, a

$$\alpha(n, a) < \varphi_m(\max(n, a)).$$

2. Gibt es zu den Funktionen $\alpha(n, a)$, $\beta(n, a)$, $\gamma(n, a)$ solche i, j, k, daß für alle n, a

$$\alpha(n, a) < \varphi_i(\max(n, a)),$$

$$\beta(n, a) < \varphi_j(\max(n, a))$$

und

$$\gamma(n, a) < \varphi_k(\max(n, a)),$$

so gibt es auch ein solches m, daß für alle n, a

$$\alpha(\beta(n, a), \gamma(n, a)) < \varphi_m(\max(n, a)).$$

3. Gibt es endlich zur Funktion $\gamma(n, a)$ ein solches i, daß für alle n, a

$$\gamma(n, a) < \varphi_i(\max(n, a)),$$

so gibt es auch zur Funktion $\psi(n)$, die durch die Rekursion

$$\begin{cases} \psi(0) = 1, \\ \psi(n+1) = \gamma(n, \psi(n)) \end{cases}$$

definiert wird, ein solches m, daß für alle n

$$\psi(n) < \varphi_m(n).$$

Beweis von 1.: Wegen $n \leqq \max(n, a)$, $\pi_n(a) \leqq a \leqq \max(n, a)$ und $\varphi_0(\max(n, a)) = 2\max(n, a) + 1 > \max(n, a)$ gilt die Behauptung mit $m = 0$ für die beiden ersten und die letzte der Funktionen (A').

Ferner verifiziert man durch Induktion nach n, daß

$$\varphi_1(n) = 2^{n+2} - 1.$$

Daraus ergibt sich, daß

$$p_n < \varphi_2(\max(n, a)).$$

Da nämlich p_n von a nicht abhängt und [7]) $p_n \leqq 2^{2^n}$, ist nur zu beweisen, daß

$$2^{2^n} < \varphi_2(n).$$

Dies besteht für $n = 0$, da

$$\varphi_2(0) = \varphi_1(1) = 2^{1+2} - 1 = 7 > 2^{2^0}.$$

---

[7]) Vgl. z. B. G. Pólya und G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* (1925), Abschnitt VIII, Kap. 2, Aufg. 94. S. 133, ferner Lösung auf S. 342. Dort bedeutet zwar p_n die der Größe nach n-te Primzahl (also $p_1 = 2$, $p_2 = 3, \ldots$); der Beweis läßt sich aber ohne weiteres auf die hier verwendete Definition von p_n übertragen.

Angenommen, daß schon

$$\varphi_2(n) > 2^{2^n},$$

so ist

$$\varphi_2(n+1) = \varphi_1(\varphi_2(n)) > \varphi_1(2^{2^n}) = 2^{2^{2^n}+2} - 1 = 4 \cdot 2^{2^{2^n}} - 1 > 2^{2^{2^n}},$$

und da $2^a > a$, also $2^n \geqq n+1$, so ist

$$\varphi_2(n+1) > 2^{2^{n+1}}$$

Folglich ist für alle n

$$\varphi_2(n) > 2^{2^n},$$

q. e. d.

Daraus ergibt sich auch, daß

$$a^n < \varphi_2(\max(a, n)).$$

Es ist nämlich für alle $a \geqq 4$, wie man durch vollständige Induktion nachweist,

$$a^2 \leqq 2^a;$$

hieraus, und aus $a < 2^a$ folgt für $a \geqq 4$

$$a^a \leqq 2^{a^2} \leqq 2^{2^a},$$

und dieses gilt (falls $0^0 = 1$ definiert wird) auch für $a < 4$. Also ist

$$a^n \leqq \max(a, n)^{\max(a, n)} \leqq 2^{2^{\max(a, n)}} < \varphi_2(\max(a, n)).$$

Beweis von 2.: Bestehen die Annahmen und ist noch

$$m = 2 + \max(i, j, k),$$

so ist wegen $i \leqq m-2$, $\max(j, k) \leqq m-2 < m-1$,

$$\begin{aligned}
\alpha(\beta(n,a), \gamma(n,a)) &< \varphi_i(\max(\beta(n,a), \gamma(n,a))) \\
&< \varphi_i\big(\max(\varphi_j(\max(n, a)), \varphi_k(\max(n,a)))\big) \\
&= \varphi_i(\varphi_{\max(j,k)}(\max(n,a))) \\
&< \varphi_{m-2}(\varphi_{m-1}(\max(n,a))) = \varphi_{m-1}(\max(n,a)+1) \\
&\leqq \varphi_m(\max(n,a)).
\end{aligned}$$

Beweis von 3.: Bestehen die Annahmen und ist noch

$$m = i + 1,$$

so ist erstens

$$\psi(0) = 1 = \varphi_0(0) < \varphi_m(0).$$

Angenommen, daß schon

$$\psi(n) < \varphi_m(n),$$

so ist wegen $\varphi_m(n) > n$

$$\begin{aligned}
\psi(n+1) = \gamma(n, \psi(n)) &< \varphi_i(\max(n, \psi(n))) \leqq \varphi_i(\max(n, \varphi_m(n))) \\
&= \varphi_i(\varphi_m(n)) = \varphi_{m-1}(\varphi_m(n)) = \varphi_m(n+1).
\end{aligned}$$

Folglich ist für alle n

$$\psi(n) < \varphi_m(n),$$

und damit ist die Behauptung bewiesen.

Gemäß dem Satze, welcher am Ende von Nr. 8 ausgesprochen wurde, folgt aus 1., 2. und 3., daß es zu jeder zweistelligen rekursiven Funktion $\alpha(n, a)$, (die nicht notwendig von a wirklich abzuhängen braucht), eine Zahl m gibt[8]), derart, daß für alle n und a

$$\alpha(n, a) < \varphi_m(\max(n, a))$$

besteht. Handelt es sich um eine einstellige rekursive Funktion $\alpha(n)$, so kann hierbei a beliebig, z. B. $a = 0$ gewählt werden, und man gewinnt, wie behauptet, ein m derart, daß für alle n

$$\alpha(n) < \varphi_m(n).$$

Andererseits[9]) ist bei beliebigem m für $n > m$

$$\varphi_n(n) > \varphi_m(n),$$

also kann $\varphi_n(n)$ nicht zu den rekursiven Funktionen gehören.

17. Somit kann auch $\varphi_m(n)$ als Funktion von m und n nicht rekursiv sein. Sei $\varphi_m(n) = \varphi(m, n)$, so lautet die Definition von $\varphi(m, n)$:

$$\begin{cases} \varphi(0, n) = 2n + 1, \\ \varphi(m+1, 0) = \varphi(m, 1), \\ \varphi(m+1, n+1) = \varphi(m, \varphi(m+1, n)), \end{cases}$$

und das ist eine zweifache Rekursion.

Es wäre die nähere Untersuchung von solchen mehrfachen Rekursionen interessant, z. B. vom Gesichtspunkte des Zusammenhanges mit den Hilbertschen höheren Funktionentypen (Ackermann[3]) hat nämlich gezeigt, daß

---

[8]) Der obige Beweis zeigt, wie man ein solches m zu einer gegebenen rekursiven Funktion $\alpha(n, a)$ wirklich angeben kann. Entsteht die Funktion $\alpha(n, a)$ im Sinne des zu Ende von Nr. 8 ausgesprochenen Satzes durch r Rekursionen (2) und s Substitutionen (3) aus den Ausgangsfunktionen (A'), gelangen dabei p_n und a'' insgesamt t-mal zur Anwendung, so sieht man leicht ein, daß $m = r + 2s + 2t$ gesetzt werden kann. Daraus folgt durch eine grobe Abschätzung, daß man für m auch den Index von $\alpha(n, a)$ in der Abzählung (4) nehmen kann.

[9]) Daraus folgt auch, daß schon $\varphi_m(0)$ nichtrekursiv ist. Sonst wäre nämlich auch $\varphi_{2m}(0)$ rekursiv, also gäbe es ein k derart, daß für jedes m $\varphi_{2m}(0) < \varphi_k(m)$ wäre. Das kann aber für $m = k$ nicht zutreffen, da infolge der Eigenschaft c) die Ungleichung $\varphi_{2k}(0) \geqq \varphi_k(k)$ besteht. In entsprechender Weise beweist man, daß $\varphi_m(n)$ für kein festes n eine rekursive Funktion von m darstellt. Andererseits ist $\varphi_m(n)$ offenbar für jedes feste m eine rekursive Funktion von n. Also rührt die Nichtrekursivität der zweistelligen Funktion $\varphi_m(n)$ sozusagen von ihrer Abhängigkeit von m her.

sein Beispiel auf der „zweiten Stufe" durch regelmäßige, d. h. nur nach einer Variablen fortschreitende Rekursionen definierbar ist); ferner auch von dem Gesichtspunkte, daß das Diagonalverfahren auch auf die so definierten Funktionen anwendbar ist; es fragt sich, welche weiteren Modifikationen des Rekursionsbegriffes geeignet erscheinen, um über die durch mehrfache Rekursionen definierten Funktionen hinauszukommen, und wie sich dieses Verfahren ins Transfinite fortsetzen läßt. Auch wäre noch zu untersuchen, welche Spezialfälle der mehrfachen Rekursion sich noch immer auf primitive Rekursionen zurückführen lassen. Auf diese Fragen will ich in einer späteren Arbeit zurückkommen.

Zum Schluß möchte ich den Herren P. Bernays (Zürich) und L. Kalmár (Szeged) auch hier für ihre wertvollen Ratschläge meinen Dank aussprechen.

(Eingegangen am 15. 7. 1934.)

Zum Eliminationsproblem der mathematischen Logik.

Von

Wilhelm Ackermann in Burgsteinfurt.

In einer kürzlich in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit[1]) hatte ich das Eliminationsproblem allgemein für den Fall gelöst, daß hinter dem Seinszeichen für das zu eliminierende Prädikat lauter Allzeichen für Individuen vorkommen[2]). Für den Fall, daß ein Wechsel von All- und Seinszeichen auftritt, konnte keine allgemeine Lösungsmethode angegeben werden; es wurde nur darauf hingewiesen, daß sich durch Einführung von Belegungsfunktionen das Problem auf ein solches reduziert, bei dem das ursprüngliche Prädikat verschwunden ist und dafür zu eliminierende Belegungsfunktionen auftreten[3]). Der Vorteil, den die Einführung von Belegungsfunktionen bietet, besteht darin, daß in gewissen einfachen Fällen sich die Belegungsfunktionen wieder fortschaffen lassen, womit dann die Elimination vollständig vollzogen ist. Zu diesen einfachen Fällen gehört z. B. das Beispiel (26) auf Seite 413 meiner genannten Arbeit. Die optimistischen Erwartungen, die man danach allgemein von dieser Methode haben könnte, erweisen sich leider als nicht begründet; vielmehr entstehen durch Einführung der Belegungsfunktionen derart verwickelte Aufgaben, daß man diese Funktionen gern vermeiden möchte, falls die in den besonderen Fällen erreichten Resultate sich auch auf andere Weise erzielen ließen. Das ist in der Tat der Fall. Mit der neuen, im folgenden anzugebenden Methode gelingt z. B. ebenso wie mit der Methode der Belegungsfunktionen die Lösung der meisten Eliminationsprobleme, die von Schröder im 3. Band seiner Algebra der Logik aufgeworfen worden sind. Zugleich wird uns aber klar werden, weshalb man diese Methode nicht zu einer

---

[1]) Untersuchungen über das Eliminationsproblem der mathematischen Logik, Math. Annalen **110**, S. 390—413.

[2]) Der Fall, daß hinter dem Seinszeichen für Prädikate lauter Seinszeichen für Individuen vorkommen, ist trivial. da er sich auf ein Eliminationsproblem des Aussagenkalküls reduziert.

[3]) Das Ersetzen der Seinszeichen durch Belegungsfunktionen ist im wesentlichen schon von Schröder bei seiner Ausführung von logischen Produkten und Summen benutzt worden; in klarer Fassung ausgesprochen hat es zuerst Th. Skolem 1920. Seitdem ist dieses Prinzip mehrfach bei Untersuchungen über den Logikkalkül benutzt worden. — Auf die Vorteile, die die Einführung von Belegungsfunktionen für das Eliminationsproblem bietet, hat auch schon H. Behmann in einem Vortrage auf der Mathematikerversammlung in Düsseldorf 1926 hingewiesen.

allgemein anwendbaren erweitern kann, was bei Einführung der Belegungsfunktionen einigermaßen unklar blieb. Zu den von Schröder behandelten Problemen gehören z. B.

(I) $(EF)[(x)(Ey)(Axy \,\&\, Fxy) \,\&\, (x)(Ez)(Bxz \,\&\, \overline{F}xz)]$,

(II) $(EF)((x)(Eu)(Axu \,\&\, Fxu) \,\&\, (x)(y)(Ez)[Bxy(Cyz \,\&\, \overline{F}xz)])$,

(III) $(EF)\{(x)(Eu)(Axu \,\&\, Fxu) \,\&\, (x)(Ey)(z\}(Bxy \,\&\, Cyz\overline{F}xz)\}$,

(IV) $(EF)\{(x)(y)(Ez)[Axy(Byz \,\&\, Fxz)] \,\&\, (x)(Ey)(z)(Cxy \,\&\, Dyz\overline{F}xz)\}$,

(V) $(EF)\{(x)(Ey)(z)[Axy \,\&\, ByzFxz] \,\&\, (x)(Ey)(z)(Cxy \,\&\, Dyz\overline{F}xz)\}$.

Die Formel (I) ist die obenerwähnte Formel (26) meiner Arbeit. Die Resultanten aller dieser 5 Formeln sind von Schröder nur (allerdings richtig) vermutet worden. Es fällt uns bei diesen Formeln auf, daß die äußersten Individuenoperatoren Allzeichen für x sind (die man übrigens vereinigen kann), und daß F als erstes Argument immer x hat. Wir wollen allgemein eine derartige Formel mit $(EF)(x)\mathfrak{A}_c(Fxc, x)$ bezeichnen. Wir behaupten nun, es gilt

(VI) $$(EF)(x)\mathfrak{A}_c(Fxc, x) \longleftrightarrow (x)(EG)\mathfrak{A}_c(Gc, x)$$

Dabei ist G ein einstelliges Prädikat. Die Richtigkeit dieser Formel ist leicht einzusehen. Zunächst ergibt sich

$$(EF)(x)\mathfrak{A}_c(Fxc, x) \rightarrow (x)(EG)\mathfrak{A}_c(Gc, x)$$

nach den bekannten Regeln des Prädikatenkalküls, da Fxy bei festgehaltenem x ein Prädikat von y ist. Die Umkehrung

$$(x)(EG)\mathfrak{A}_c(Gc, x) \rightarrow (EF)(x)\mathfrak{A}_c(Fxc, x)$$

ist ein besonderer Fall des Auswahlaxioms. Gibt es zu jedem x ein G der obigen Art, so läßt sich jedem x auch eindeutig ein derartiges G zuordnen, das wir mit G^x bezeichnen. Aus $(x)\mathfrak{A}_c(G^x_c, x)$ ergibt sich dann, da G^x_y ein zweistelliges Prädikat ist, $(EF)(x)\mathfrak{A}_c(Fxc, x)$. Die Anwendung von (VI) auf die Formel (I) formt diese um zu

$$(x)(EG)[(Ey)(Axy \,\&\, Gy) \,\&\, (Ez)(Bxz \,\&\, \overline{G}z)].$$

In dem hinter G stehenden Teil der Formel kann x als konstant angesehen werden; wir haben also ein reines Problem des einstelligen Prädikatenkalküls vor uns und finden mit Hilfe der hier gebräuchlichen Methoden[4]) die uns schon bekannte Resultante

$$(x)(Ey)(Ez)(Axy \,\&\, Bxz \,\&\, y \neq z).$$

Aus Formel (II) entsteht durch Anwendung von (VI)

$$(x)(EG)[(Eu)(Axu \,\&\, Gu) \,\&\, (y)(Ez)Bxy(Cyz \,\&\, \overline{G}z)].$$

---

[4]) Vgl. z. B. H. Behmann, Beiträge zur Algebra der Logik und zum Entscheidungsproblem, Math. Annalen 86 (1922).

Hier kann $(E u)$ mit $(E G)$ seine Stellung vertauschen. Nach einigen weiteren, leicht einzusehenden Umformungen ergibt sich

$$(x)(E u)\{A x u \mathbin{\&} (E G)[(y)(y \neq u) G y \mathbin{\&} (y)(E z) B x y (C y z \mathbin{\&} \overline{G} z)]\}.$$

Hier kann die Elimination von G gemäß Formel (6) auf Seite 394 meiner früheren Arbeit vollzogen werden. Man erhält

$$(x)(E u)[A x u \mathbin{\&} (y)(E z) B x y (C y z \mathbin{\&} z \neq u)].$$

Auf dieselbe Weise findet man für die Formeln (III), (IV), (V) bezüglich die Resultanten

$$(x)(E u)(E y)(A x u \mathbin{\&} B x y \mathbin{\&} C y u),$$
$$(x)(E u)(y)(E z)[A x y (B y z \mathbin{\&} D u z) \mathbin{\&} C x u],$$
$$(x)(E u)(E y)(z)(A x u \mathbin{\&} C x y \mathbin{\&} B u z D y z).$$

Bemerkenswert bei den obigen Überlegungen ist, daß gerade das Auswahlaxiom (in der speziellen Form, in der wir es benutzten) als wichtiges logisches Hilfsmittel erscheint. Die Formel (VI) läßt sich übrigens zu folgender Formel verallgemeinern:

$$(E F)(x)\mathfrak{A}_{c_1 \ldots c_n}(F x c_1 \ldots c_n, x) \longleftrightarrow (x)(E G)\mathfrak{A}_{c_1 \ldots c_n}(G c_1 \ldots c_n, x).$$

Hier hat das Prädikat G eine Leerstelle weniger als F.

(Eingegangen am 9. 11. 1934.)

Beweise der Anordnungsaxiome im Rahmen der synthetischen Geometrie.

Von

Heinrich Liebmann in Heidelberg.

1. Die Anordnungsaxiome in der Fassung von Hilbert[1]) lassen sich in einfacher Weise aus dem in meiner „Synthetischen Geometrie"[2]) aufgestellten Axiomensystem ableiten, das die Verknüpfungsbeziehungen in den Vordergrund treten läßt, den Begriff der Anordnung von Elementen vermeidet und als Weiterführung der linearen Verknüpfungsaxiome für den Ausbau der Kegelschnittlehre angesehen werden kann.

Außer den (ebenen) Verknüpfungsaxiomen werden die zuerst von Fano aufgestellten herangezogen, die einerseits die Krummlage der Nebenecken des vollständigen Vierseits, andererseits die Existenz unendlich vieler Punkte der Geraden (durch die wiederholte Konstruktion harmonischer Punkte) sichern. Dazu treten neu die beiden Vertauschungsaxiome, die die Vertauschbarkeit der Punkte in einem Pascalschen Sechseck fordern und sowohl zu den Beweisen des Desarguesschen Satzes und des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie dienen, als auch zur (projektiven) Erzeugung der Kegelschnitte hinüberführen. Als ganz wesentlich kommt für die Kegelschnitte das *E. P.-Axiom* dazu[3]), das einmal die Existenz „innerer" (elliptischer) Punkte (e. P.) als Träger eines Büschels von lauter Treffgeraden fordert, außerdem aber, daß es außer hyperbolischen und parabolischen Punkten, d. h. Punkten „außerhalb" und „auf" dem Kegelschnitt, nur noch e. P. gibt. Hierdurch erst wird auch die Existenz elliptischer Involutionen (z. B. der Paare konjugierter Geraden durch einen e. P.) gewährleistet.

2. Es liegt nahe, zu vermuten, daß die sonst für die Untersuchung von Involutionen und für die Kegelschnitte erforderlichen Annahmen über Anordnung von Elementen jetzt umgekehrt aus der vorausgestellten Axiomatik folgen, die — wie kaum hervorgehoben zu werden braucht — kein Stetigkeitsaxiom aufnimmt, sondern der Erweiterung des Körpers der rationalen Zahlen durch Hinzunahme von Quadratwurzeln entspricht.

---

[1]) Grundl. d. Geom., 7. Aufl., Leipzig/Berlin 1930. Axiomgruppe II, 1—4.

[2]) Leipzig/Berlin 1934, S. 3—14.

[3]) A. a. O. [2]), S. 37.

Man zeichnet irgendeine Gerade als g_∞ aus und definiert „Zwischen" dann mit Hilfe der elliptischen Involutionen[4]): „*B liegt auf g zwischen A und C und* — wegen der Vertauschbarkeit der Elemente eines Involutionspaares dann auch — *zwischen C und A*" (II. 1), *wenn AC und $B, g \times g_\infty = U$ Paare einer elliptischen Involution sind.*

Punkte auf g_∞ können selbstverständlich durch diese Definition nicht mit erfaßt werden.

II. 2 erhält man durch die bekannte Projektion der Punkte von g auf einen festen Kegelschnitt K_2. Es soll gezeigt werden, „daß es zu zwei Punkten A und C stets wenigstens einen Punkt B auf der Geraden $g = (AC)$ gibt, so daß B zwischen A und C liegt". (Wir wollen die auf K_2 projizierten Punkte von g durch die entsprechenden deutschen Buchstaben bezeichnen.) Auf K_2 sind also $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}, \mathfrak{U}$ gegeben; dann gibt es (nach E.P.-Axiom) auf $(\mathfrak{A}\mathfrak{C})$ innere Punkte (e. P.) von K_2, wie sich leicht nachweisen läßt[5]). Die Verbindungslinie von $\mathfrak{U}$ mit irgendeinem dieser Punkte gibt mit K_2 einen zweiten Schnittpunkt $\mathfrak{B}$, der durch Rückprojektion auf g einen Punkt B zwischen A und C liefert.

II. 3 wird durch Verwendung eines Polardreiecks von K_2 bewiesen, wobei zu beachten ist[6]), daß von den drei Ecken eines Polardreiecks stets eine ein e. P., die beiden anderen „hyperbolische Punkte" (äußere Punkte) (h. P.) sind, d. h. daß der h. P. der Träger einer hyperbolischen Involution konjugierter Geraden ist.

Es soll dann gezeigt werden, „daß es unter irgend drei Punkten einer Geraden nicht mehr als einen Punkt gibt, der zwischen den beiden anderen liegt". Die Projektion der Punkte A, B, C, U auf K_2 gibt $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{U}$. Das Dreieck der Nebenecken dieses Vierecks ist Polardreieck von K_2, und sein elliptischer Eckpunkt, der etwa $(\mathfrak{A}\mathfrak{U}) \times (\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ sein möge, zeigt, daß in diesem Falle A zwischen B und C liegt.

3. In der „Synthetischen Geometrie" wurde ein für die Theorie der Kegelschnittpaare (und Büschel) fundamentaler Satz benutzt, ohne den die Büschel mit keinem reellen Schnittpunkt überhaupt nicht zugänglich sind. Er tritt bei Thomae als ein — aus Anordnungsvorstellungen entnommener — Satz auf, der besagt: *Sind A, B, C Ecken eines Dreiecks und sind S und T zwei nicht auf (AB), (BC) oder (CA) gelegene Punkte, sind ferner von den drei „Eckinvolutionen"* d. h. von den drei durch die Paare

[4]) Die Idee, die elliptische Involution zur „Zwischen"-Definition heranzuziehen, sprach Herr Rosenthal gelegentlich aus. Es erweist sich dies in der Tat praktischer, als das ihm sehr nahestehende „Innen" und „Außen" vom Kegelschnitt her einzuführen.

[5]) Vgl. a. a. O. [2]), S. 37 ff.

[6]) Vgl. a. a. O. [2]), S. 50/51.

(AB), (AC); (AS), (AT) ferner (BA), (BC); (BS), (BT) und endlich (CA), (CB); (CS), (CT) je in den Büscheln mit den Trägern A, B, C bestimmten Strahleninvolutionen *zwei elliptisch, so ist die dritte hyperbolisch.*

Die beim Beweis dieses „Thomaeschen Axioms" verwendeten Hilfsmittel[7]) führen leicht zu II. 4, dem Dreiecksaxiom von Pasch. In dualistischer Form sagt dieses Axiom aus: *Sind A, B, C Ecken eines Dreiecks, S und T zwei nicht auf dessen Seiten gelegene Punkte, so folgt aus der Annahme einer elliptischen Eckinvolution die Existenz einer weiteren.*

Bewiesen ist:

$$e_A,\ e_B,\ h_C \quad \text{(2 ellipt., eine hyp. Eckinv.)},$$

zu beweisen ist: aus e_A folgt ein e_B.

Dies folgt, wenn gezeigt ist, daß außer e_A, e_B, h_C nur noch der Fall dreier hyperbolischer Eckinvolutionen h_A, h_B, h_C möglich ist.

Die Begründung von e_A, e_B, h_C verläuft so[8]): Werden mit L_1, L_2 die Schnittpunkte der Strahlenpaare (AS), (AT) der Eckinvolution in A mit (BC) bezeichnet, entsprechend M_1, M_2 und N_1, N_2, heißen ferner Punkte z. B. L_1, L_2 „ungleichartig" wenn der eine ein e. P., der andere ein h. P. eines beliebig durch A, B, C gelegten Kegelschnitts ist, sonst „gleichartige Punkte", so wird dann gezeigt, daß aus L_1, L_2 und zugleich auch M_1, M_2 als „ungleichartigen" Paaren folgt: N_1, N_2 „gleichartig", daß also wenn die Eckinvolutionen (A) und (B) elliptisch sind, die dritte (C) hyperbolisch ist.

Sind L_1, L_2 und zugleich auch M_1, M_2 „gleichartige" Paare, so soll jetzt gezeigt werden: N_1, N_2 „gleichartig". Dabei kommen nur die Fälle

$$\begin{array}{lcl} L_1\,(\text{e. P.}),\ L_2\,(\text{e. P.}) & \text{und} & L_1\,(\text{e. P.}),\ L_2\,(\text{e. P.}) \\ M_1\,(\text{e. P.}),\ M_2\,(\text{e. P.}) & & M_1\,(\text{h. P.}),\ M_2\,(\text{h. P.}) \end{array}$$

in Betracht. Dann folgt aus dem Hilfssatz[9]) im ersten Falle, daß N_1, N_2 beide e. P., im zweiten Falle beide h. P. sind, also immer N_1, N_2 „gleichartig" in bezug auf den durch A, B, C gelegten Kegelschnitt. Damit ist für die Eckinvolutionen der Fall h_A, h_B, h_C nachgewiesen.

Dagegen ist für die Eckinvolution der Fall e_A, h_B, h_C unmöglich, denn das würde bedeuten

$$\begin{array}{rl} & L_1\,(\text{e. P.}),\ L_2\,(\text{h. P.}) \\ & M_1\,(\text{e. P.}),\ M_2\,(\text{e. P.}) \\ \text{oder} & M_1\,(\text{h. P.}),\ M_2\,(\text{h. p.}). \end{array}$$

---

[7]) A. a. O. [2]) S. 52 ff.

[8]) A. a. O. [2]) S. 54/55. Berichtigend nachzutragen ist, daß es dort, S. 54 Zeile 12 von oben „Deckstand ist $(BC) \times (M^* N^*)$", Zeile 14 von oben „(Für C, B, $M M^*$ ... aus der angenommenen Gleichartigkeit ...", S. 55, Zeile 5 von oben „(N_{12}, N_{21} gleichartig!)" heißen muß.

[9]) A. a. O. [2]) S. 54 oben.

Es wären also nach demselben Hilfssatz N_1 und N_2 „ungleichartig", d. h. die Eckinvolution in C ist nicht hyperbolisch, sondern elliptisch. Also folgt aus der Annahme einer elliptischen Eckinvolution das Bestehen einer weiteren, und damit ist das Paschsche Dreiecksaxiom bewiesen.

Man erkennt hieraus einerseits, daß das Paschsche Axiom sich in die vorangestellte Axiomatik als beweisbarer Satz einordnet, und daß andererseits durch seine Verbindung mit dem „Thomaeschen Axiom" seine Tragweite für die Lehre von den Kegelschnittbüscheln hervortritt. Mit dem beim Hinausgehen über die linearen Gebilde und Übergang zur Kegelschnittlehre fast als zwangsläufige, aber tatsächlich als *neue* Grundannahme zu fordernden E. P.-Axiom werden demnach alle Anordnungsaxiome zu beweisbaren Sätzen der synthetischen Geometrie.

(Eingegangen am 30. 9. 1934.)

Eine Bemerkung über den Desarguesschen und den Pascalschen Satz.

Von

O. Bottema in Sappemeer (Niederlande).

In der Entwicklung der projektiven Geometrie der Ebene spielen bekanntlich der Desarguessche und der Pascalsche Satz eine hervorragende Rolle.

Führt man neben den Axiomen der Verknüpfung den Desarguesschen Satz als Axiom ein (wir wollen es das Axiom D nennen), so ist man imstande, den Isomorphismus des entwickelten Systems mit einer Koordinatengeometrie nachzuweisen. Der Koordinatenbegriff kann dabei in verschiedenen Weisen definiert werden (vgl. die Streckenrechnung nach Hilbert, die Algebra der Dehnungsgrößen nach Schwan und Dehn, den geometrischen Kalkül von Hessenberg, die Punktalgebra von Veblen und Young usw.). Das entstandene System hat die Körpereigenschaften; es ist aber die Multiplikation nicht kommutativ. Um die projektive Geometrie weiter zu entwickeln, muß man noch ein Axiom einführen, welches diese Kommutativität verbürgt. Bekanntlich kann man dafür den Pascalschen Satz wählen (wir nennen ihn das Axiom P). Damit ist dann die projektive Geometrie der Ebene in gewisser Hinsicht fertig und es kann z. B. der Fundamentalsatz bewiesen werden.

Das Axiom P ist vom Axiom D unabhängig, wie aus der Existenz nicht-kommutativer Körper hervorgeht. Umgekehrt ist aber das Axiom D nicht vom Axiom P unabhängig. Nach einem Satz von Hessenberg ist der Desarguessche Satz eine Folge des Pascalschen Satzes. Man kann also die ebene projektive Geometrie entwickeln, indem man neben den Verknüpfungsaxiomen sofort das Axiom P einführt. Es geht dabei aber unzweifelhaft der Reiz verloren, welcher darin liegt, zuerst die weitgehenden Konsequenzen des Axioms D zu entwickeln.

Es entsteht die Frage nach der Existenz eines Axioms, das zusammen mit dem Axiom D die projektive Geometrie ergibt, aber so, daß das Axiom D nicht eine Folge des neuen Axioms ist. Es ist dann das Axiom P in zwei voneinander unabhängige Axiome gespalten.

Die Spaltung gelingt durch Einführung eines Axioms, das die Gültigkeit des Pascalschen Satzes nicht für sämtliche einbeschriebenen Sechsecke, sondern nur für eine gewisse Teilmenge postuliert. Es genügt dabei

offenbar nicht, die Existenz *einer* Pascalkonfiguration vorauszusetzen, denn auch in der nicht-Pascalschen Geometrie kommen immer Sechsecke mit der Pascaleigenschaft vor.

Wir nehmen folgendes Axiom P' an und zeigen, daß es zusammen mit dem Axiom D die projektive Geometrie ergibt, und daß das Axiom D unabhängig vom Axiom P' ist.

Axiom P' (schwaches Pascal-Axiom): *Es gibt zwei Geraden l und m, zwei Punkte P und Q auf l, und zwei Punkte R und S auf m, so daß für einen willkürlichen Punkt X auf l und einen willkürlichen Punkt Y auf m das Sechseck $X\,Y\,P\,R\,Q\,S$ die Pascaleigenschaft hat.*

Wir setzen somit die Gültigkeit des Pascalschen Satzes nur voraus für sämtliche Sechsecke mit den vier festen Eckpunkten P, R, Q und S.

Die sechs Punkte und den Schnittpunkt O von l und m können wir als untereinander verschieden annehmen.

Auf Grund des Axioms D können wir die Punkte der Ebene durch Koordinatentripel und die Geraden durch lineare Gleichungen darstellen. Wir legen den Punkt 0, 0, 1 nach O, die Gerade $z = 0$ auf $Q\,S$, 1, 0, 1 nach P, 0, 1, 1 nach R. Haben X und Y bzw. die Koordinaten $\xi, 0, 1$ und $0, \eta, 1$, so findet man für diejenigen der Schnittpunkte $L_1 = (X\,Y) \times (R\,Q)$, $L_2 = (Y P) \times (Q\,S)$ und $L_3 = (P\,R) \times (S\,X)$ bzw.:

$$L_1\colon\ \xi,\ -\eta,\ 0;\quad L_2\colon\ \eta - 1,\ \eta,\ \eta;\quad L_3\colon\ \xi,\ \xi - 1,\ \xi.$$

Wenn die Gerade $L_2 L_3$ durch O geht, dann ist $\xi + \eta = 1$, und die Gleichung dieser Geraden ist $\eta\,x + \xi\,y = 0$. Es liegt dann auch L_1 auf dieser Geraden und wir haben eine Bestätigung des Satzes, daß der sogenannte spezielle Pascalsche Satz eine Konsequenz des Axioms D ist.

Geht $L_2 L_3$ nicht durch O, dann ist $\xi + \eta - 1 \neq 0$ und die Gleichung dieser Geraden ist

$$(\xi + \eta - 1)^{-1}\,\eta\,x + (\xi + \eta - 1)^{-1}\,\xi\,y - z = 0$$

oder

$$\eta\,x + \xi\,y - (\xi + \eta - 1)\,z = 0.$$

Das Axiom P' sagt nun aus, daß L_1 auf dieser Geraden liegt. Man hat also

$$\eta\,\xi - \xi\,\eta = 0.$$

Für je zwei Zahlen ξ und η gilt also das kommutative Gesetz der Multiplikation. Der Koordinatenkörper ist ein kommutativer Körper und der Pascalsche Satz gilt für jedes Sechseck.

Um die Unabhängigkeit des Axioms D vom Axiom P' zu beweisen, genügt es, eine Geometrie anzugeben, wo neben den Verknüpfungsaxiomen

das Axiom P' gilt, nicht aber das Axiom D. Ein solches System finden wir in dem Hilbertschen Beispiel einer nicht-Desarguesschen Geometrie. Hilbert nimmt bekanntlich in der Euklidischen Ebene eine gewisse Ellipse K an. Die Punkte der Ebene sind auch Punkte der neuen Geometrie, die Geraden, welche K nicht treffen, sind Gerade der neuen Geometrie, die übrigen Geraden werden als solche der neuen Geometrie betrachtet, nachdem man ihre Strecken innerhalb K durch gewisse Kreisbögen ersetzt hat. Augenscheinlich ist in dieser Geometrie das Axiom P' richtig. Man nehme außerhalb K ein Geradenpaar l und m an und wähle P, Q, R und S so, daß die Geraden PR, RQ und QS außerhalb K liegen. Die Punkte L_1, L_2 und L_3 liegen dann für jede Wahl von X und Y außerhalb K und sind also kollinear in der neuen Geometrie, weil sie es im gewöhnlichen Sinne sind.

(Eingegangen am 2. 11. 1934.)

Infinitesimale Verbiegungen zueinander projektiver Flächen.

Von

Robert Sauer in Aachen.

Die infinitesimale Flächenverbiegung steht, obwohl es sich um den metrischen Begriff der Bogenlänge handelt, in einer engen Beziehung zur projektiven Geometrie. So hat schon G. Darboux[1]) bemerkt, daß aus einer vorgegebenen infinitesimalen Verbiegung einer Fläche für jede zu ihr projektive oder dualprojektive Fläche eine infinitesimale Verbiegung hergeleitet werden kann. Diesen merkwürdigen Zusammenhang zwischen metrischer und projektiver Geometrie suche ich in der vorliegenden Arbeit durch Einführung des Begriffs des *Schraubrisses* zu klären.

Bei einer infinitesimalen Verbiegung einer Fläche X erfährt jedes Flächenelement eine infinitesimale Schraubung. Durch Auftragen der Schraubenkoordinaten dieser Schraubungen als Punktkoordinaten wird ein Flächenpaar Y, Y^0, das wir *Schraubriß* nennen wollen, definiert (§ 1). Es ergibt sich dann die bemerkenswerte Tatsache, daß der Zusammenhang zwischen Fläche X und Schraubriß Y, Y^0 erhalten bleibt, wenn die Linienkoordinaten der Flächentangenten und die Schraubenkoordinaten des Schraubrisses derselben linearen Transformation unterzogen werden (§§ 2, 3). Aus diesem allgemeinen Satz über die projektiv- und dualprojektiv-invariante Verknüpfung von Fläche und Schraubriß lassen sich als unmittelbare Folgerungen verschiedene projektive Eigenschaften[2]), [3]) der infinitesimalen Flächenverbiegung herleiten (§ 4).

Bisher hat man in der Theorie der infinitesimalen Flächenverbiegung statt des Schraubrisses lediglich den Begriff des Drehrisses[4]), [5]) benutzt. Bei Beschränkung auf den Drehriß wird jedoch nur die affine Invarianz von Verbiegungseigenschaften verständlich; denn Fläche und Drehriß sind in ähnlichem Sinne affin verknüpft, in dem Fläche und Schraubriß projektiv verknüpft sind.

---

[1]) G. Darboux, Théorie des surfaces IV (1925), S. 78; vgl. dazu auch H. Liebmann, Münchener Berichte, math.-phys. Klasse **50** (1920), S. 227.

[2]) R. Sauer, Math. Annalen **108** (1933), S. 673—693.

[3]) R. Sauer, Math. Zeitschr. **38** (1934), S. 468—475.

[4]) W. Blaschke, Int. Congr. of Math. Cambridge 1912, Proceedings **2** (1913), S. 291—294.

[5]) M. Lagally, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **4** (1924), S. 377—383.

§ 1.

Definition des Schraubrisses.

1. Begriff der infinitesimalen Verbiegung[6]). Als infinitesimale Verbiegung bezeichnet man eine infinitesimale Deformation

$$\mathfrak{x}^*(u,v) = \mathfrak{x}(u,v) + \varepsilon\,\mathfrak{x}^0(u,v) \qquad (\varepsilon = \text{konst}) \tag{1}$$

einer Fläche X in eine Fläche X^* derart, daß entsprechende Bogenlängen auf X und X^* für $\varepsilon \to 0$ in der Ordnung ε übereinstimmen. Aus der Potenzentwicklung

$$d\,\mathfrak{x}^{*2} = d\,\mathfrak{x}^2 + 2\varepsilon\,d\,\mathfrak{x}\,d\,\mathfrak{x}^0 + \varepsilon^2\,d\,\mathfrak{x}^{02}$$

folgt dann $d\,\mathfrak{x}\,d\,\mathfrak{x}^0 = 0$, also

$$\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_u^0 = \mathfrak{x}_v\mathfrak{x}_v^0 = \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v^0 + \mathfrak{x}_v\mathfrak{x}_u^0 = 0. \tag{2}$$

Die unteren Zeiger bedeuten partielle Differentiation. Man kann dem Problem der infinitesimalen Verbiegung auch eine finite Fassung geben: Die Linienelemente der Fläche[7]) X^0 mit dem Ortsvektor $\mathfrak{x}^0(u,v)$ liegen senkrecht zu den entsprechenden Linienelementen der gegebenen Fläche X.

2. Drehriß. Bei der infinitesimalen Verbiegung von X erfährt jedes Flächenelement eine kleine Drehung und eine kleine Verschiebung. Der Vektor $\varepsilon\,\mathfrak{y}(u,v)$ der kleinen Drehung ist bekanntlich[5]) mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^0$ auf Grund von (2) durch die beiden Vektorgleichungen

$$\mathfrak{x}_u^0 = \mathfrak{y}\times\mathfrak{x}_u, \quad \mathfrak{x}_v^0 = \mathfrak{y}\times\mathfrak{x}_v \tag{3}$$

verknüpft. Die Fläche[7]) Y mit dem Ortsvektor $\mathfrak{y}(u,v)$ heißt nach Blaschke *Drehriß*. Da in der Integrabilitätsbedingung von (3) $\mathfrak{y}_v\times\mathfrak{x}_u + \mathfrak{x}_v\times\mathfrak{y}_u = 0$ die Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ symmetrisch auftreten, ist die Beziehung zwischen Fläche X und Drehriß Y vertauschbar[5]); für X als Drehriß erhält man eine infinitesimale Verbiegung von Y vermöge

$$\mathfrak{y}_u^0 = \mathfrak{x}\times\mathfrak{y}_u, \quad \mathfrak{y}_v^0 = \mathfrak{x}\times\mathfrak{y}_v. \tag{4}$$

Dabei entsprechen sich die Flächen[7]) Y^0 mit dem Ortsvektor $\mathfrak{y}^0(u,v)$ und Y durch senkrechte Linienelemente in derselben Weise wie X^0 und X.

Aus der Integrabilitätsbedingung von (3) und (4) folgt[5])

$$\begin{aligned} \mathfrak{y}_u &= \mu\,\mathfrak{x}_u + \lambda\,\mathfrak{x}_v, & \mathfrak{y}_v &= \nu\,\mathfrak{x}_u - \mu\,\mathfrak{x}_v, \\ \mathfrak{y}_u^0 &= \mu\,\mathfrak{x}\times\mathfrak{x}_u + \lambda\,\mathfrak{x}\times\mathfrak{x}_v, & \mathfrak{y}_v^0 &= \nu\,\mathfrak{x}\times\mathfrak{x}_u - \mu\,\mathfrak{x}\times\mathfrak{x}_v. \end{aligned} \tag{5}$$

λ, μ, ν sind Funktionen von u und v.

3. Verschiebungsriß. Wir denken uns die Drehungen der Flächenelemente von X um Drehachsen ausgeführt, die durch den

[6]) In Nr. 1 u. 2 sind bekannte Tatsachen der Biegungstheorie kurz zusammengestellt.

[7]) X^0, Y und Y^0 können auch zu Kurven und Punkten entarten; vgl. Nr. 5.

Koordinatenanfangspunkt O gelegt sind. Dann sind die zu den Drehungen hinzukommenden Verschiebungen eindeutig bestimmt. Wir zeigen, daß der Vektor dieser Verschiebungen gleich dem in Nr. 2 definierten Vektor $\varepsilon\mathfrak{y}^0$ ist: Nach (1) ist $\varepsilon\mathfrak{x}^0$ die Gesamtverschiebung eines Flächenpunktes von X. Wir subtrahieren davon die Verschiebung $\varepsilon\mathfrak{y}\times\mathfrak{x}$, welche durch die kleine Drehung des Flächenelements um die durch O gelegte Drehachse bewirkt wird. Die Differenz $\varepsilon(\mathfrak{x}^0-\mathfrak{y}\times\mathfrak{x})$ ist tatsächlich gleich $\varepsilon\mathfrak{y}^0$; denn aus (3) und (4) folgt $\mathfrak{y}^0_u-\mathfrak{x}^0_u=(\mathfrak{x}\times\mathfrak{y})_u$, $\mathfrak{y}^0_v-\mathfrak{x}^0_v=(\mathfrak{x}\times\mathfrak{y})_v$, also bei passender Wahl der Integrationskonstanten

$$\mathfrak{y}^0-\mathfrak{x}^0=\mathfrak{x}\times\mathfrak{y}. \tag{6}$$

Die Fläche Y^0 mit dem Ortsvektor $\mathfrak{y}^0(u,v)$ bezeichne ich nach ihrer kinematischen Bedeutung als *Verschiebungsriß*.

4. Schraubriß. Das Flächenpaar Y, Y^0 fassen wir unter dem Namen *Schraubriß* zusammen. Abgesehen von dem konstanten Faktor ε sind die rechtwinkligen Komponenten $y_1, y_2, y_3, y_1^0, y_2^0, y_3^0$ der Ortsvektoren $\mathfrak{y}, \mathfrak{y}^0$ zweier einander zugeordneten Schraubrißpunkte nichts anderes als die rechtwinkligen Schraubenkoordinaten der Schraubungen, welche die Flächenelemente von X bei der infinitesimalen Verbiegung (1) erfahren. Spezialisiert sich die Schraubung eines Flächenelements zu einer reinen Drehung (um eine i. a. nicht durch O gehende Drehachse), so ist $\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}^0\equiv y_1y_1^0+y_2y_2^0+y_3y_3^0=0$ und die Schraubenkoordinaten werden zu Linienkoordinaten.

Während der Drehriß von der Wahl des Anfangspunktes O unabhängig ist, ändert sich der Verschiebungsriß wegen (6) bei Verlegung des Anfangspunktes. Drehriß und Verschiebungsriß sind durch (1) nur bis auf einen willkürlichen gemeinsamen Maßstab bestimmt, da ein beliebiger konstanter Faktor von ε mit der Funktion $\mathfrak{x}^0(u,v)$ zusammengenommen werden kann. Addiert man zu den Funktionen $\mathfrak{y}(u,v)$ und $\mathfrak{y}^0(u,v)$ konstante Vektoren, so werden Drehriß und Verschiebungsriß parallel verschoben und zur ursprünglichen infinitesimalen Verbiegung kommt somit noch eine infinitesimale Bewegung hinzu.

Da in (6) $\mathfrak{x}^0$ und $\mathfrak{y}^0$ und nach Nr. 2 in der Integrabilitätsbedingung von (3) und (4) $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ symmetrisch vorkommen, ist die Beziehung zwischen den Flächenpaaren X, X^0 und Y, Y^0 wechselseitig. Jedes der beiden Flächenpaare kann demnach als Schraubriß für eine infinitesimale Verbiegung der ersten Fläche des anderen Paares aufgefaßt werden.

5. Sonderfälle. a) Der Schraubriß entartet zu zwei Kurven, wenn die gegebene Fläche X eine Regelfläche ist und mit Geradhaltung

der Erzeugenden verbogen wird. In diesem Fall bleibt die Schränkung[8]) für jede Erzeugende bei der Verbiegung in der Ordnung ε ungeändert. Die sämtlichen Flächenelemente längs einer Erzeugenden werden dann bei der Verbiegung alle durch die nämliche Schraubung bewegt und liefern infolgedessen ein einziges Punktepaar des Schraubrisses.

b) Der Schraubriß entartet zu zwei Punkten, wenn sich die infinitesimale Verbiegung (1) zu einer reinen Bewegung spezialisiert und somit alle Flächenelemente der gegebenen Fläche X die nämliche Schraubung erfahren.

§ 2.

Projektive Invarianz des Schraubrisses.

6. Projektive Abbildung der Fläche X. Die gegebene Fläche X werde durch

$$x_i' = \frac{a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 + a_{i4}}{a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44}} \tag{7}$$

$$(i = 1, 2, 3;\ x_i, x_i' = \text{rechtwinklige Punktkoordinaten})$$

mit nichtverschwindender Determinante $|a_{ik}|$ in eine zu ihr projektive Fläche X' abgebildet. Es ist für das Folgende zweckmäßig diese Abbildung in rechtwinkligen Linienkoordinaten darzustellen:

Wir bezeichnen mit p und q bzw. p' und q' die Tangenten der Kurven $v =$ konst und $u =$ konst auf der Fläche X bzw. X'. Die rechtwinkligen Linienkoordinaten p_i $(i = 1, 2 \ldots 6)$ von p sind bis auf einen willkürlichen Faktor $\varrho(u, v) \neq 0$ die Komponenten der Vektoren $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x} \times \mathfrak{x}_u$; analog bestimmen sich die Linienkoordinaten q_i, p_i', q_i'. Wir normieren die Proportionalitätsfaktoren der p_i und q_i durch $\varrho = 1$ und der p_i' und q_i' durch

$$\varrho' = (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44})^2. \tag{8}$$

Bei dieser Normierung ergeben sich dann aus[9])

$$\begin{aligned} p_i &= (\mathfrak{x}_u \,|\, \mathfrak{x} \times \mathfrak{x}_u), & q_i &= (\mathfrak{x}_v \,|\, \mathfrak{x} \times \mathfrak{x}_v), \\ p_i' &= (\varrho' \mathfrak{x}_u' \,|\, \varrho' \mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}_u'), & q_i' &= (\varrho' \mathfrak{x}_v' \,|\, \varrho' \mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}_v') \end{aligned} \tag{9}$$

nach einer einfachen Rechnung für die Linienkoordinaten der Tangenten die linearen Transformationen

$$p_i' = \sum_{k=1}^{6} c_{ik} p_k, \quad q_i' = \sum_{k=1}^{6} c_{ik} q_k \tag{10}$$

---

[8]) Unter Schränkung versteht man den Grenzwert $\left(\dfrac{\text{Winkel}}{\text{kürzester Abstand}}\right)$ zweier Erzeugenden e_1, e_2 einer Regelfläche für $e_2 \to e_1$.

[9]) Die kurze Schreibweise in (9) bedeutet: Die 6 Linienkoordinaten p_i sind gleich den $2 \cdot 3$ Komponenten der Vektoren $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x} \times \mathfrak{x}_u$.

mit **konstanten Koeffizienten** c_{ik}. Die c_{ik} sind zweireihige Unterdeterminanten aus der Koeffizientenmatrix $\|a_{ik}\|$, nämlich

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= a_{11}a_{44} - a_{14}a_{41}, \ldots c_{41} = a_{31}a_{24} - a_{34}a_{21}, \ldots \\
c_{12} &= a_{12}a_{44} - a_{14}a_{42}, \ldots c_{42} = a_{32}a_{24} - a_{34}a_{22}, \ldots \\
c_{13} &= a_{13}a_{44} - a_{14}a_{43}, \ldots c_{43} = a_{33}a_{24} - a_{34}a_{23}, \ldots \\
c_{14} &= a_{13}a_{42} - a_{12}a_{43}, \ldots c_{44} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \ldots \\
c_{15} &= a_{11}a_{43} - a_{13}a_{41}, \ldots c_{45} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}, \ldots \\
c_{16} &= a_{12}a_{41} - a_{11}a_{42}, \ldots c_{46} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}, \ldots .
\end{aligned} \tag{11}
$$

Die durch Punkte angedeuteten Ausdrücke ergeben sich aus den links vorangehenden, indem man die ersten Indizes 1, 2, 3 (— bei Festhaltung des Index 4 —) zyklisch vertauscht.

7. **Infinitesimale Verbiegungen der zu X projektiven Flächen X'.** Die Integrierbarkeitsbedingungen von (5) lauten in Linienkoordinaten

$$\frac{\partial}{\partial v}(\mu p_i + \lambda q_i) = \frac{\partial}{\partial u}(\nu p_i - \mu q_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots 6).$$

Da die c_{ik} von u, v unabhängig sind, ergibt sich nach (10) hieraus

$$\frac{\partial}{\partial v}(\mu p_i' + \lambda q_i') = \frac{\partial}{\partial u}(\nu p_i' - \mu q_i').$$

Nach (9) und (8) folgt weiter

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v}(\mu' \mathfrak{x}_u' + \lambda' \mathfrak{x}_v') &= \frac{\partial}{\partial u}(\nu' \mathfrak{x}_u' - \mu' \mathfrak{x}_v'), \\
\frac{\partial}{\partial v}(\mu' \mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}_u' + \lambda' \mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}_v') &= \frac{\partial}{\partial u}(\nu' \mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}_u' - \mu' \mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}_v')
\end{aligned} \tag{12}
$$

mit

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\mu'}{\mu} = \frac{\nu'}{\nu} = (a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44})^2. \tag{13}$$

Durch den Ansatz

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{y}_u' &= \mu' \mathfrak{x}_u' + \lambda' \mathfrak{x}_v', & \mathfrak{y}_v' &= \nu' \mathfrak{x}_u' - \mu' \mathfrak{x}_v', \\
\mathfrak{y}_u'^0 &= \mu' \mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}_u' + \lambda' \mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}_v', & \mathfrak{y}_v'^0 &= \nu' \mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}_u' - \mu' \mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}_v'
\end{aligned} \tag{14}
$$

sind zwei Vektorfunktionen $\mathfrak{y}'$ und $\mathfrak{y}'^0$ bis auf additive konstante Vektoren bestimmt, da nach (12) die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind. Wir können nach (14) weiter

$$\mathfrak{x}_u'^0 = \mathfrak{y}' \times \mathfrak{x}_u', \quad \mathfrak{x}_v'^0 = \mathfrak{y}' \times \mathfrak{x}_v' \tag{15}$$

ansetzen und lesen dann aus der Analogie der Gleichungen (15) und (3) folgendes Ergebnis ab:

Aus einer vorgegebenen infinitesimalen Verbiegung der Fläche X läßt sich für jede zu X projektive Fläche X' eine infinitesimale Verbiegung herleiten, indem man nach (13), (14) *und* (15) *die Funktionen* $\mathfrak{y}'$ *und* $\mathfrak{x}'^0$ *aus den bekannten Funktionen* $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}^0$, $\mathfrak{y}$, λ, μ, ν *und* $\mathfrak{x}'$ *berechnet.*

Dadurch ist zunächst der bereits erwähnte Satz von Darboux[1]) auf eine neue[10]) Weise abgeleitet (vgl. auch Nr. 8 Schluß). Das Hauptziel unserer Untersuchung besteht jedoch darin, aus (14) die Transformation des Schraubrisses bei der projektiven Abbildung der Fläche X zu bestimmen.

8. Lineartransformation des Schraubrisses bei der projektiven Abbildung der Fläche X. Nach Einsetzen von (7) in die Komponentengleichungen von (14) und nach Integrieren dieser Gleichungen folgt

$$
(16)\qquad \begin{aligned}
y_1' &= c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3 + c_{14}y_1^0 + c_{15}y_2^0 + c_{16}y_3^0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_1'^0 &= c_{41}y_1 + c_{42}y_2 + c_{43}y_3 + c_{44}y_1^0 + c_{45}y_2^0 + c_{46}y_3^0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Die Integrationskonstanten sind dabei, was nach Nr. 4 zulässig ist, gleich Null gesetzt. Da die Komponenten von $\mathfrak{y}/\mathfrak{y}^0$ bzw. $\mathfrak{y}'/\mathfrak{y}'^0$ die Schraubenkoordinaten des Schraubrisses sind, liest man aus (10) und (16) folgenden Satz ab:

Aus einer gegebenen Fläche X und einem gegebenen Schraubriß Y, Y^0 von X erhält man für jede zu X projektive Fläche X' einen Schraubriß Y', Y'^0, indem man die Linienkoordinaten der Tangenten der Fläche X und die Schraubenkoordinaten des Schraubrisses Y, Y^0 der nämlichen linearen Transformation unterwirft. Im 6-dimensionalen Raum der Linien- und Schraubenkoordinaten sind also Fläche und Schraubriß projektiv-invariant verknüpft.

Über den geometrischen Zusammenhang der Flächenpaare Y, Y^0 und Y', Y'^0 ist auf Grund von (16) folgendes zu sagen:

Im allgemeinen hängt jede der beiden Flächen Y' und Y'^0 von den beiden Flächen Y, Y^0 ab; jedes zusammengehörige Punktepaar von Y, Y^0 wird in ein Punktepaar von Y', Y'^0 abgebildet. In zwei Fällen vereinfacht sich der Zusammenhang:

a) Bleibt bei der projektiven Abbildung (7) die uneigentliche Ebene fest ($a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0$; *Affinität*), so ist $c_{i4} = c_{i5} = c_{i6} = 0$ für $i = 1, 2, 3$ und der Drehriß Y' ist affin zum Drehriß Y.

b) Bleibt dagegen der Nullpunkt fest ($a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$), so ist $c_{i1} = c_{i2} = c_{i3} = 0$ für $i = 4, 5, 6$ und der Verschiebungsriß Y'^0 ist affin zum Verschiebungsriß Y^0. Im allgemeinen sind natürlich die Flächen Y, Y' bzw. Y^0, Y'^0 zueinander nicht affin und auch nicht projektiv.

Die in Nr. 7 behandelte Aufgabe, aus einer infinitesimalen Verbiegung von X infinitesimale Verbiegungen der zu X projektiven Flächen X' her-

---

[10]) Vgl. hierzu auch Math. Annalen **108** (1933), S. 690—692, und **109** (1933), S. 160.

zuleiten, vereinfacht sich nach (16) und wegen $\mathfrak{y}'^0 - \mathfrak{x}'^0 = \mathfrak{x}' \times \mathfrak{y}'$ (vgl. (6)) folgendermaßen: *Aus den gegebenen Funktionen* $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}^0$ *und* $\mathfrak{y}$ *kann die die infinitesimale Verbiegung von* X' *kennzeichnende Funktion* $\mathfrak{x}'^0$ *ohne Differentiation und Integration lediglich durch algebraische Operationen berechnet werden.* Man kann auch die Komponenten von $\mathfrak{y}$ eliminieren und erhält nach einigen Zwischenrechnungen

$$(17)\quad x_i'^0 = \frac{1}{a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}} \big(A_{i1}x_1^0 + A_{i2}x_2^0 + A_{i3}x_3^0 - A_{i4}(x_1x_1^0 + x_2x_2^0 + x_3x_3^0)\big);$$

die A_{ik} sind die algebraischen Komplemente der a_{ik} in der Determinante $|a_{ik}|$. Zwei Sonderfälle von (17) finden sich bei Darboux[11]).

9. Beispiel. Die vorgegebene Fläche X ist eine Drehfläche; die infinitesimale Verbiegung von X ist der eingliedrigen Biegungsgruppe entnommen, bei der alle Biegungsflächen von X wieder Drehflächen sind[12]). Dann hat man

$$(X)\qquad x_1 = u\cos v,\qquad x_2 = u\sin v,\qquad x_3 = f(u);$$

$$(X^0)\qquad x_1^0 = -u(\cos v + v\sin v),\qquad x_2^0 = u(-\sin v + v\cos v),$$

$$x_3^0 = \int\frac{du}{f'}\qquad \left(' = \frac{d}{du}\right).$$

Daraus ergibt sich nach (3) und (4) der Schraubriß

$$(Y)\qquad y_1 = \frac{1}{f'}\sin v,\qquad y_2 = -\frac{1}{f'}\cos v,\qquad y_3 = v;$$

$$(Y^0)\qquad y_1^0 = \left(\frac{f}{f'} - u\right)\cos v,\qquad y_2^0 = \left(\frac{f}{f'} - u\right)\sin v,\qquad y_3^0 = \int\frac{du}{f'} - \frac{u}{f'}.$$

Der Drehriß Y ist eine Wendelfläche, der Verschiebungsriß Y^0 eine Drehfläche.

Durch

$$x_1' = \frac{1}{x_1},\qquad x_2' = \frac{x_2}{x_1},\qquad x_3' = \frac{x_3}{x_1}$$

wird die gegebene Drehfläche X abgebildet in die zu X projektive Fläche

$$(X')\qquad x_1' = \frac{1}{u\cos v},\qquad x_2' = \operatorname{tg} v,\qquad x_3' = \frac{f}{u\cos v}.$$

Nach (16) ergibt sich für X' der Schraubriß

$$(Y')\quad y_1' = -\frac{1}{f'}\sin v = -y_1,\quad y_2' = \int\frac{du}{f'} - \frac{u}{f'} = y_3^0,\quad y_3' = \left(u - \frac{f}{f'}\right)\sin v = -y_2^0;$$

$$(Y'^0)\quad y_1'^0 = \left(\frac{f}{f'} - u\right)\cos v = y_1^0,\quad y_2'^0 = -v = -y_3,\quad y_3'^0 = -\frac{1}{f'}\cos v = y_2.$$

---

[11]) G. Darboux, Théorie des surfaces 4 (1925), S. 76 und 78.

[12]) Vgl. auch Math. Annalen 108 (1933), S. 692—693.

Aus (6) oder (17) folgt schließlich

$$(X'^0)\quad x_1'^0 = \frac{1}{u\cos v}\left(f\int\frac{du}{f} - u^2\right),\ x_2'^0 = \operatorname{tg} v - v,\ x_3'^0 = -\frac{1}{u\cos v}\int\frac{du}{f}.$$

§ 3.

Dualprojektive Invarianz des Schraubrisses.

10. Dualprojektive Abbildung der Fläche X. Die gegebene Fläche X werde durch

$$(18)\qquad \xi_i' = \frac{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}}{a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}}$$

$$(i = 1, 2, 3;\ \xi_i' = \text{rechtwinklige Ebenenkoordinaten})$$

mit Determinante $|a_{ik}| \neq 0$ in eine zu X dualprojektive Fläche Ξ' abgebildet. Wir stellen die Abbildung wieder in Linienkoordinaten dar und bezeichnen mit p, q die Tangenten der Kurven $v = \text{const}$, $u = \text{const}$ auf X, mit π', $\varkappa'$ die Tangenten der zu $v = \text{const}$, $u = \text{const}$ konjugierten Kurven $\bar v = \text{const}$, $\bar u = \text{const}$ auf Ξ'. Wie in (9) bzw. dual zu (9) setzen wir für die Linienkoordinaten der Tangenten

$$(19)\qquad \begin{aligned} p_i &= (\mathfrak{x}_u \,|\, \mathfrak{x}\times\mathfrak{x}_u), & q_i &= (\mathfrak{x}_v \,|\, \mathfrak{x}\times\mathfrak{x}_v),\\ \pi_i' &= (\varrho'\mathfrak{w}'\times\mathfrak{w}_u' \,|\, \varrho'\mathfrak{w}_u'), & \varkappa_i' &= (\varrho'\mathfrak{w}'\times\mathfrak{w}_v' \,|\, \varrho'\mathfrak{w}_v'), \end{aligned}$$

wobei ϱ' wieder durch (8) gegeben ist und $\mathfrak{w}'$ den Vektor mit den Komponenten ξ_i' bedeutet. Ebenso wie in Nr. 6 folgt für die Linienkoordinaten eine Lineartransformation mit konstanten Koeffizienten, nämlich

$$(20)\qquad \pi_i' = \sum_{k=1}^{6} c_{i\pm3,k}\,p_k,\qquad \varkappa_i' = \sum_{k=1}^{6} c_{i\pm3,k}\,q_k\qquad (c_{ik}\ \text{vgl. (11)});$$

die rechten Seiten von (20) folgen aus (10) durch Vertauschung der drei ersten mit den drei letzten Zeilen.

11. Infinitesimale Verbiegungen der zu X dualprojektiven Flächen Ξ'. Aus den Integrierbarkeitsbedingungen von (5) folgt auf dieselbe Weise wie in Nr. 7

$$(21)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{y}_u' &= \mu'\mathfrak{w}'\times\mathfrak{w}_u' + \lambda'\mathfrak{w}'\times\mathfrak{w}_v', & \mathfrak{y}_v' &= \nu'\mathfrak{w}'\times\mathfrak{w}_u' - \mu'\mathfrak{w}'\times\mathfrak{w}_v',\\ \mathfrak{y}_u'^0 &= \mu'\mathfrak{w}_u' + \lambda'\mathfrak{w}_v', & \mathfrak{y}_v'^0 &= \nu'\mathfrak{w}_u' - \mu'\mathfrak{w}_v', \end{aligned}$$

wobei λ', μ', ν' wieder durch (13) gegeben sind. Um das Flächenpaar H', H'^0 mit den Ortsvektoren $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{y}'^0$ als Schraubriß von Ξ' zu erkennen, stellen wir die rechten Seiten von (21) in Punktkoordinaten dar:

Zwischen den Punktkoordinaten und Ebenenkoordinaten der Fläche Ξ' bestehen die Beziehungen

$$(22)\qquad \mathfrak{x}'\mathfrak{w}' + 1 = \mathfrak{x}_u'\mathfrak{w}' = \mathfrak{x}_v'\mathfrak{w}' = \mathfrak{x}'\mathfrak{w}_u' = \mathfrak{x}'\mathfrak{w}_v' = 0.$$

Deshalb sind $\mathfrak{w}'\times\mathfrak{w}'_u$ und $\mathfrak{w}'\times\mathfrak{w}'_v$ Linearkombinationen von $\mathfrak{x}'_u, \mathfrak{x}'_v$, so daß wir setzen können:

$$(23)\qquad \mathfrak{w}'\times\mathfrak{w}'_u = \delta_{11}\mathfrak{x}'_u + \delta_{12}\mathfrak{x}'_v,\quad \mathfrak{w}'\times\mathfrak{w}'_v = \delta_{21}\mathfrak{x}'_u + \delta_{22}\mathfrak{x}'_v,$$

also wegen (22) weiter

$$(24)\qquad \mathfrak{w}'_u = \delta_{11}\mathfrak{x}'\times\mathfrak{x}'_u + \delta_{12}\mathfrak{x}'\times\mathfrak{x}'_v,\quad \mathfrak{w}'_v = \delta_{21}\mathfrak{x}'\times\mathfrak{x}'_u + \delta_{22}\mathfrak{x}'\times\mathfrak{x}'_v.$$

Durch Einsetzen von (23) und (24) in (21) ergibt sich

$$(25)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{y}'_u &= \mathsf{M}'_1\mathfrak{x}'_u + \Lambda'_1\mathfrak{x}'_v, & \mathfrak{y}'_v &= \mathsf{N}'\mathfrak{x}'_u - \mathsf{M}'_2\mathfrak{x}'_v,\\ \mathfrak{y}'^0_u &= \mathsf{M}'_1\mathfrak{x}'\times\mathfrak{x}'_u + \Lambda'_1\mathfrak{x}'\times\mathfrak{x}'_v, & \mathfrak{y}'^0_v &= \mathsf{N}'\mathfrak{x}'\times\mathfrak{x}'_u - \mathsf{M}'_2\mathfrak{x}'\times\mathfrak{x}'_v. \end{aligned}$$

Die Integrierbarkeitsbedingungen von (25) erfordern nun, wie man leicht nachrechnet, gerade $\mathsf{M}'_1 = \mathsf{M}'_2$. Infolgedessen haben die Gleichungen (25) denselben Bau wie die Gleichungen (14) und es gilt das zu Nr. 7 analoge Ergebnis:

Aus einer infinitesimalen Verbiegung der Fläche X findet man eine infinitesimale Verbiegung für jede zu X dualprojektive Fläche Ξ', indem man nach (13), (21) *und* (15) *die Funktionen $\mathfrak{y}'$ und $\mathfrak{x}'^0$ aus $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}^0, \mathfrak{y}$, λ, μ, ν und $\mathfrak{w}'$ berechnet.*

12. Lineartransformation des Schraubrisses bei der dualprojektiven Abbildung der Fläche X. Analog zu Nr. 8 ergibt sich

$$(26)\qquad \begin{aligned} y'_1 &= c_{41}y_1 + c_{42}y_2 + c_{43}y_3 + c_{44}y_1^0 + c_{45}y_2^0 + c_{46}y_3^0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y'^0_1 &= c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3 + c_{14}y_1^0 + c_{15}y_2^0 + c_{16}y_3^0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Die rechten Seiten von (16) und (26) unterscheiden sich lediglich durch Vertauschung der drei ersten mit den drei letzten Zeilen. Mithin gilt:

Der Satz von Nr. 8 *über die invariante Verknüpfung von Fläche und Schraubriß gilt ebenso wie für projektive auch für dualprojektive Abbildungen.*

Über den geometrischen Zusammenhang der Schraubrißflächenpaare Y, Y^0 und $\mathsf{H}', \mathsf{H}'^0$ ist dasselbe wie in Nr. 8 zu sagen. Der Zusammenhang vereinfacht sich für die spezielle Abbildung $\xi'_i = x_i$ (Polarsystem der imaginären Kugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$); in diesem Falle besteht die Transformation des Schraubrisses lediglich in der Vertauschung von Drehriß und Verschiebungsriß.

Ebenso wie in Nr. 8 können die Gleichungen (26) dazu benutzt werden, die gesuchte, für die infinitesimale Verbiegung von Ξ' kennzeichnende Funktion $\mathfrak{x}'^0$ aus den gegebenen Funktionen $\mathfrak{x}^0$ und $\mathfrak{y}$ *ohne Integrationen und Differentiationen* zu berechnen.

13. Beispiel. Die Fläche X und die durch den Schraubriß Y, Y^0 bestimmte infinitesimale Verbiegung von X werden wie in Nr. 9 vorgegeben. Als dualprojektive Transformation wählen wir das Polarsystem

$$\xi'_i = x_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Dadurch wird die Drehfläche X abgebildet in die Drehfläche

$$(\Xi') \qquad \xi_1' = u\cos v, \qquad \xi_2' = u\sin v, \qquad \xi_3' = f(u)$$

oder in Punktkoordinaten

$$x_1' = \frac{f'}{f-uf'}\cos v, \qquad x_2' = \frac{f'}{f-uf'}\sin v, \qquad x_3' = -\frac{1}{f-uf'}.$$

Nach (26) ergibt sich für Ξ' der Schraubriß

$$(\mathrm{H}') \qquad \begin{gathered} y_1' = \left(\frac{f}{f'} - u\right)\cos v = y_1^0, \qquad y_2' = \left(\frac{f}{f'} - u\right)\sin v = y_2^0, \\ y_3' = \int \frac{du}{f'} - \frac{u}{f'} = y_3^0; \end{gathered}$$

$$(\mathrm{H}'^0) \qquad y_1'^0 = \frac{1}{f'}\sin v = y_1, \qquad y_2'^0 = -\frac{1}{f'}\cos v = y_2, \qquad y_3'^0 = v = y_3.$$

Aus (6) folgt schließlich die durch den Ortsvektor $\mathfrak{x}'^0$ erzeugte Fläche

$$(\Xi'^0) \quad x_1'^0 = \frac{f'}{f-uf'}\left(\frac{u}{f'} - \int \frac{du}{f'}\right)\sin v, \quad x_2'^0 = -\frac{f'}{f-uf'}\left(\frac{u}{f'} - \int \frac{du}{f'}\right)\cos v,$$
$$x_3'^0 = v.$$

Es läßt sich zeigen, daß die hierdurch bestimmte infinitesimale Verbiegung von Ξ' einer eingliedrigen Biegungsgruppe entnommen ist, bei der alle Biegungsflächen von Ξ' Schraubenflächen sind.

§ 4.

Herleitung projektiver und dualprojektiver Verbiegungseigenschaften.

In den vorangehenden Paragraphen hat sich bereits als Folgerung der Satz von Darboux[1]) über die Verbiegungen der zu einer gegebenen Fläche projektiven und dualprojektiven Flächen ergeben. Ich leite jetzt noch einige weitere Folgerungen her, indem ich die in früheren Arbeiten als projektiv-invariant erkannten *wackeligen*[2]) und *krümmungsfesten*[3]) Kurvennetze auf ihr Verhalten bei dualprojektiven Abbildungen untersuche. Dabei wird sich insbesondere zeigen, daß die krümmungsfesten und die konjugierten wackeligen Kurvennetze einander dual entsprechen.

14. Schränkungsfeste Berührregelflächen. Eine von Tangenten der Fläche X erzeugte Regelfläche *(Berührregelfläche)* bezeichne ich hinsichtlich (1) als *schränkungsfest*, wenn sie ihre Schränkung[3]) bei der ininfinitesimalen Flächenverbiegung (1) in der Ordnung ε nicht ändert. Spezialisiert sich die Berührregelfläche zur Tangentenfläche einer Flächenkurve von X, dann ist die Schränkungsfestigkeit der Regelfläche gleichbedeutend mit der *Krümmungsfestigkeit* der Flächenkurve, d. h. die Krümmung der Flächenkurve bleibt bei der Flächenverbiegung (1) in der Ordnung ε ungeändert. Für schränkungsfeste Berührregelflächen gilt nun der Satz:

Eine bei der infinitesimalen Verbiegung (1) *der Fläche X schränkungsfeste Berührregelfläche bleibt schränkungsfest, wenn man die Fläche X und die Berührregelfläche projektiv bzw. dualprojektiv abbildet und den Schraubriß der Verbiegung nach* (16) *bzw.* (26) *linear transformiert.*

Beim Beweis dieses Satzes unterscheiden wir zwei Fälle:

a) Die gegebene schränkungsfeste Berührregelfläche ist windschief. Ihre Berührkurve mit der Fläche X sei $u = 0$ und ihre Erzeugenden seien Tangenten der Kurven $v = \text{const}$. Nach einer früheren Arbeit[13]) ist dann $\mu(u, v) = 0$ für $u = 0$ in den Gleichungen (5) kennzeichnend für die Schränkungsfestigkeit der Berührregelfläche. Aus $\mu = 0$ folgt nach (13) $\mu' = 0$. Bei projektiven Abbildungen spezialisiert sich somit (14) zu $\mathfrak{y}'_u = \lambda' \mathfrak{x}'_v$, $\mathfrak{y}'_v = \nu' \mathfrak{x}'_u$ für $u = 0$, womit die projektive Invarianz der Schränkungsfestigkeit bewiesen ist. Bei dualprojektiven Abbildungen spezialisiert sich (21) zu $\mathfrak{y}'_u = \lambda' \mathfrak{w}' \times \mathfrak{w}'_v$, $\mathfrak{y}'_v = \nu' \mathfrak{w}' \times \mathfrak{w}'_u$. Da $\mathfrak{w}' \times \mathfrak{w}'_u$ Tangentenvektoren der zu $v = \text{const}$ konjugierten Kurven $\bar{v} = \text{const}$ sind, hat man im $u, \bar{v}$-Parametersystem $\mathfrak{y}'_{\bar{v}} = \bar{\nu}\, \mathfrak{x}'_u$, also wegen (5) auch $\mathfrak{y}'_u = \bar{\lambda}\, \mathfrak{x}'_{\bar{v}}$; sonach ist die zur gegebenen Berührregelfläche duale, von den Tangenten der Kurven $\bar{v} = \text{const}$ längs $u = 0$ gebildete Regelfläche schränkungsfest.

b) Eine abwickelbare Berührregelfläche ist entweder Tangentenfläche einer (krümmungsfesten) Flächenkurve oder wird von den zu ihrer Berührkurve konjugierten Tangenten erzeugt. Beide Fälle entsprechen sich dual. Die Invarianz der Schränkungsfestigkeit wird ähnlich wie in a) bewiesen, wobei man die Forderung $\nu(u, v) = 0$ für $u = 0$ in (5) als Bedingung[14]) der Krümmungsfestigkeit der Kurve $u = 0$ zu benutzen hat.

15. Wackelige und krümmungsfeste Kurvennetze. Ein u, v-Kurvennetz bezeichne ich als *wackelig*, wenn alle von den Tangenten der Kurven $u = \text{const}$ längs einer Kurve $v = \text{const}$ und umgekehrt aufgereihten Berührregelflächen schränkungsfest sind. Dagegen bezeichne ich das Kurvennetz als *krümmungsfest*, wenn alle Tangentenflächen der Parameterkurven schränkungsfest sind. Neben der schon in früheren Arbeiten[2])[3]) bewiesenen projektiven Invarianz erhält man aus Nr. 14 noch folgende Eigenschaften der wackeligen und krümmungsfesten Netze:

Bilden die Kurven $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ bei der infinitesimalen Verbiegung (1) *der Fläche X ein wackeliges Kurvennetz, so bilden auf jeder*

[13]) Math. Annalen **108** (1933), S. 679.

[14]) Math. Zeitschr. **38** (1934), S. 470; die dort vorgenommene Unterscheidung von Asymptotenlinien und anderen Flächenkurven ist hier belanglos.

zu X dualprojektiven Fläche Ξ' die Kurven $u = const$ mit den zu $v = const$ konjugierten Kurven und die Kurven $v = const$ mit den zu $u = const$ konjugierten Kurven ebenfalls wackelige Netze, wenn der Schraubriß der Verbiegung nach (26) *linear transformiert wird.*

Als einfacher Sonderfall sei erwähnt:

Ein aus zwei konjugierten Kurvenscharen bestehendes wackeliges Kurvennetz geht bei dualprojektiver Flächenabbildung in ein krümmungsfestes Kurvennetz über.

16. Beispiel. Wir greifen auf die Beispiele Nr. 9 und Nr. 13 zurück. Das u, v-Kurvensystem der Drehfläche X besteht aus den Breitenkreisen und Meridianen und ist bei der vorgegebenen infinitesimalen Verbiegung von X wackelig[12]). Es bleibt wackelig bei der projektiven Abbildung nach Nr. 9 und wird krümmungsfest bei der dualprojektiven Abbildung nach Nr. 13. Da bei dieser dualprojektiven Abbildung die Parameterkurven Breitenkreise und Meridiane bleiben, kann man also eine Drehfläche infinitesimal so verbiegen, daß sich die Krümmungen der Breitenkreise und Meridiane in der Ordnung ε nicht ändern; nach Nr. 13 wird dabei die Drehfläche in eine Schraubenfläche verbogen.

(Eingegangen am 12. 10. 1934.)

Über die Brennpunktsbedingungen der Variationsrechnung.

Von

Ernst Richard Neumann in Marburg.

Es handelt sich im folgenden immer um das bekannte Problem, zwei gegebene Kurven $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ durch den Bogen $S(P_1 P_2)$ einer dritten Kurve so zu verbinden, daß das längs S gebildete Integral

$$J = \int_S f(x, y, y')\, dx$$

zu einem Minimum (Maximum) wird[1]).

Darüber, ob wirklich ein Extremum eintritt oder nicht, gibt (in Verbindung mit anderen bekannten Bedingungen) häufig bereits die Lage der Kneserschen „Brennpunkte" Aufschluß, in anderen Fällen aber nicht. — Als wohl einfachstes Beispiel für letzteren Fall sei das Problem genannt, die kürzeste Linie zwischen zwei Kreisbogen in der in Fig. 1 dargestellten gegenseitigen Lage zu finden: Die von beiden Kreisen transversal (orthogonal) geschnittene Extremale (Gerade), also die Strecke $P_1 P_2$ der Figur, stellt, wie man sofort sieht, *kein Minimum* der Entfernung dar, während die beiden Brennpunktsbedingungen nicht gegen ein solches sprechen.

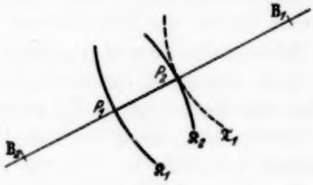


Fig. 1.

Nach diesen beiden Brennpunktsbedingungen ist für den Eintritt eines Extremums notwendig:

I. *daß der Extremalenbogen* $P_1 P_2$ *keinen der Brennpunkte von* $\mathfrak{K}_1$ *und* $\mathfrak{K}_2$ *in seinem Innern enthalte*;

II. *daß, wenn* $\mathfrak{K}_1$ *und* $\mathfrak{K}_2$ *gleichseitige Brennpunkte besitzen (also jedes einen rechtsseitigen oder jedes einen linksseitigen), von den beiden*

[1]) Wir machen die üblichen allgemeinen Voraussetzungen [vgl. etwa Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung (1909), S. 301], zu denen wir sogleich noch die weitere (von Bolza erst später eingeführte) hinzunehmen, daß $f(x, y, y')$ in den Endpunkten von S nicht verschwinden oder, was nach der Transversalitätsbedingung dasselbe ist, daß S nicht $\mathfrak{K}_1$ oder $\mathfrak{K}_2$ berühren soll.

Brennpunktsabständen (in der Extremalen) der eine den anderen umschließe[2]) *(Blisssche Brennpunktsbedingung).*

Von diesen beiden Forderungen ist im obigen Beispiel die erste erfüllt (denn die Brennpunkte sind hier die Kreiszentren) — zur Anwendung der zweiten Bedingung fehlen aber die Vorausetzungen, da $\mathfrak{K}_1$ nur einen rechts-, $\mathfrak{K}_2$ aber nur einen linksseitigen Brennpunkt besitzt. Jedenfalls kann man das Nichteintreten eines Extremums hier nicht aus den Bedingungen I und II schließen. — Will man sich zu diesem Nachweis auf ein allgemeines Kriterium stützen, so muß man schon auf eine weitere notwendige (übrigens auch hinreichende) Bedingung zurückgehen, sie gleichsam als Ersatz für II eintreten lassen. Diese ebenfalls von Bliss herrührende Bedingung fordert für den Eintritt eines Minimums:

III. *daß die $\mathfrak{K}_2$ in P_2 tangierende Kurve $\mathfrak{T}_1$, die alle zu $\mathfrak{K}_1$ transversalen Extremalen transversal schneidet, in der Umgebung von P_2 ganz auf der P_1 zugewandten Seite von $\mathfrak{K}_2$ verlaufen muß [wenigstens wenn $f(x\,y\,y')$ in P_2 positiv ist] — und entsprechend bei Vertauschung der Indizes* 1 *und* 2[3]).

Mit der Heranziehung dieser Bedingung III verzichtet man aber gänzlich darauf, die Entscheidung über das Extremum aus der Kenntnis der Brennpunkte heraus zu fällen. — In unserem Beispiel ist nun die Kurve $\mathfrak{T}_1$ der zu $\mathfrak{K}_1$ konzentrische Kreis durch P_2 und man sieht daher leicht, daß die Bedingung III nicht erfüllt ist — im allgemeinen aber ist die Handhabung des Kriteriums III weit schwieriger als die der Brennpunktssätze I und II. Ich will nun im folgenden zeigen, daß man III nur dann heranzuziehen braucht, wenn keine Brennpunkte vorhanden sind; ich werde nämlich die Bedingung II so erweitern, daß sie allemal anwendbar bleibt, wenn $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ nur überhaupt je einen Brennpunkt auf der betrachteten Extremalen besitzen, gleichgültig, ob sie gleich- oder ungleichseitig sind.

Erfordert die nachfolgende Neuableitung der (erweiterten) Brennpunktsbedingungen auch vielleicht einen etwas größeren Aufwand an Rechnung (§ 2), so glaube ich doch, daß sie die Schlußresultate in einer

---

[2]) D. h. die Endpunkte P_1 und P_2 von S und die beiden Brennpunkte B_1 und B_2 müssen in der Reihenfolge $P_i\,P_k\,\mathsf{B}_k\,\mathsf{B}_i$ aufeinander folgen, wenn i und k die Zahlen 1 und 2 in einer der beiden möglichen Anordnungen bedeuten. Daß dies dann von selber auch für die andere Anordnung gilt (wenigstens, falls sowohl links- wie rechtsseitige Brennpunkte existieren), ist eine einfache Folge des Sturmschen Satzes. Vgl. Weinreich, Math. Annalen 76 (1915), S. 376.

[3]) Vgl. Bliss, Math. Annalen 58 (1904), S. 80. — Bolza (Vorles. S. 330) bemerkt bereits, daß die Bedingung eine einfache Folgerung des Kneserschen Transversalsatzes ist.

für die Diskussion (§ 3) besonders geeigneten Form liefert. — Das Charakteristische ist dabei die konsequente Benutzung der bekannten Jacobischen Funktion $\Delta(x, a)$, d. h. des an der Stelle a verschwindenden Integrales der Jacobischen Differentialgleichung — also einer Funktion, deren man bei diesen Untersuchungen ohnehin nicht entraten kann.

§ 1.

Vorbemerkungen und Bezeichnungen.

Die beiden gegebenen Kurven $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ mögen bei unserem allgemeinen Problem durch folgende Gleichungen gegeben sein:

$$\mathfrak{K}_1 \text{ durch } y = \mathfrak{y}_1(x), \qquad \mathfrak{K}_2 \text{ durch } y = \mathfrak{y}_2(x).$$

Als Lösungen S des Problems kommen dann nur Stücke von Integralkurven der Eulerschen Gleichung des Problems in Betracht. Diese „Extremalen" stellen eine zweifach unendliche Kurvenschar dar, für die wir immer schreiben werden:

$$(1) \qquad y = \varphi(x, c, \gamma);$$

wir sagen, sie bildeten die $\mathfrak{E}^{(2)}$-Schar. — Neben ihr wird noch eine einfache Extremalenmannigfaltigkeit eine große Rolle spielen, die dann immer als $\mathfrak{E}^{(1)}$-Schar bezeichnet werden soll.

Aus der $\mathfrak{E}^{(2)}$-Schar gilt es nun bekanntlich eine Kurve $\mathfrak{E}_0$ auszuwählen (vgl. § 2), die von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ transversal geschnitten wird. Die ihr zugehörigen Parameterwerte seien c_0 und γ_0, und deren Substitution werde immer durch den Index 0 angedeutet. — Dann definieren wir die zu $\mathfrak{E}_0$ gehörige Jacobische Funktion $\Delta(x, a)$ stets (vor allem bezüglich des Vorzeichens) folgendermaßen:

$$(2) \qquad \Delta(x, a) = \left(\frac{\partial \varphi(a)}{\partial \gamma}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial c} - \frac{\partial \varphi(a)}{\partial c}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial \gamma}\right)_0 \qquad (\Delta(a, x) = -\Delta(x, a)).$$

Da nun längs des zwischen den Schnittpunkten P_{10} und P_{20} von $\mathfrak{E}_0$ mit $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ gelegenen Bogens S im Falle eines Extremums nach Legendre

$$(3) \qquad R(x) \equiv f_{y'y'}(x, \varphi, \varphi')_0 \geqq 0 \quad (\leqq 0) \qquad \text{für } x_{10} \leqq x \leqq x_{20}$$

sein muß, so wollen wir im folgenden immer die Annahme machen, daß es auf $\mathfrak{E}_0$ einen mindestens S enthaltenden Bogen gibt, längs dessen die Legendresche Bedingung (sogar unter Ausschluß des Gleichheitszeichens) erfüllt ist — und nur dieses Stück (nicht die ganze Extremale) nennen wir von jetzt ab $\mathfrak{E}_0$. Wenn wir also z. B. von der weiteren Annahme sprechen, daß auf $\mathfrak{E}_0$ ein zu P_{10} konjugierter Punkt P'_{10} existiere, so heißt das immer, daß ein solcher Punkt auf diesem der Legendreschen Bedingung genügenden Extremalenbogen existieren soll (oder daß die

Funktion $\Delta(x, x_{10})$ eine in das entsprechende Abszissenintervall fallende Nullstelle besitze). — Wenn von einem Extremum überhaupt die Rede sein soll, darf dieser Punkt nach Jacobi freilich nicht zwischen P_{10} und P_{20} liegen; wir machen daher, indem wir auch noch den Fall $P'_{10} = P_{20}$ ausschließen, die beiden weiteren Annahmen:

(A) $$R(x) > 0 \; (< 0) \quad \text{für} \quad x_{10} \leqq x \leqq x_{20}$$
und
(B) $$\Delta(x, x_{10}) \neq 0 \quad \text{für} \quad x_{10} < x \leqq x_{20}.$$

§ 2.

Das Extremalenintegral und seine Ableitungen.

Das Verfahren, dessen wir uns bedienen, ist bekannt als die „Differentiationsmethode": Wir nehmen zunächst die Endpunkte P_1 und P_2 der Integrationskurve auf $\mathfrak{K}_1$ bzw. $\mathfrak{K}_2$ beliebig an und bestimmen den sie verbindenden Extremalenbogen und den ihm entsprechenden Integralwert, das „Extremalenintegral". Dieses ist eine Funktion der Abszissen x_1 und x_2 von P_1 und P_2: $\mathfrak{J}(x_1, x_2)$ — und dann bestimmen wir x_1 und x_2 nachträglich so, daß diese Funktion möglichst klein (groß) wird.

Die Parameterwerte c und γ der P_1 und P_2 verbindenden Extremalen ergeben sich aus den Gleichungen:

(K) $$\varphi(x_1, c, \gamma) = \mathfrak{y}_1(x_1) \qquad \text{und} \qquad \varphi(x_2, c, \gamma) = \mathfrak{y}_2(x_2),$$

die sie in Abhängigkeit von x_1 und x_2 liefern:

(4) $$c = c(x_1, x_2), \qquad \gamma = \gamma(x_1, x_2),$$

und die Gleichung jener Extremalen selbst wird:

(5) $$y = \varphi(x, c(x_1, x_2), \gamma(x_1, x_2)) \equiv \psi(x, x_1, x_2)$$

und danach das Extremalenintegral:

(6) $$\mathfrak{J}(x_1, x_2) \equiv \int_{x_1}^{x_2} f(x, \psi, \psi')\, dx.$$

Damit dieses nun möglichst klein oder groß wird, muß zunächst

(7) $$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x_1} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x_2} = 0$$

sein. Die erste dieser Forderungen liefert für x_1 und x_2 die Gleichung:

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x_1} \equiv -f(x_1, \psi(x_1), \psi'(x_1)) + \int_{x_1}^{x_2} \left(f_\psi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + f_{\psi'} \frac{\partial \psi'}{\partial x_1} \right) dx = 0,$$

oder nach Ausführung der bekannten Lagrangeschen Produktintegration:

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x_1} \equiv -f(x_1, \psi(x_1), \psi'(x_1)) + \left[f_{\psi'}(x, \psi, \psi') \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right]_{x_1}^{x_2} = 0,$$

oder unter Benutzung von (K) und der sich daraus ergebenden Beziehungen

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)_{x=x_1} = \mathfrak{y}_1'(x_1) - \psi'(x_1) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)_{x=x_2} = 0$$

schließlich:

$$(8_1) \qquad \frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial x_1} = -\left(f(x, \mathfrak{y}_1, \psi') + f_{y'}(x, \mathfrak{y}_1, \psi')(\mathfrak{y}_1' - \psi')\right)_{x=x_1} = 0,$$

und entsprechend liefert (7_2) die Gleichung:

$$(8_2) \qquad \frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial x_2} = \left(f(x, \mathfrak{y}_2, \psi') + f_{y'}(x, \mathfrak{y}_2, \psi')(\mathfrak{y}_2' - \psi')\right)_{x=x_2} = 0.$$

Das sind aber die bekannten *Transversalitätsbedingungen*. Sie sind hier anzusehen als Gleichungen für x_1 und x_2, und die Gleichungen (4) liefern dann als den so ermittelten Werten x_{10} und x_{20} zugehörig:

$$(9) \qquad c(x_{10}, x_{20}) = c_0 \quad \text{und} \quad \gamma(x_{10}, x_{20}) = \gamma_0.$$

Damit ist dann aber die allein noch für ein Minimum (Maximum) in Betracht kommende Extremale

$$\mathfrak{E}_0\colon \qquad y = \varphi(x, c_0, \gamma_0)$$

bestimmt.

Dieses Verfahren, x_{10}, x_{20}, c_0, γ_0 zu ermitteln, kann man nun auf die folgende kurze Form bringen: Es sind die vier Größen x_1, x_2, c, γ aus den vier Gleichungen

$$(\mathrm{K}_{1,2}) \qquad \varphi(x_1, c, \gamma) = \mathfrak{y}_1(x_1), \qquad \varphi(x_2, c, \gamma) = \mathfrak{y}_2(x_2)$$

und

$$(\mathrm{T}_{1,2}) \qquad T_1(x_1, c, \gamma) = 0, \qquad T_2(x_2, c, \gamma) = 0$$

zu bestimmen, wo allgemein (für $i = 1, 2$):

$$(10) \quad T_i \equiv f(x_i, \mathfrak{y}_i(x_i), \varphi'(x_i, c, \gamma)) + f_{y'}(x_i, \mathfrak{y}_i(x_i), \varphi'(x_i, c, \gamma)) \cdot (\mathfrak{y}_i'(x_i) - \varphi'(x_i, c, \gamma)),$$

also aus zwei „Koinzidenzbedingungen" und zwei „Transversalitätsbedingungen".

Der oben angedeutete Weg zur Lösung dieser vier Gleichungen — nämlich zunächst die beiden Gleichungen $(\mathrm{K}_{1,2})$ und dann erst $(\mathrm{T}_{1,2})$ zu lösen — läuft darauf hinaus, daß man zunächst in der $\mathfrak{E}^{(2)}$-Schar an Stelle von c und γ die Schnittpunktsabszissen x_1 und x_2 mit $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ als Parameter einführt (eben $\psi(x, x_1, x_2)$ an die Stelle von $\varphi(x, c, \gamma)$ treten läßt), und dann nachträglich diese Schnittpunkte P_1 und P_2 so wählt, daß in beiden transversaler Schnitt eintritt.

Nun kann man aber bei der Auflösung jener vier Gleichungen auch anders vorgehen: nämlich zunächst die beiden Gleichungen (K_1) und (T_1) auflösen, die erste Koinzidenz- und erste Transversalitätsbedingung. So erhält man

$$(\bar{4}) \qquad c = \bar{c}(x_1), \qquad \gamma = \bar{\gamma}(x_1)$$

und damit eine nur einparametrige Extremalenschar, die schon erwähnte $\mathfrak{E}^{(1)}$-Schar:

$$(\bar{5}) \qquad y = \varphi(x, \bar{c}(x_1), \bar{\gamma}(x_1)) \equiv \bar{\psi}(x, x_1),$$

die Schar aller Extremalen, die von $\mathfrak{K}_1$ transversal geschnitten werden, — und dann kann man aus (K_2) und (T_2) den Parameter x_1 sowie die Schnittpunktsabszisse x_2 so bestimmen, daß die betreffende Extremale im Schnittpunkt mit $\mathfrak{K}_2$ auch von dieser Kurve transversal geschnitten wird.

Das Resultat beider Vorgehensarten muß natürlich dasselbe sein, auch das zweite Verfahren liefert die Werte x_{10} und x_{20} und weiter dann nach $(\bar{4})$:

$$(\bar{9}) \qquad \bar{c}(x_{10}) = c_0 \qquad \text{und} \qquad \bar{\gamma}(x_{10}) = \gamma_0.$$

Um nun zu entscheiden, ob die so auf zwei Arten bestimmte Extremale $\mathfrak{E}_0$ dem zwischen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ hinerstrekten Integral J wirklich einen kleineren (größeren) Wert erteilt als die übrigen Extremalen, müssen wir noch die zweiten Ableitungen von $\mathfrak{J}(x_1, x_2)$ an dieser Stelle x_{10}, x_{20} — wir sagen kurz an der Stelle 0 — untersuchen. — Deren Berechnung wenden wir uns jetzt zu: Es ist nach (8_1) und (10)

$$\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_1^2}\right)_0 = -\left(\frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_1}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_1} + \frac{\partial T_1}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial x_1}\right)_0.$$

Andererseits folgt, da $\bar{c}(x_1)$ und $\bar{\gamma}(x_1)$ als Auflösungen von (K_1) und (T_1) die letztere Gleichung identisch erfüllen, durch Differentiation:

$$(T_1') \qquad 0 = \left(\frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_1}{\partial c}\frac{d\bar{c}}{d x_1} + \frac{\partial T_1}{\partial \gamma}\frac{d\bar{\gamma}}{d x_1}\right)_0,$$

und diese Tatsache benutzen wir, um $\frac{\partial T_1}{\partial x_1}$ aus $\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_1^2}$ zu eliminieren; so folgt

$$(11) \qquad \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_1^2}\right)_0 = \left\{\frac{\partial T_1}{\partial c}\left(\frac{d\bar{c}}{d x_1} - \frac{\partial c}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial T_1}{\partial \gamma}\left(\frac{d\bar{\gamma}}{d x_1} - \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}\right)\right\}_0.$$

Hier gilt es nun zunächst, die Ableitungen der Funktionen c und $\gamma(x_1, x_2)$ bzw. $\bar{c}$ und $\bar{\gamma}(x_1)$ zu ermitteln: Durch Differentiation der Definitionsgleichungen $(K_{1,2})$ der beiden ersten Funktionen ergeben sich für deren Ableitungen die Beziehungen

$$(12) \qquad \left|\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi(x_1)}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi(x_1)}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial x_1} \equiv \mathfrak{y}_1'(x_1) - \varphi'(x_1), \\ &\frac{\partial \varphi(x_2)}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi(x_2)}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial x_1} \equiv 0 \end{aligned}\right.$$

und deren Auflösung an der Stelle x_{10}, x_{20} [*]) liefert, wenn wir noch

$$(13_1) \qquad (\mathfrak{y}_1'(x_1) - \varphi'(x_1, c, \gamma))_0 = h_1,$$

*) Wir lassen hinfort bei x_1 und x_2 auf den rechten Seiten den zweiten Index 0 weg, weil Mißverständnisse nicht mehr zu befürchten sind.

wie später auch

$$(13_2)\qquad (\mathfrak{y}_2'(x_2) - \varphi'(x_2, c, \gamma))_0 = h_2$$

setzen[5]):

$$(14)\quad \left(\frac{\partial c}{\partial x_1}\right)_0 = \frac{h_1}{\Delta(x_1, x_2)}\left(\frac{\partial \varphi(x_2)}{\partial \gamma}\right)_0, \qquad \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x_1}\right)_0 = -\frac{h_1}{\Delta(x_1, x_2)}\left(\frac{\partial \varphi(x_2)}{\partial c}\right)_0.$$

Für die Ableitungen der Funktionen $\bar{c}(x_1)$ und $\bar{\gamma}(x_1)$ folgt sodann zunächst mit derselben Begründung:

$$(\overline{12}_1)\qquad \frac{\partial \varphi(x_1)}{\partial c}\frac{d\bar{c}}{d x_1} + \frac{\partial \varphi(x_1)}{\partial \gamma}\frac{d\bar{\gamma}}{d x_1} \equiv \mathfrak{y}_1'(x_1) - \varphi'(x_1, \bar{c}, \bar{\gamma}),$$

als zweite Bestimmungsgleichung benutzen wir aber nicht (T_1'), die differenzierte zweite Definitionsgleichung (T_1) für $\bar{c}$ und $\bar{\gamma}(x_1)$, sondern wir verschaffen uns eine neue Gleichung: Wir führen nämlich zunächst rein rechnungsmäßig eine Größe β ein mittels der Gleichung:

$$(15)\qquad \left(\frac{\partial \bar{\psi}(\beta, x_1)}{\partial x_1}\right)_0 \equiv \left(\frac{\partial \varphi(\beta)}{\partial c}\frac{d\bar{c}}{d x_1} + \frac{\partial \varphi(\beta)}{\partial \gamma}\frac{d\bar{\gamma}}{d x_1}\right)_0 = 0 \qquad [\text{vgl. } (\bar{5})].$$

Sollte es mehrere Größen geben, die dieser Gleichung genügen, so verstehen wir unter β zunächst eine beliebige von ihnen. — Diese Größen β besitzen nun eine einfache geometrische Bedeutung: sie sind augenscheinlich die Abszissen der Punkte, in denen die Extremale $\mathfrak{E}_0$ von der Enveloppe der $\mathfrak{E}^{(1)}$-Schar $y = \bar{\psi}(x, x_1)$ berührt wird. Das sind ja aber die *Brennpunkte von* $\mathfrak{K}_1$ *auf* $\mathfrak{E}_0$.

Die Brennpunktsabszissen β sind also nach (15) die Nullstellen eines Integrals der Jacobischen Differentialgleichung für $\mathfrak{E}_0$ (nämlich einer linearen Komposition der partikulären Integrale $\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial c}\right)_0$ und $\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial \gamma}\right)_0$), und daraus folgt dann bereits nach dem Sturmschen Satz, daß, wenn auf $\mathfrak{E}_0$ ein zu P_1 konjugierter Punkt P_1' existiert, auch ein noch näher an P_1 gelegener Brennpunkt B_1 existiert. Auch entnimmt man der Gleichung (15) leicht das Resultat, daß, wenn man $\mathfrak{K}_1$ durch andere und andere durch P_1 gehende, $\mathfrak{E}_0$ transversal schneidende und daher in P_1 gleichgerichtete Kurven ersetzt, dann die Lage der zugehörigen Brennpunkte nur von der Krümmung dieser Kurven in P_1 abhängt, denn die Kompositionskoeffizienten $\frac{d\bar{c}}{d x_1}$ und $\frac{d\bar{\gamma}}{d x_1}$ hängen nach der Entstehung der Funktionen $\bar{c}$ und $\bar{\gamma}(x_1)$ aus (K_1) und (T_1) außer von $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_1'$ nur noch von $\mathfrak{y}_1''(x_1)$ ab[6]). —

---

[5]) Diese beiden so eingeführten Größen h_1 und h_2 sind nach den von uns eingangs gemachten Voraussetzungen von Null verschieden (vgl. die Anm. S. 83).

[6]) Auch kommt $\mathfrak{y}_1''$ nur *linear* vor, so daß die linke Seite der die Brennpunktsabszissen β definierenden Gleichung (15) auch in der Krümmung $\frac{1}{r}$ linear wird. Vgl. Bliss, Transact. of the Am. Math. Soc. 3 (1902), S. 139 und Math. Annalen 58 (1904), S. 73, sowie auch bei Bolza, a. a. O., S. 319.

Um nun zur Hauptuntersuchung zurückzukehren, *nehmen wir im folgenden immer an, daß wenigstens ein solcher Brennpunkt existiert.* Dann können wir zur Bestimmung von $\frac{d\bar{c}}{dx_1}$ und $\frac{d\bar{\gamma}}{dx_1}$ neben $(\overline{12}_1)$ die Formel (15) benutzen und haben dann zwei den beiden Gleichungen $(12_{1,2})$ völlig entsprechende Gleichungen (nur daß jetzt β an die Stelle von x_2 getreten ist), so daß die Auflösung an der Stelle x_{10} die Formeln liefert:

$$(\overline{14})\qquad \left(\frac{d\bar{c}}{dx_1}\right)_0 = \frac{h_1}{\Delta(x_1,\beta)}\left(\frac{\partial\varphi(\beta)}{\partial\gamma}\right)_0, \qquad \left(\frac{d\bar{\gamma}}{dx_1}\right)_0 = -\frac{h_1}{\Delta(x_1,\beta)}\left(\frac{\partial\varphi(\beta)}{\partial c}\right)_0.$$

Die Differentiation von T_1 liefert nach (10) schließlich noch:

$$(16)\quad \left(\frac{\partial T_1}{\partial c}\right)_0 = R(x_1)\,h_1\left(\frac{\partial\varphi'(x_1)}{\partial c}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial T_1}{\partial\gamma}\right)_0 = R(x_1)\,h_1\left(\frac{\partial\varphi'(x_1)}{\partial\gamma}\right)_0 \text{ [vgl. (3)].}$$

Die Benutzung der Darstellungen (14), $(\overline{14})$ und (16) in (11) liefert aber nach kurzer Zwischenrechnung:

$$(17)\quad \left(\frac{\partial^2\mathfrak{J}}{\partial x_1^2}\right)_0 = \frac{h_1^2}{\Delta(x_1,x_2)}\cdot\frac{\Delta(x_2,\beta)}{\Delta(x_1,\beta)}R(x_1)\left\{\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial c}\frac{\partial\varphi'(x_1)}{\partial\gamma} - \frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial\gamma}\frac{\partial\varphi'(x_1)}{\partial c}\right\}_0.$$

Nun folgt aber in bekannter Weise aus der Jacobischen Differentialgleichung, falls $u(x)$ und $v(x)$ irgend zwei linear unabhängige Integrale bedeuten:

$$(18)\qquad R(x)\big(u(x)\,v'(x) - v(x)\,u'(x)\big) = \text{const} \neq 0.$$

Da aber $\left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial c}\right)_0$ und $\left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\gamma}\right)_0$ zwei solche partikuläre Integrale sind, ergibt sich somit die erste unserer folgenden Schlußformeln:

$$(19)\left|\begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2\mathfrak{J}}{\partial x_1^2}\right)_0 = h_1^2\,\frac{\Delta(x_2,\beta_1)}{\Delta(x_1,\beta_1)}\cdot\frac{\Gamma}{\Delta(x_1,x_2)}, \quad \left(\frac{\partial^2\mathfrak{J}}{\partial x_2^2}\right)_0 = h_2^2\,\frac{\Delta(x_1,\beta_2)}{\Delta(x_2,\beta_2)}\cdot\frac{\Gamma}{\Delta(x_1,x_2)}, \\ \qquad\left(\frac{\partial^2\mathfrak{J}}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)_0 = h_1 h_2\,\frac{\Gamma}{\Delta(x_1,x_2)} \qquad\qquad (h_1, h_2, \Gamma \neq 0), \end{array}\right.$$

von denen die weiteren ganz analog zu beweisen sind (die letztere rechnerisch sogar weit einfacher). Den Größen β haben wir Indizes beigefügt, die andeuten sollen, ob es sich um die Abszisse eines Brennpunktes von $\mathfrak{K}_1$ oder von $\mathfrak{K}_2$ handelt. (Auch bei $\mathfrak{K}_2$ setzen wir die Existenz wenigstens eines Brennpunktes voraus.) Die Größe Γ dagegen hat in allen diesen Formeln (19) denselben Wert, da sie ja nach (18) von der Wahl der Stelle auf $\mathfrak{E}_0$ unabhängig ist. — Übrigens können wir auch über das Vorzeichen von Γ noch eine nähere Aussage machen: Γ ist nach seiner Definition [vgl. (17) und (19)] auch so darstellbar:

$$\Gamma = -R(x_1)\big(\Delta'(x,x_1)\big)_{x=x_1}.$$

Da aber $\Delta(x, x_1)$ im Intervall $x_1 \ldots x_2$ nicht nochmals verschwindet [vgl. (B) S. 86], so hat es in x_2 noch dasselbe Vorzeichen wie Δ' in x_1. Also folgt, was das Vorzeichen anlangt:

$$\Gamma \sim -R(x_1) \cdot \Delta(x_2, x_1) \equiv R(x_1) \cdot \Delta(x_1, x_2),$$

so daß sich aus den ersten Formeln (19) das Resultat ergibt:

$$(20) \qquad \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_1^2}\right)_0 \sim R(x_1) \frac{\Delta(x_2, \beta_1)}{\Delta(x_1, \beta_1)}, \qquad \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_2^2}\right)_0 \sim R(x_2) \frac{\Delta(x_1, \beta_2)}{\Delta(x_2, \beta_2)}.$$

§ 3.

Diskussion und Schlußresultat.

Soll nun das Integral J für den Bogen S von $\mathfrak{C}_0$, oder die Funktion $\mathfrak{J}(x_1, x_2)$ bei x_{10}, x_{20} ein Minimum (Maximum) erreichen, so müssen bekanntlich $\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_1^2}$ und $\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_2^2}$ an dieser Stelle positiv (negativ) — richtiger: nicht negativ (nicht positiv) — sein. Nun ist aber nach der Voraussetzung (A), S. 86, längs des ganzen Bogens S die Funktion $R(x)$ positiv (negativ) — folglich müssen nach $(20_{1,2})$, gleichgültig ob ein Minimum oder Maximum vorliegen soll:

$$(21) \qquad Q_1(\beta_1) \equiv \frac{\Delta(x_2, \beta_1)}{\Delta(x_1, \beta_1)} \geqq 0 \quad \text{und} \quad Q_2(\beta_2) \equiv \frac{\Delta(x_1, \beta_2)}{\Delta(x_2, \beta_2)} \left(\equiv \frac{1}{Q_1(\beta_2)}\right) \geqq 0$$

sein. — Würde nun eines der β zwischen x_1 und x_2 liegen, so hätten $\Delta(x_1, \beta)$ und $\Delta(x_2, \beta)$ nach dem Sturmschen Satz entgegengesetztes Vorzeichen, die für ein Extremum notwendigen Bedingungen (21) wären also nicht erfüllt, und wir erhalten also die oben mit I bezeichnete Brennpunktsbedingung: Weder $\mathfrak{K}_1$ noch $\mathfrak{K}_2$ darf im Falle eines Extremums im Innern des Extremalenbogens S einen Brennpunkt besitzen.

Nun ist aber für ein Extremum von $\mathfrak{J}(x_1, x_2)$ weiter notwendig, daß die Diskriminante

$$\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right)_0 \geqq 0$$

sei. Das liefert nach den Formeln (19) die Bedingung:

$$Q_1(\beta_1) \cdot Q_2(\beta_2) - 1 \geqq 0 \quad \text{oder} \quad Q_1(\beta_1) \geqq \frac{1}{Q_2(\beta_2)} \equiv Q_1(\beta_2).$$

So können wir denn die gefundenen Bedingungen in folgender Weise zusammenfassen:

$$(22) \qquad Q_1(\beta_1) \geqq Q_1(\beta_2) \geqq 0,$$

oder in Worten — und das ist unser

Schlußresultat: *Für den Eintritt eines Extremums ist notwendig, daß die Funktion*

$$Q_1(x) \equiv \frac{\Delta(x, x_2)}{\Delta(x, x_1')} \quad \text{[vgl. (2)]} \tag{23}$$

in den Brennpunkten sowohl von $\mathfrak{K}_1$ wie von $\mathfrak{K}_2$ positive Werte besitzt, und zwar muß der Wert in den Brennpunkten von $\mathfrak{K}_1$ [7]) *größer sein als der in den Brennpunkten von $\mathfrak{K}_2$.*

Ist die Bedingung (22) unter Ausschluß der Gleichheitszeichen erfüllt, so ist sie in Verbindung mit den früher gemachten Voraussetzungen sicher *auch hinreichend*, wenigstens für ein schwaches Extremum [8]).

Den Inhalt der Forderung (22) macht man sich am leichtesten klar an der graphischen Darstellung von $Q_1(x)$. — Diese Funktion verschwindet in x_2 und seinen konjugierten Punkten (wenn solche existieren) und sie geht durch Unendlich bei x_1 und seinen konjugierten Punkten. Da sie überdies nach den an (21) geknüpften Bemerkungen zwischen x_1 und x_2 negativ ist und ihr Differentialquotient nach (18) immer dasselbe Vorzeichen besitzt, ist sie *monoton wachsend*. Das Schaubild der Funktion $Q_1(x)$ sieht also (ähnlich dem von $\operatorname{tg} x$) etwa aus wie nebenstehende Fig. 2.

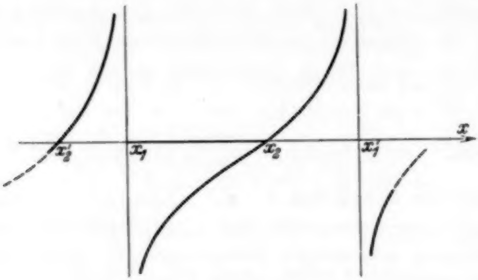


Fig. 2.

Danach fordert (22) zunächst, daß kein β zwischen x_1 und x_2 liegen darf (d. i. Bedingung I), und weiter, wenn $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ z. B. beide rechtsseitige Brennpunkte besitzen (zwischen x_2 und x_1' — Folge des Sturmschen Satzes), daß dann β_1 größer als β_2 sein muß (d. i. Bedingung II).

So enthält also die Bedingung (22) die beiden Brennpunktsbedingungen I und II in sich — aber darüber hinaus gestattet sie, die Kenntnis

---

[7]) Da die Abszissen β und β' der Brennpunkte derselben Kurve zueinander konjugiert, d. h. nach (15) Nullstellen desselben Integrals der Jacobischen Differentialgleichung sind $(\Delta(\beta, \beta') = 0)$, so können sich $\Delta(x, \beta)$ und $\Delta(x, \beta')$ bekanntlich höchstens durch einen konstanten Faktor unterscheiden, woraus $Q_1(\beta') = Q_1(\beta)$ folgt, d. h. den sämtlichen Brennpunkten derselben Kurve entspricht auch derselbe Wert von Q_1.

[8]) Soll sie auch hinreichend sein für ein starkes Extremum, so muß man etwa noch die Weierstraßsche hinreichende Bedingung hinzunehmen. Vgl. z. B. Bolza, a. a. O., S. 121.

der Brennpunkte nutzbar zu machen *auch noch, wenn* $\mathfrak{K}_1$ *und* $\mathfrak{K}_2$ *nur ungleichseitige Brennpunkte besitzen*, wie in dem eingangs genannten Beispiele (Fig. 1). — Hier ist, da beim Problem der kürzesten Linie stets $\varphi = cx + \gamma$ und daher $\Delta(x, a) = x - a$ ist,

$$0 < Q_1(\beta_1) = \frac{\beta_1 - x_2}{\beta_1 - x_1} < 1 \quad \text{und} \quad 0 < Q_1(\beta_2) = \frac{\beta_2 - x_2}{\beta_2 - x_1} < 1,$$

also

$$Q_1(\beta_1) < Q_1(\beta_2).$$

Es ist also die für ein Extremum notwendige Bedingung (22) nicht erfüllt, unser Kriterium liefert also das Resultat, daß kein Minimum vorliegen kann, wie das die Anschauung von vornherein lehrte. —

Erwähnt sei zum Schluß noch eine aus (22) leicht zu gewinnende und vielleicht häufig leichter zu handhabende andere Formulierung unseres Kriteriums, nämlich:

$$(22^*) \qquad \Delta(\beta_1, \beta_2) \cdot \Delta(\beta_1, x_1) \cdot \Delta(\beta_2, x_2) \cdot \Delta(x_1, x_2) \leqq 0.$$

(Eingegangen am 18. 10. 1934.)

Zusatz bei der Korrektur (23. 12. 1934): Nachträglich bemerke ich, daß sich die rein rechnerische Herleitung unserer Hauptformeln (19) ziemlich erheblich vereinfacht, wenn man von vornherein die Endpunktsabszissen x_1 und x_2 (anstatt c und γ) als Parameter der $\mathfrak{E}^{(2)}$-Schar benutzt, also anstatt von $\varphi(x, c, \gamma)$ sogleich von der Funktion $\psi(x, x_1, x_2)$ ausgeht, und demgemäß $\Delta(x, a)$ durch folgenden Ausdruck definiert:

$$\Delta(x, a) = \left(\frac{\partial \psi(a)}{\partial x_2} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi(a)}{\partial x_1} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_2}\right)_0,$$

der sich von unserem früheren $\Delta(x, a)$ höchstens um einen (unwesentlichen) Faktor unterscheiden kann.

Doch ist dieser Weg heuristisch weit weniger befriedigend, da er nicht so zwangsläufig auf diese Δ-Funktionen führt, auf deren Verwendung doch gerade die einfache Formulierung (22) unseres Kriteriums beruht. — Die (nachträgliche) Einführung der Δ's und ebenso der Konstanten Γ erscheint bei diesem Verfahren eben etwas gekünstelt. Bei ihr spielen die folgenden Darstellungen eine wesentliche Rolle:

$$\Delta(x, x_1) = -h_1 \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_2}, \quad \Delta(x, x_2) = h_2 \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_1}, \quad \Delta(x_1, x_2) = h_1 \cdot h_2.$$

Das Hamiltonsche Prinzip bei nichtholonomen Systemen.

Von

Georg Hamel in Berlin.

Herr Kerner hat in der Arbeit: „Le principe de Hamilton et l'holonomisme“ in Prace mat.-fiz. **38** den Satz bewiesen:

Holonomsein ist die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß das Hamiltonsche Prinzip gilt,

oder genauer:

Holonomsein ist die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß die richtigen Gleichungen der Mechanik den nach den Lagrangeschen Methoden der Variationsrechnung bei Nebenbedingungen mit Hilfe von Parametern gewonnenen Gleichungen gleichwertig sind, soweit sie die Lagrangeschen Koordinaten bestimmen.

Es ist gut hinzuzufügen,

daß die zweiten Gleichungen in ihrem vollen Umfang den ersten gleichwertig sein sollen und nicht etwa diese durch Spezialisierung der zulässigen Parameter aus den zweiten hervorgehen sollen.

Sonst kann der Satz falsch sein.

Geometrisch liegt folgender Sachverhalt zu grunde. Nichtholonome Bedingungen schränken bekanntlich die Dimension des Bewegungsraumes nicht ein. Dagegen wohl die Bewegungsrichtung. Daher sind die für die Variationsrechnung in Betracht zu ziehenden Nachbarbahnen von höherer Dimension als die durch zulässige Verrückungen zu erreichenden. Mithin kann es sein, daß diese Verrückungen eine Auswahl aus den Bahnen der Variationsrechnung treffen, die zugleich mit den Ausgangsbahnen selbst die richtigen Bahnen der Mechanik sind, während der Satz des Herrn Kerner die Identität und damit die Erniedrigung der Dimensionszahl verlangt.

Im folgenden soll gezeigt werden: 1. Das Hamiltonsche Prinzip ist bei richtiger Formulierung immer richtig, ein alter aber wenig beachteter Satz, 2. der Satz des Herrn Kerner läßt sich nach meinen Methoden ganz kurz, ohne mühsame Rechnung beweisen, (siehe: „Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik“ in Zeitschr. f. Math. u. Phys. **50**, „Über die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik“, Math. Annalen **70**,

und „Über nichtholonome Systeme", Math. Annalen 92), 3. er kann falsch sein, wenn man den Zusatz oben nicht beachtet.

§ 1.

Das Hamiltonsche Prinzip.

Aus dem d'Alembertschen Prinzip in der Lagrangeschen Fassung

$$S\,d\,m\,\bar{w}\,\delta\,\bar{r} = S\,d\,\bar{k}\,\delta\,\bar{r}$$

(S Summation über das System, $\bar{r}$ der Ortsvektor, $d\,m$ das Massenelement, $\bar{w}$ der Vektor der Beschleunigung, $d\,\bar{k}$ Vektor der eingeprägten Kraft) folgt unter der stets zulässigen Annahme

$$d\,\delta\,\bar{r} - \delta\,d\,\bar{r} = 0$$

die Lagrangesche Zentralgleichung

$$\frac{d}{dt} S\,d\,m\,\bar{v}\,\delta\,\bar{r} - \delta(E - U) = 0,$$

wo $\bar{v}$ die Geschwindigkeit, E die kinetische, U die potentielle Energie bedeutet, die als vorhanden angenommen wird. Daraus ergibt sich durch Integration über das Zeitintervall t_1 bis t_2, an dessen Enden die virtuellen Verschiebungen Null sein sollen,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\,L\,d\,t = 0 \qquad (L \equiv E - U),$$

also das Hamiltonsche Prinzip. Die Variationen müssen jedoch hier als zulässige Verschiebungen angesehen werden, wodurch die erreichten Nachbarbahnen in der Regel nicht zulässig sein werden. Der Einfachheit halber nehmen wir das System skleronom.

Die Lagrangeschen Koordinaten seien $q_1, q_2, \ldots, q_n$. An Stelle der $\dot{q}_i$ denken wir uns n linearunabhängige Verbindungen derselben

$$\frac{d\,\vartheta_i}{d\,t} \equiv \omega_i = \sum_{s=1}^{n} b_{i,s}\,\dot{q}_s \quad \text{oder aufgelöst} \quad \dot{q}_s = \sum_{i=1}^{n} c_{s,i}\,\omega_i$$

eingeführt, was wir so tun können, daß die nichtholonomen Bedingungsgleichungen gerade

$$\omega_{k+1} = 0, \quad \omega_{k+2} = 0, \ldots, \omega_n = 0 \qquad k < n$$

werden. Die Übergangsgleichungen mögen

$$d\,\delta\,\vartheta_\sigma - \delta\,d\,\vartheta_\sigma = \sum_{i,s} \beta_{i,s,\sigma}\,\delta\,\vartheta_i\,d\,\vartheta_s$$

sein. Sie geben zusammen mit dem Hamiltonschen Prinzip sofort die richtigen $k < n$ Bewegungsgleichungen (wegen $\delta\,\vartheta_\sigma = 0$ für $\sigma > k$)

$$\text{(I)} \qquad \frac{d\,p_i}{dt} + \sum_{s,m} \beta_{i,s,m}\,\omega_s\,p_m - \sum_s \frac{\partial L}{\partial q_s}\,c_{s,i} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Die $p_m = \frac{\partial L}{\partial \omega_m}$ sind die Impulse. Dagegen gibt die Aufgabe der Variationsrechnung

$$\delta \int L\,dt = 0$$

mit den Nebenbedingungen $\omega_{k+1} = 0,\ \omega_{k+2} = 0, \ldots, \omega_n = 0$

$$\int \delta\,(L + \sum_{k+1}^{n} \lambda_\nu \omega_\nu)\,dt = 0$$

oder

$$\int \Big[\sum_m (p_m + \lambda_m)\,\delta\omega_m + \sum_\nu \frac{\partial L}{\partial q_\nu}\,\delta q_\nu\Big]\,dt = 0,$$

wo $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_k = 0$, die anderen λ die Lagrangeschen Parameter sind. Wie oben folgt jetzt, da die $\delta\vartheta_i$ alle als beliebig zu behandeln sind,

$$\text{(II)} \qquad \frac{d}{dt}(p_i + \lambda_i) + \sum_{s,m} \beta_{i,s,m}\,\omega_s\,(p_m + \lambda_m) - \sum_s \frac{\partial L}{\partial q_s}\,c_{s,i} = 0,$$

jedoch jetzt für alle i.

§ 2.

Beweis des Kernerschen Satzes.

Sollen (I) und (II) beide richtig sein, so folgen aus dem Vergleich der k ersten Gleichungen

$$\sum_{s,m} \beta_{i,s,m}\,\omega_s\,\lambda_m = 0 \qquad \text{für} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, k, \\ s = 1, 2, \ldots, k, \end{array}$$

oder da die Werte von ω_s an jeder Stelle frei gegeben werden können,

$$\text{(III)} \qquad \sum_{m = k+1, k+2, \ldots, n} \beta_{i,s,m}\,\lambda_m = 0 \qquad s \text{ und } i = 1, 2, 3, \ldots, k.$$

Dazu kommen für die λ die Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}(p_i + \lambda_i) + \sum_{s,m} \beta_{i,s,m}\,\omega_s\,(p_m + \lambda_m) - \sum_s \frac{\partial L}{\partial q_s}\,c_{s,i} = 0,$$

$$i = k+1, k+2, \ldots, n.$$

Soll nun volle Identität beider Gleichungssysteme in dem in der Einleitung geschilderten Sinne stattfinden, so dürfen die an jeder Stelle frei wählbaren λ keinen endlichen Einschränkungen wie (III) unterliegen, so daß die

$$\beta_{i,s,m} = 0$$

$$\text{für } s \text{ und } i = 1, 2, \ldots, k \quad \text{und} \quad m = k+1, k+2, \ldots, n$$

sein müssen. Die Übergangsgleichungen für die letzten ϑ heißen dann aber

$$d\,\delta\vartheta_\sigma - \delta\,d\vartheta_\sigma = \sum_{i, s = k+1, k+2, \ldots, n} \beta_{i,s,\sigma}\,\delta\vartheta_i\,d\vartheta_s, \quad \sigma = k+1,\ k+2, \ldots, n.$$

Das ist aber nach einem Satz von Frobenius (Crelle 82, S. 267, siehe auch Enzyklopädie der math. W. II. A. 5, 15, S. 319, Anm. 90) hinreichend, um auf die Integrabilität unserer Bedingungsgleichungen schließen zu können. Damit ist der Kernersche Satz bewiesen.

§ 3.

Ein Gegenbeispiel.

Daß der Satz falsch ist, wenn man die volle Identität nicht fordert, soll folgendes Beispiel zeigen.

Es sei

$$L = \tfrac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2 + \omega^2)$$

mit der sicher nichtholonomen Bedingung

$$\omega \equiv \dot{q}_3 + q_1 \dot{q}_2 = 0.$$

Die richtigen Bewegungsgleichungen lauten, weil man nach einem bekannten Satze (siehe meine erste Arbeit, S. 25) von vornherein $\omega = 0$ setzen darf,

$$\ddot{q}_1 = 0, \quad \ddot{q}_2 = 0, \quad \omega = 0.$$

Die Gleichungen des Variationsproblems dagegen lauten:

$$\ddot{q}_1 - \lambda \dot{q}_2 = 0, \quad \frac{d}{dt}(\dot{q}_2 + \lambda q_1) = 0, \quad \frac{d}{dt}\lambda = 0, \quad \omega = 0,$$

so daß $\lambda =$ const. Läßt man nun die Auswahl $\lambda = 0$ zu, so bekommt man die richtigen Bewegungsgleichungen.

(Eingegangen am 23. 10. 1934.)

Some inequalities in the theory of functions.

Von

M. L. Cartwright in Cambridge (England).

Introduction.

1.1. Suppose that

$$w(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

is regular for $|z| = r < 1$. It was first proved by Koebe[1]) *that if* $w(z)$ *is schlicht in the unit circle, and if* $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, *then*

$$(1.11) \qquad |w(z)| \leqq \varphi(r) \qquad (0 < r < 1),$$

where φ *is a function of* r *only*. It was afterwards proved by Bieberbach[2]) that under these conditions

$$(1.12) \qquad |w(z)| \leqq \frac{r}{(1-r)^2};$$

and further results were proved by Littlewood[3]) for mean values of $|w(z)|$ and for $|a_n|$. Bieberbach's result is the best possible, as is shown by the function

$$w(z) = \frac{z}{(1-z)^2},$$

which takes every value, except those on the negative real axis between $-\frac{1}{4}$ and ∞ once, and once only.

The object of this paper is to prove similar results for functions which only take values p times, by methods differing fundamentally from those of previous writers on the subject. Littlewood[4]) proved the following very general result by methods similar to those used for schlicht functions:

Theorem A. *Suppose that we are given an integer* $p \geqq 0$, *a constant* $k > 1$, *and an infinite sequence* $w_1, w_2, \dots$, *where* $|w_1| > 0$, $|w_{n-1}| < |w_n| < k|w_{n-1}|$, *and* $|w_n| \to \infty$ *as* $n \to \infty$. *Suppose now that* $w(z)$ *takes no value* w_n, $n = 1, 2, \dots$, *more than* p *times in* $|z| < 1$. *Then*

$$(1.13) \qquad |w(z)| < A(p)\,\mu\,(1-r)^{-h},$$

where $h = A(p)\,k\,(|w_1| + 1)$, $\mu = \max(1, |a_0|, |a_1|, \dots, |a_p|)$.

---

1) P. Koebe, *Gött. Nachrichten* 1909, 68—76 (73).

2) L. Bieberbach, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Vol. II. (Berlin, 1927), 82—92.

3) J. E. Littlewood, *Proc. London Math. Soc.* (2) 23 (1925), 481—519.

4) J. E. Littlewood, loc. cit. 502.

Here, and elsewhere, we use $A(p)$ to denote a constant depending on p only, not necessarily the same constant in each place.

If $w(z)$ takes no value more than p times, where $p \geqq 1$, then

$$\sum_1^\infty n |a_n|^2 r^{2n} \leqq p \left(\sum_1^\infty |a_n| r^n\right)^2; \tag{1.14}$$

for the left hand side multiplied by π is the image of $|z| \leqq r$, and this is less than

$$p\pi (\max |w|)^2 \leqq p\pi \left(\sum_1^\infty |a_n| r^n\right)^2.$$

Hardy and Littlewood[5]) have shown, by means of the inequality (1.14) alone, that *if $w(z)$ takes no value more than p times in $|z| < 1$, then*

$$|w(z)| < A(p)\mu (1-r)^{-A(p)}, \tag{1.15}$$

where $\mu = \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_p|)$, a result which is included in (1.13). Since (1.14) only expresses part of the data, a more precise result could hardly be expected. Frazer[6]) using rather more, showed that *if $w(z)$ takes no value more than p times in $|z| < 1$, then*

$$|w(z)| < C(1-r)^{-Kp} \tag{1.16}$$

where K is an absolute constant, and C depends on the function; he also showed that

$$|w(z)| < \mu(1-r)^{-Kp(p+1)} \qquad (\tfrac{1}{2} \leqq r < 1).$$

His methods are not unlike those used by Littlewood to prove (1.13).

1.2. My principal result is as follows:

Theorem I. *If $w(z)$ takes no value more than p times in $|z| < 1$, then*

$$|w(z)| < A(p)\mu(1-r)^{-2p}, \tag{1.21}$$

where $\mu = \max(|a_0|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_p|)$, *for* $0 < r < 1$.

The function

$$w(z) = z^p(1-z)^{-2p}, \tag{1.22}$$

which takes every value, except those on the real axis between $(-1)^p 2^{2p}$ and $(-1)^p \infty$ exactly p times, shows that the exponent $2p$ in (1.21)

---

[5]) G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Kgl. Danske Vid. Selskab Mat.-fys. Medd.* 7, 4 (1925).

[6]) H. Frazer, *Proc. London Math. Soc.* (2) 33 (1932) 77—81. [Added in the proofs.] Frazer has since shown, by methods which are elementary compared with those used here, that, if $w(z)$ does not take any value more than p times, and does not take the value 0 more than q times, $q \leqq p$, then (1.16) holds with $C < K\mu_q$, where $\mu_q = \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_q|)$. This result is not included in theorem I as it stands, except when $q = p$. But, if we suppose, in addition, that $w(z)$ does not take the value 0 more than q times, where $q < p$, we may replace μ by μ_q. For in lemma 5 the order of the quasi-normal family is then less than or equal to q, and the result follows by the same method.

cannot be replaced by any smaller number. In my first version of the theorem I only showed that

$$|w(z)| < C(1-r)^{-2p-\varepsilon},$$

where C is a constant depending on the function, for every $\varepsilon > 0$ and $r_0(\varepsilon) < r < 1$. Dr. L. Spăček showed me how to get rid of the ε by using a transformation of the form

$$\zeta = A(p)\log\frac{z}{1-z},$$

in place of

$$\zeta = A(p)\log\frac{1}{1-z},$$

and, by modifying the argument, I have been able to express the result in terms of μ. The proof depends chiefly on a method of conformal representation due to Ahlfors[7]). In the case of schlicht functions and, more generally, functions of the form

$$w(z) = a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \ldots,$$

this method gives the complete result. In the other cases it gives a result in terms of the maximum modulus of $w(z)$ on a fixed circle, but it is easy to show[8]) that this depends only on μ and p.

Theorem A has such very general hypotheses that we can hardly expect to improve the result, but there is a similar theorem with slightly more restrictive hypotheses which can be obtained by using Ahlfors' method and quasi-normal families of functions:

Theorem II. *Suppose that the hypotheses of theorem* A *are satisfied and also that*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{w_n}{w_{n-1}}\right| = 1. \tag{1.23}$$

Then, given any $\varepsilon > 0$ we can choose r_0 depending on ε so that

$$|w(z)| < A(p, k, r_0)\,\mu\,|w_1|\,(1-r)^{-2(p+1)-\varepsilon},$$

where $\mu = \max(1, |a_0|, |a_1|, \ldots, |a_p|)$, *for* $r_0 < r < 1$. *The number* r_0 *also depends on the way in which* $|w_n| \to \infty$, *on the limiting process in* (1.23), *and on* $|w_1|$.

Proof of Theorem I.

2.1. We shall prove the result for a function $w(z)$ which is regular in and on the boundary of the unit circle. For this restriction simplifies the preliminary lemmas considerably, and we can apply the result to $w(z/R)$, where $R < 1$. Then, making $R \to 1$ we shall have the complete theorem.

---

7) L. Ahlfors, *Acta Soc. Sci. Fen.*, Nova Series A, 1, Nr. 9.

8) See lemma 5 and footnote.

Lemma 1. *Suppose that $w(z)$ is regular and not a constant for $|z| \leqq 1$; and let*

$$\varrho = M(r) = \max_{0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi} |w(r e^{i\vartheta})|,$$

where $0 < r < 1$. Then there is a simply-connected region D of the z plane such that

$$|w(z)| < \varrho \tag{2.11}$$

in D and $|w(z)| = \varrho$ on those parts of the frontier of D for which $|z| < 1$. Further the frontier of D has no double points, and $\arg w(z)$ is monotonic on each part of the frontier of D for which $|z| < 1$.

Consider the set of all points for which (2.11) is satisfied and $|z| < 1$. This is an open set and consists of one or more connected sets. One of these sets obviously contains the circle $|z| < r$, and we have $|w(z)| = \varrho$ on those parts of the frontier for which $|z| < 1$. This set is the region D, and we have to show that it is simply connected and that its frontier has no double points.

Suppose that this is not so; then part of the frontier of D forms a closed curve on which $|w(z)| = \varrho$ enclosing a region C in which $w(z)$ is regular. It follows from the maximum modulus principle that $|w(z)| \leqq \varrho$ in C. Now consider the region D_0 formed by combining C and D, and the frontier between them. In D_0, $w(z)$ is regular and $|w| \leqq \varrho$. Points of the frontier between C and D are interior points of D_0 and at these points $|w(z)| = \varrho$. Hence by the maximum modulus principle, $w(z)$ is a constant, which is contrary to hypothesis; and so we have the required result.

Fig. 1.

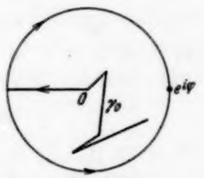


Fig. 2.

It remains to show that $\arg w(z)$ is monotonic on those parts of the frontier of D for which $|w(z)| = \varrho$. Let s be the length of such a piece of frontier measured from some fixed point on it. Then $\frac{d \arg w(z)}{ds}$ does not change sign[9]) except at points which are double points of the curves on which $|w(z)| = \varrho$. Near such points we can write

$$w(z) = |w(a)| e^{i\alpha} + b_p |z - a|^p e^{i(\psi - \beta)p} + O\{(|z - a|)^p\},$$

[9]) See E. C. Titchmarsh, *Theory of Functions*, Oxford (1932) 121, 122.

where $|w(a)| = \varrho$, $b_p > 0$, and p is an integer greater than 1. Hence it is easy to see that if $\frac{d \arg w(z)}{d s}$ changes sign at $z = a$, some points at which $|w(z)| > \varrho$ lie inside D, which is impossible.

2.2. Let $D(\varphi)$ denote the region defined by

$$\left|\arg \frac{z}{(e^{i\varphi} - z)^2}\right| < \pi, \tag{2.21}$$

and let $D'(\varphi)$ denote the simply-connected region formed from $D(\varphi)$ by making a cut γ_0 from the origin through the zeros of $w(z)$ inside $D(\varphi)$. We suppose that $w(z)$ is regular for $|z| \leqq 1$, and so there are only a finite number of zeros. The cut can be made by starting with those furthest from the origin, and, of those, selecting the one for which $\arg z$ is largest, and joining the zeros together by straight lines and arcs on which $|z|$ constant (see Fig. 2). We denote by γ_1 and γ_2 the curves defined by

$$\arg \frac{z}{(e^{i\varphi} - z)^2} = \pi, \quad \text{and} \quad \arg \frac{z}{(e^{i\varphi} - z)^2} = -\pi,$$

respectively.

Let $\Delta(\varphi)$ and $\Delta'(\varphi)$ denote the regions on the Riemann surface

$$s = \sigma + i\tau = \log w(z)$$

corresponding to $D(\varphi)$ and $D'(\varphi)$ (see Fig. 4). Let Γ_1 and Γ_2 denote the curves on the Riemann surface corresponding to γ_1 and γ_2 respectively, and let Γ_0 denote the curve corresponding to γ_0. The region $\Delta'(\varphi)$ is simply-connected. The curves Γ_0, Γ_1 and Γ_2 are continuous and regular except at a finite number of points. The equations of Γ_1 and Γ_2 can be written in the form

$$s = \sigma_1(t) + i\tau_1(t), \qquad s = \sigma_2(t) + i\tau_2(t),$$

where t varies from 0 to 1 as z varies from 0 to $e^{i\varphi}$ along the curves γ_1 and γ_2. The equation of Γ_0 can be written

$$s = \sigma_0(t) + i\tau_0(t),$$

where t varies from -1 to 0 and from 0 to 1 as z traces γ_0 from the origin to the furthest zero and back again, and the points whose parameters are t and $-t$ correspond to the same point in the z plane.

Lemma 2. *Suppose that $w(z)$ is regular for $|z| \leqq 1$. Then $\Delta'(\varphi)$ can be represented on the strip $S(a)$ defined by*

$$\zeta = \xi + i\eta, \qquad |\eta| < a, \tag{2.23}$$

provided that an appropriate cut k_0 is made to correspond with Γ_0. The curves Γ_1 and Γ_2 correspond point by point to $\eta = a$, $\eta = -a$, and the two points on Γ_0 whose parameters are equal in absolute value correspond to the same point on k_0. Also σ varies continuously across k_0 and is one-valued in the uncut strip.

Since $w(z)$ has no zeros in $D'(\varphi)$, $\log w(z)$ is regular, and the inverse function $z^{-1}(s)$ represents $\Delta'(\varphi)$ on $D(\varphi)$. The function

$$Z(z) = \frac{a}{\pi} \log \frac{z}{(e^{i\varphi} - z)^2} \tag{2.24}$$

represents $D(\varphi)$ on $S(a)$, and so

$$\zeta(s) = Z(z^{-1}(s))$$

represents $D'(\varphi)$ on the cut strip $S'(a)$, see Fig. 4. The rest follows from this.

2.3. The most important point is to construct a cross section of $\Delta'(\varphi)$ on which $\sigma = K \leq \log M(r)$, joining Γ_1 to Γ_2. Once this is done we can apply Ahlfors' method with very little modification.

Lemma 3. *Suppose that $w(z)$ is regular for $|z| \leqq 1$, and $w(0) = 0$, and let $\varrho = M(r)$, where $r < 1$. Then we can choose $\varphi = \varphi(r)$ so that for every $K \leq \log \varrho$, there is at least one cross section, or set of cross sections (including perhaps part of Γ_0), joining a point on Γ_1 to a point on Γ_2 inside $\Delta'(\varphi)$, on which $\sigma = K$. In the latter case the whole set of cross sections corresponds to a single continuous curve in the ζ plane joining $\eta = a$ to $\eta = -a$ inside $S(a)$. Further the cross sections can be chosen so that ζ is monotonic throughout, and $\varphi(r)$ is chosen so that the cross section on which $\sigma = \log \varrho$ passes through the point at which $|w(re^{i\vartheta})| = M(r)$.*

Let D be the region considered in Lemma 1. Let $re^{i\vartheta(r)}$ be the point at which $|w(re^{i\vartheta})|$ attains its maximum, $M(r) = \varrho$; and let $C(\varrho)$ be the part of the boundary of D containing $re^{i\vartheta(r)}$ for which $|z| < 1$. Then $C(\varrho)$ is either a closed curve enclosing the whole of D, and, in particular, the origin, or else $C(\varrho)$ has two different end points $e^{i\vartheta_1}$ and $e^{i\vartheta_2}$ on $|z| = 1$. In both cases $C(\varrho)$ meets the boundary of $D(\varphi)$ at least twice in non-coincident points for every φ. Let γ_1', γ_2' be the parts of γ_1 and γ_2 respectively on which $\arg z = \varphi \pm \pi$, and let γ_1'', γ_2'' denote the parts of γ_1 and γ_2 which are also parts of $|z| = 1$. Let $C(\varrho, \varphi)$ denote that part of $C(\varrho)$, containing $re^{i\vartheta(r)}$, cut off by the boundary of $D(\varphi)$. If $C(\varrho, \varphi)$ has one end point on γ_1 and the other on γ_2, the corresponding curve in the s plane gives the required cross section on which $\sigma = \log M(r)$.

Suppose now that for our initial choice of $\varphi = \varphi_1$, say, both end points of $C(\varrho, \varphi)$ lie on γ_1. If one or both end points lie on γ_1', we vary φ so that the length of $C(\varrho, \varphi)$ increases. If both end points lie on γ_1'', we vary φ so that $e^{i\varphi}$ moves towards the nearest end point of $C(\varrho, \varphi)$. We have to show that both end points cannot transfer themselves to γ_2 at the same moment. A transfer can occur in three ways; $e^{i\varphi}$ may pass over an end point, or $C(\varrho, \varphi)$ may touch γ_2' at some stage,

and so be shortened, or $C(\varrho, \varphi)$ may cease to touch γ_1' and so have a piece added to it. Since $C(\varrho)$ is a regular curve, it cannot touch more than a finite number of radii, $\arg z = \alpha$, and so the transfer of end points cannot occur more than a finite number of times as φ increases or decreases from φ_1 to $\varphi_1 \pm 2\pi$. We may therefore suppose that for $\varphi = \varphi_2$ both end points are on γ_1, and that, for every $\varphi > \varphi_2$ and sufficiently near to it, both end points are on γ_1; and we shall prove that this is impossible. Since $C(\varrho, \varphi_2)$ does not touch γ_2', i. e. $\arg z = \pi - \varphi$, we can choose $\varphi_0 > \varphi_2$ so that $C(\varrho, \varphi_2)$ does not meet $\arg z = \pi - \varphi$ for $\varphi_2 \leqq \varphi < \varphi_0$. It follows that one end point of $C(\varrho, \varphi_2)$ must lie on γ_1'. For if both lie on γ_1'', since they are distinct points, we can choose φ such that $\varphi_2 < \varphi < \varphi_0$, and one end point lies on γ_2'' while the other remains on γ_1'', which is contrary to our hypothesis.

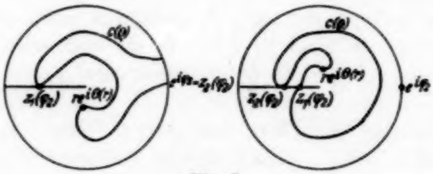


Fig. 3.

Let $z_1(\varphi_2)$ be the end point of $C(\varrho, \varphi_2)$ on γ_1'; let it be the one nearer to the origin if both are on γ_1', and let $z_2(\varphi_2)$ be the other end point. Then $C(\varrho, \varphi_2)$ together with the two pieces of the frontier of $D(\varphi_2)$ forms two closed curves, enclosing two regions D_1 and D_2. Let D_1 be the region containing the origin as a frontier point. For every $\varphi > \varphi_2$, $C(\varrho, \varphi)$ has both end points on $\gamma_2(\varphi)$. It must therefore lie in the region $\varphi - \pi \leqq \arg z \leqq \pi + \varphi_2$, and it must contain the whole of $C(\varrho, \varphi_2)$, together with an additional piece C_0 joining $z_1(\varphi_2)$ to some point on $\gamma_2(\varphi)$. Since $C(\varrho, \varphi)$ has no double points, C_0 cannot cross $C(\varrho, \varphi_2)$, and so it must lie either in D_1 or D_2 (provided that we include the appropriate parts of γ_1' in D_1 and D_2 respectively). If C_0 lies in D_1, it must pass between the point $re^{i\vartheta(r)}$ at which $|w(re^{i\vartheta})| = M(r) = \varrho$, and the origin. Since $|w(z)| = \varrho$ on C_0, we have a contradiction. If on the other hand C_0 lies in D_2, the new end point is $z_1(\varphi) = e^{i\psi}$, where $\psi > \arg z_2(\varphi_2)$. Since $z_2(\varphi_2)$ lies on $\gamma_1(\varphi_2)$, $\arg z_2(\varphi_2) \geqq \varphi_2$; and so the new end point does not lie on γ_2'', if φ is chosen sufficiently near to φ_2. Hence both end points cannot be transferred to γ_2 at the same moment, and so we have the required cross section on which $\sigma = \log M(r)$.

If $K < \log \varrho$, we take the cross section $|w(z)| = \varrho$ on the Riemann surface $w = w(z)$. This cross section exists for the same reasons as that on $s = \log w(z)$. Moreover it consists of a single continuous curve. For there is no cut on the surface $w = w(z)$. We push the end which lies on the curve corresponding to Γ_1 back along the curve in the direction t decreasing until we come to a point at which $|w| = e^K$. Since $|w(0)| = 0$, there is at least one such point for every real K: and since the surface is simply-connected, we can deform the rest of the curve until part of it lies along $|w| = e^K$, and part along the curves corresponding to Γ_1 and Γ_2. Since one end lies on the curve corresponding to Γ_1 and the other on the curve corresponding to Γ_2, there is at least one piece on which $|w| = e^K$, joining the two. The corresponding curve in the s plane has the required properties.

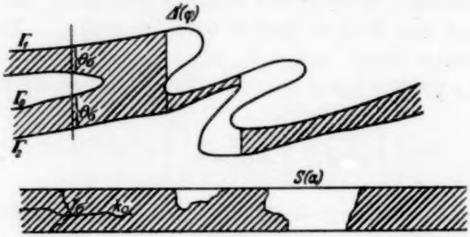


Fig. 4.

2.4. Let ϑ_K denote the cross section, or set of cross sections, $\sigma = K$ for which the parameter t of the point on Γ_1 is least, and let $\Theta(K)$ be its total length. Since Γ_1 and Γ_2 are regular, except at a finite number of points, it follows that $\Theta(\sigma)$ has only a finite number of discontinuities. Let γ_K be the curve in the ζ plane corresponding to ϑ_K. Let $\xi_1(\sigma)$ be the smallest value of $\xi(\sigma)$ on ϑ_σ, and $\xi_2(\sigma)$ the greatest, so that

$$\omega(\sigma) = \xi_2(\sigma) - \xi_1(\sigma)$$

denotes the variation of $\xi(s)$ on ϑ_σ. Then $\xi_1(\sigma)$ and $\xi_2(\sigma)$ are increasing functions of σ, and have only isolated discontinuities. We shall prove the following fundamental inequality by Ahlfors' method[10]).

Lemma 4. *Suppose that the hypotheses of Lemma* 3 *hold, and that*

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\Theta(\sigma)} \geqq 2, \tag{2.41}$$

[10]) L. Ahlfors, *Acta Soc. Sci. Fen.*, Nova Series A, 1. The calculations are practically the same as in Ahlfors' work, I include them merely for completeness.

where $\sigma_1 < \sigma_2 \leqq \log \varrho$. *Then*

(2.42) $$\xi_1(\sigma_2) - \xi_2(\sigma_1) > 2a \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\Theta(\sigma)} - 8a.$$

The curve γ_σ lies in a rectangle with sides of length $2a$ and $\omega(\sigma)$. Since the curve meets all four sides, its length is not less than the diagonal. The length of γ_σ can be expressed as an integral, and so we have

$$(2a)^2 + \omega^2(\sigma) \leqq \Big(\int_{\vartheta_\sigma} |\zeta'(s)|\, d\tau\Big)^2.$$

Hence, using Schwarz's inequality, we have

$$(2a)^2 + \omega^2(\sigma) \leqq \int_{\vartheta_\sigma} d\tau \int_{\vartheta_\sigma} |\zeta'(s)|^2 d\tau = \Theta(\sigma) \int_{\vartheta_\sigma} |\zeta'(s)|^2 d\tau.$$

Divide this inequality by $\Theta(\sigma)$ and integrate between σ_1 and σ_2, where σ_1 and σ_2 are such that $\Theta(\sigma)$ is defined for $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$. The integration is possible because $\Theta(\sigma)$ and $\omega(\sigma)$ have only isolated discontinuities, and $\Theta(\sigma)$ has a positive lower bound in the interval considered. We have

(2.43) $$(2a)^2 \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\Theta(\sigma)} + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\omega^2 d\sigma}{\Theta(\sigma)} \leqq \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \int_{\vartheta_\sigma} |\zeta'(s)|^2 d\sigma\, d\tau.$$

The right hand integral expresses the area of a region which lies entirely between $\xi_1(\sigma_1)$ and $\xi_2(\sigma_2)$, so its value is at most

$$2a\,(\xi_2(\sigma_2) - \xi_1(\sigma_1)) = 2a\,(\xi_1(\sigma_2) - \xi_2(\sigma_1) + \omega(\sigma_1) + \omega(\sigma_2)).$$

It follows from (2.43) that

(2.44) $$\xi_1(\sigma_2) - \xi_2(\sigma_1) \geqq 2a \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\Theta} + \left\{\frac{1}{2a} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\omega^2 d\sigma}{\Theta} - \omega(\sigma_1) - \omega(\sigma_2)\right\}.$$

We eliminate the unknown function $\omega(\sigma)$ as follows: Since

(2.45) $$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\Theta} > 2,$$

we can define two numbers σ_1' and σ_2' by the equation

(2.46) $$\int_{\sigma_1}^{\sigma_1'} \frac{d\sigma}{\Theta} = \int_{\sigma_2'}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\Theta} = 1,$$

and $\sigma_1' < \sigma_2'$. From (2.44) it follows *a fortiori* that

(2.47) $$\xi_1(\sigma_2) - \xi_2(\sigma_1) > 2a \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\Theta} + h(\sigma_1) + k(\sigma_2)$$

where

$$h(\sigma) = \frac{1}{2a}\int_{\sigma}^{\sigma_1'} \frac{\omega^2 d\sigma}{\Theta} - \omega(\sigma), \quad k(\sigma) = \frac{1}{2a}\int_{\sigma_2'}^{\sigma} \frac{\omega^2 d\sigma}{\Theta} - \omega(\sigma).$$

The inequality (2.4 7) holds for $\sigma_1 < \sigma_1' < \sigma_2' < \sigma_2$ independently of (2.4 6) which we use in what follows.

The condition (2.4 6) implies that $h(\sigma)$ and $k(\sigma)$ cannot be less than $-2a$ in the whole of the intervals (σ_1, σ_1'), (σ_2', σ_2) respectively. For if $h(\sigma) < -2a$

$$2a + \frac{1}{2a}\int_{\sigma}^{\sigma_1'} \frac{\omega^2 d\sigma}{\Theta} < \omega(\sigma).$$

Putting

$$\alpha(\sigma) = \frac{1}{2a}\int_{\sigma}^{\sigma_1'} \frac{\omega^2 d\sigma}{\Theta},$$

we have a differential inequality for α, viz.

$$(2a + \alpha)^2 < -2a\Theta\frac{d\alpha}{d\sigma},$$

or

$$\frac{d\sigma}{\Theta} < -\frac{2a\,d\alpha}{(2a+\alpha)^2} = d\left(\frac{2a}{2a+\alpha}\right).$$

If this holds in the whole interval (σ_1, σ_1'), we have

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_1'} \frac{d\sigma}{\Theta} < \int_{\sigma_1}^{\sigma_1'} d\left(\frac{2a}{2a+\alpha}\right) = 1 - \frac{2a}{2a+\alpha(\sigma_1)} < 1,$$

which contradicts (2.4 6). Hence there is at least one value Σ_1 in the interval (σ_1, σ_1') for which $h(\Sigma_1) \geqq -2a$. In the same way, it can be shown that $k(\Sigma_2) \geqq 2a$ for some Σ_2 in the interval (σ_2', σ_2).

Since $\Sigma_1 < \sigma_1' < \sigma_2' < \Sigma_2$, we can substitute Σ_1 for σ_1 and Σ_2 for σ_2 in (2.4 7), and we have

$$\xi_1(\Sigma_2) - \xi_2(\Sigma_1) \geqq 2a\int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} \frac{d\sigma}{\Theta} - 4a.$$

Since $\sigma_1 \leqq \Sigma_1$ and $\sigma_2 \geqq \Sigma_2$, $\xi_2(\sigma_1) \leqq \xi_2(\Sigma_1)$ and $\xi_1(\Sigma_2) \leqq \xi_1(\sigma_2)$. Hence

$$\xi_1(\sigma_2) - \xi_2(\sigma_1) \geqq 2a\int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} \frac{d\sigma}{\Theta} - 4a$$

$$= 2a\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\Theta} - 2a\left\{\int_{\sigma_1}^{\Sigma_1} \frac{d\sigma}{\Theta} + \int_{\Sigma_2}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\Theta} + 2\right\}.$$

But

$$\int_{\sigma_1}^{\Sigma_1} \frac{d\sigma}{\Theta} \leqq \int_{\sigma_1}^{\sigma'_1} \frac{d\sigma}{\Theta} = 1, \quad \int_{\Sigma_2}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\Theta} \leqq \int_{\sigma'_2}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\Theta} = 1,$$

and so

$$\xi_1(\sigma_2) - \xi_2(\sigma_1) \geqq 2a \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\Theta} - 8a.$$

2.5. We can now prove the following theorem:

Theorem III. *Suppose that $w(z)$ is regular for $|z| \leqq 1$, $w(0) = 0$, and that $w(z)$ takes no value more than p times in $|z| \leqq 1$. Then*

(2.5 1) $$|w(z)| < A(p, r_0) M(r_0)(1-r)^{-2p},$$

where $0 < r_0 < r < 1$, and $A(p, r_0)$ depends only on p and r_0. In particular if $w(z) = a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \dots$, then

(2.5 2) $$|w(z)| \leqq |a_p| e^{8\pi p} r^p (1-r)^{-2p}$$

for $r < 1$.

Put $a = \pi p$ in lemma 4, let

$$\sigma_1 = \log M(r_0), \qquad \sigma_2 = \log M(r).$$

Since $w(z)$ takes no value more than p times,

(2.5 3) $$\Theta(\sigma) \leqq 2\pi p$$

for all $\sigma \leqq \log M(r)$. For if not, $\omega(z)$ would take some values $p+1$ times. Suppose further that

(2.5 4) $$\log M(r) - \log M(r_0) \geqq 4\pi p;$$

then (2.4 1) is obviously satisfied in virtue of (2.5 3). If (2.5 4) is not satisfied for some values of r, then (2.5 1) is satisfied for those values.

We have chosen $\varphi = \varphi(r)$ in lemma 3 so that the cross section on which $\sigma = \log M(r)$, actually passes through the point $re^{i\vartheta(r)}$ at which $|w(re^{i\vartheta})|$ attains its maximum. Let $\zeta' = \xi' + i\eta'$ be the point in the ζ plane corresponding to $z = re^{i\vartheta(r)}$; then

$$\xi' = p \log \left| \frac{z}{(e^{i\varphi(r)} - z)^2} \right|$$

$$\leqq p \log \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Since ζ' is on the relevant cross cut, $\xi_1(\sigma_2) \leqq \xi'$ by the definition of $\xi_1(\sigma_2)$. Hence

$$\xi_1(\sigma_2) \leqq p \log \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Similarly $\xi_2(\sigma_1)$ is the greatest value of ξ on the cross section $\sigma = \sigma_1 = \log M(r_0)$, and so

$$\xi_2(\sigma_1) > -A(r_0, p).$$

It follows from lemma 4 and (2.53) that

$$\sigma_2 < \xi_1(\sigma_2) - \xi_2(\sigma_1) + \sigma_1 + 8\pi p. \tag{2.55}$$

Hence

$$\log M(r) < p \log \frac{r}{(1-r)^2} + A(r_0, p) + \log M(r_0), \tag{2.56}$$

which is equivalent to (2.51).

If $w(z) = a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \ldots$, we consider $w(z)/a_p$, and we have

$$M(r_0) < r_0^p (1 + \varepsilon) \tag{2.57}$$

for every $\varepsilon > 0$, provided that r_0 (depending on the function as well as ε) is sufficiently small. We also have

$$\xi_2(\sigma_1) > \log \{r_0^p (1 - \varepsilon)\} \tag{2.58}$$

for every $\varepsilon > 0$, provided that r_0 is sufficiently small. Hence (2.55) gives

$$\log M(r) < p \log \frac{r}{(1-r)^2} + 8\pi p + \log \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right),$$

provided that (2,54) holds. Now, given r, we choose ε as small as we please; we then choose r_0 so small that (2.54), (2.57) and (2.58) hold, and we have the required result (2.52).

2.6. In order to complete theorem I we need the following result.

Lemma 5. *Suppose that $w(z)$ is regular for $|z| \leqq 1$, and does not take the values 0 or 1 more than p times. Suppose also that*

$$\mu = \max(|1, a_0|, |a_1|, \ldots |a_p|) \leqq 1.$$

Then

$$M(r_0) < A(p, r_0).$$

This was proved by Bieberbach[11]. In the above form the result is easily obtained by considering the family of functions $w(z)$ such that their first $p+1$ coefficients are the same as those of $w(z)$. We suppose that no function of the family takes the values 0 or 1 more than p times Then the family is quasi-normal of order p[12] in $|z| < 1$; and, since each function $w(z)$ and its p first derivatives are less than 1 at $z = 0$, the family is normal and bounded in $|z| \leqq r_0 < 1$, which is the required result.

Proof of theorem I. Since $w(z)$ takes no value more than p times, $w(z)/\mu$ satisfies the conditions of the lemma; and so

$$|w(\tfrac{1}{2} e^{i\vartheta})| < A(p, \tfrac{1}{2})\mu = A(p)\mu.$$

Putting this result in (2.51) with $r_0 = \frac{1}{2}$ we have the required result.

---

[11]) L. Bieberbach, *Math. Annalen* 85 (1922), S. 141—148. See also E. Landau, *Math. Annalen* 86 (1922), S. 158—160.

[12]) See P. Montel, *Leçons sur les familles normales* (Borel Series) (1917), S. 70.

Proof of Theorem II.

3.1. We shall now prove

Theorem IV. *Suppose that we are given an integer p, a number $k > 1$, and an infinite sequence, $w_1, w_2, \ldots$, where $|w_1| > 0$, and $|w_{n-1}| < |w_n| < k|w_{n-1}|$, and $|w_n| \to \infty$ as $n \to \infty$. Suppose that $w(z)$ is regular, and takes no value more than p times in $|z| \leqq 1$. Suppose further that*

$$(3.1\,1) \qquad \lim_{n \to \infty} \left| \frac{w_n}{w_{n-1}} \right| = 1.$$

Then, given any $\varepsilon > 0$, we have

$$|w(z)| < A(p, k, r_0) M(r_0)(1-r)^{-2(p+1)-\varepsilon},$$

where $0 < r_0 < r < 1$, provided that r_0 [which depends on k, ε, $|w_1|$, and the rate of convergence of the limits, $|w_n| \to \infty$, and (3.1 1)] is chosen sufficiently near 1.

We need some further lemmas, depending on quasi-normal families of functions. The use of normal families forces us to confine ourselves to the sector $|\arg(e^{i\varphi} - z)| \leqq \alpha < \frac{1}{2}\pi$, $|e^{i\varphi} - z| \leqq 1 - r_0$, and so we have to modify the transformations used in lemmas 2 and 3, and choose φ accordingly in order to get our cross sections.

3.2. Lemma 6. *Suppose that $w(z)$ is regular, and does not take the values $w_1, w_2, \ldots$ more than p times in the region*

$$(3.2\,1) \qquad |\arg(1-z)| \leqq \alpha < \tfrac{1}{2}\pi, \quad |1-z| \leqq 1 - r_0 < 1.$$

Let $|\beta| < \alpha$, $\frac{1}{4} > \varrho_1 > \varrho_2 > \ldots > \varrho_n \ldots > 0$, $\varrho_n \to 0$ and suppose that $d\varrho_n$, where d is independent of n, is less than the shortest distance from the point $z_n = 1 - \varrho_n e^{i\beta}$ to any point at which $w(z) = w_1$. Suppose that

$$(3.2\,2) \qquad \left| \frac{w(z_n) - w_1}{w_m - w_1} \right| \leqq K_1$$

for some integer $m = m(n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Then the functions

$$F_n(z) = \frac{w(1 - \varrho_n(1-z)) - w_1}{w_m - w_1}$$

form a normal family in the region

$$|\arg(1-z)| \leqq \alpha, \quad \tfrac{1}{4}(1-r_0) \leqq |1-z| \leqq 4(1-r_0);$$

and for every $\delta > 0$ we have

$$(3.2\,3) \qquad |F_n(z)| < A(p, d, \delta, K_1)$$

for

$$(3.2\,4) \qquad |\arg(1-z)| \leqq \alpha - \delta, \quad \tfrac{1}{2}(1-r_0) \leqq |1-z| \leqq 2(1-r_0).$$

Further, if z and z' are two points in the region

$$(3,2\,5) \qquad |\arg(1-z)| \leqq \alpha - \delta, \quad \tfrac{1}{2}(1-r_0)\varrho_n \leqq |1-z| \leqq 2(1-r_0)\varrho_n,$$

and $|w(z')| > K_2 |w_m - w_1|$, *where* $K_2 > 0$ *and independent of n and m, then for every* $\varepsilon_1 > 0$ *we have*

$$|\arg w(z) - \arg w(z')| < \varepsilon_1, \tag{3.26}$$

provided that $|z - z'| < \varepsilon_2 \varrho_n$, *where* ε_2 *depends on* K_2, ε_1 *and* $A(p, d, \delta, K_1)$ *but not on n or m.*

Consider any family of functions $w(z)$ satisfying the hypotheses of the lemma. The functions $F_n(z)$ formed from these do not take the values 0 or 1 more than p times, and so they form a quasi-normal family[13]). Since $z = 1 - e^{i\beta}$ is not a limit point of zeros of the family, it is not an irregular point; and so, since $|F_n(1 - e^{i\beta})| \leqq K_1$, it follows that the family is normal and bounded in (3.24), the bound $A(p, d, \delta, K_1)$ depending on K_1, p, d and δ but not on the function $w(z)$. From this it follows that the functions are equicontinuous[14]) in (3.24). That is, given any $\varepsilon_1' > 0$ we have

$$|F_n(z'') - F_n(z''')| < \varepsilon_1',$$

provided that $|z'' - z'''| < \varepsilon_2' = \varepsilon_2'(\varepsilon_1', A(p, d, \delta, K))$, and z'', z''' lie in (3.24) for all functions of the family. Hence we have

$$|w(z) - w(z')| < \varepsilon_1' \, |w_m - w_1|, \tag{3.27}$$

provided that $|z - z'| < \varepsilon_2 \varrho_n$, and z, z' lie in (3.25). The last part of the lemma follows at once from this. For if $|w(z')| > K_2 |w_m - w_1|$, $\arg w(z')$ must be nearly equal to $\arg w(z)$, in order that (3.27) may hold.

3.3. Let $D(\alpha, \varphi)$ denote the region

$$|\arg(e^{i\varphi} - z)| \leqq \alpha < \tfrac{1}{2}\pi, \quad |e^{i\varphi} - z| \leqq 1 - r_0 < 1,$$

and let $D'(\alpha, \varphi)$ be the region formed from it by making a cut $\gamma_0(\alpha)$ through the zeros of $w(z)$ joining them to $z = 1 - r_0$.

Let $\gamma_1(\alpha)$, $\gamma_2(\alpha)$, $\gamma_3(\alpha)$, $\gamma_4(\alpha)$ denote the lines $|e^{i\varphi} - z| = 1 - r_0$, $0 \leqq \arg(e^{i\varphi} - z) \leqq \alpha$; $\arg(e^{i\varphi} - z) = \alpha$, $0 \leqq |e^{i\varphi} - z| \leqq 1 - r_0$; $|e^{i\varphi} - z| = 1 - r_0$, $-\alpha \leqq \arg(e^{i\varphi} - z) \leqq 0$; $\arg(e^{i\varphi} - z) = -\alpha$, $0 \leqq |e^{i\varphi} = z| \leqq 1 - r_0$, respectively.

Let $\Delta'(\alpha, \varphi)$ be the region corresponding to $D'(\alpha, \varphi)$ on the Riemann surface $s = \log w(z)$, and let $\Gamma_0(\alpha)$, $\Gamma_1(\alpha)$, $\Gamma_2(\alpha)$, $\Gamma_3(\alpha)$, $\Gamma_4(\alpha)$ correspond to $\gamma_0(\alpha)$, $\gamma_1(\alpha)$, $\gamma_2(\alpha)$, $\gamma_3(\alpha)$, $\gamma_4(\alpha)$ respectively. Let $S_1(a)$ denote the half strip defined by

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad |\eta| \leqq a, \quad \xi \geqq 0.$$

---

[13]) See P. Montel, *Leçons sur les familles normales* (Borel Series) (1927). S. 66—70.

[14]) loc. cit. S. 22.

Lemma 7. *Suppose that $w(z)$ is regular for $|z| \leqq 1$, and that $D(\alpha, \varphi)$ lies entirely in $|z| \leqq 1$. Then $\Delta'(\alpha, \varphi)$ can be represented on $S_1(a)$, provided that an appropriate cut k_0 is made in $S_1(a)$, Γ_0 corresponding to k_0, $\Gamma_1(\alpha)$, $\Gamma_3(\alpha)$ to $\xi = 0$, $|\eta| \leqq a$, and $\Gamma_2(\alpha)$, $\Gamma_4(\alpha)$ to $\eta = \pm a$, $\xi \geqq 0$, respectively.*

We merely use the function

$$Z(z) = \frac{a}{\alpha} \log \frac{1 - r_0}{e^{i\varphi} - z} \tag{3.31}$$

in place of (2.24), and the result follows as in Lemma 2.

Lemma 8. *Suppose that $w(z)$ is regular for $|z| \leqq 1$; let $\varrho = M(r)$. Suppose further that r_0 and α are chosen so that $D(\alpha, \varphi)$ lies entirely inside $|z| < 1$, and $1 - (1 - r_0)\cos\alpha < r < 1$. Then we can choose $\varphi = \varphi(r)$ so that there is at least one cross section, or set of cross sections, joining a point on $\Gamma_2(\alpha)$ to a point on $\Gamma_4(\alpha)$ inside $\Delta'(\alpha, \varphi)$ on which $\sigma = K$, provided that*

$$\log M(1 - (1 - r_0)\cos\alpha) < K \leqq \log M(r).$$

In the latter case the whole set of cross sections corresponds to a single continuous curve in the ζ plane joining $\eta = a$ to $\eta = -a$ inside $S_1(a)$. Further the cross sections can be chosen so that ζ is monotonic, and $\varphi(r)$ is chosen so that the cross section on which $\sigma = \log\varrho$, passes through the point $re^{i\vartheta(r)}$ at which $|w(re^{i\vartheta})| = M(r)$.

It will be sufficient to choose $\varphi(r)$ so that a part of the boundary of the region D in lemma 1 joins $\gamma_2(\alpha)$ to $\gamma_4(\alpha)$ inside $D(\alpha, \varphi)$, and passes through $re^{i\vartheta(r)}$. This curve will give the cross section $\sigma = \log\varrho$, and the rest can be obtained by deformation as in lemma 3. The argument is similar to that of lemma 3.

Let $\varphi = \vartheta(r)$, then the point $re^{i\vartheta(r)}$ lies inside $D(\alpha, \varphi)$. Let $C(\varrho, \alpha, \varphi)$ denote the part of the boundary of D containing the point $re^{i\vartheta(r)}$ and lying entirely inside $D(\alpha, \varphi)$. Since $D(\alpha, \varphi)$ does not contain the circle, $|z| = r$, $C(\varrho, \alpha, \varphi)$ is not a closed curve, and so it has two end points on the boundary of $D(\alpha, \varphi)$. Since $r > 1 - (1 - r_0)\cos\alpha$, the curve cannot cut $\gamma_1(\alpha)$, or $\gamma_3(\alpha)$. If one end point lies on $\gamma_2(\alpha)$, and the other on $\gamma_4(\alpha)$, we have the required result. If not, suppose that both end points lie on $\gamma_2(\alpha)$, and consider the behaviour of the end points $z_1(\varphi)$, $z_2(\varphi)$ as φ decreases.

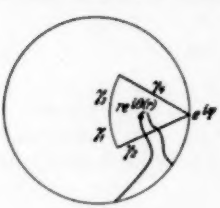


Fig. 5.

Since $C(\varrho)$ is a regular curve, we can show, as in Lemma 3, that the transfer of end points from $\gamma_2(\alpha)$ to $\gamma_4(\alpha)$ cannot occur more than a finite number of times as φ decreases from $\vartheta(r)$ to $\vartheta(r) - 2\pi$. Let

$z_2(\varphi)$ be the end point further from $e^{i\varphi}$, and suppose that for $\varphi = \varphi_1$ both end points are on $\gamma_2(\alpha)$, where $e^{i\varphi_1}$ may be included as part of $\gamma_2(\alpha)$, and that for every $\varphi < \varphi_1$, and sufficiently near to φ_1, $z_2(\varphi)$ is on $\gamma_4(\alpha)$. Then there must be part of $C(\varrho)$, C_0, say, joining $z_2(\varphi_1)$ to some point on $\gamma_4(\alpha) = \gamma_4(\alpha, \varphi)$, and lying inside $D(\alpha, \varphi)$ for every $\varphi < \varphi_1$ and near to it. Then C_0 must lie in, or on the boundary of $D(\alpha, \varphi)$. Now $C(\varrho, \alpha, \varphi)$, together with the part of $\gamma_2(\alpha, \varphi_1)$ joining $z_1(\varphi_1)$ to $z_2(\varphi_1)$, forms a closed curve $C'(\varrho, \alpha, \varphi_1)$ which does not meet $\gamma_4(\alpha, \varphi_1)$. Since $C(\varrho)$ has no double points, and C_0 lies in, or on the boundary of $D(\alpha, \varphi_1)$, C_0 lies outside $C'(\varrho, \alpha, \varphi_1)$. But then it must pass between $C(\varrho, \alpha, \varphi_1)$ and the origin, and, since $|w(re^{i\vartheta(r)})| = M(r) = \varrho$, and $|w(z)| = \varrho$ on C_0 we have a contradiction. Hence $z_2(\varphi)$ cannot be transferred, and so both end points are not transferred from $\gamma_2(\alpha)$ to $\gamma_4(\alpha)$ at the same moment, and we can obtain a curve of the required type.

Lemma 9. *Suppose that the hypotheses of lemma 8 hold, and that $\Theta(\sigma)$, $\xi_1(\sigma)$, $\xi_2(\sigma)$ are defined for $\Delta'(\alpha, \varphi)$ as they were for $\Delta'(\varphi)$. Suppose also that*

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\Theta(\sigma)} \geqq 2, \tag{3.32}$$

where $\log M(1-(1-r_0)\cos\alpha) < \sigma_1 < \sigma_2 \leqq \log M(r)$. *Then*

$$\xi_1(\sigma_2) - \xi_2(\sigma_1) > 2a \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\Theta(\sigma)} - 8a.$$

The proof is the same as for lemma 4.

We also require [15])

Lemma 10. *Suppose that $\Phi(z)$ is regular for $|z| \leqq R$, $\Phi(0) = 0$, and that $|\Phi(z)| \leqq K$ for $|z| \leqq R$. Then there is a number H such that*

$$\left| \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\{\arg \Phi(re^{i\vartheta})\} \right| < HK$$

for $|\vartheta - \vartheta_0| \leqq 2\pi$, $r \leqq \frac{1}{2}R$.

3.4. **Proof of theorem IV.** Let $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, and choose r_0 so that $D(\alpha, \varphi)$ lies inside $|z| < 1$. Let $\delta > 0$, and choose $\varphi = \varphi(r)$ so that $\Delta'(\alpha - 2\delta, \varphi)$ has cross sections of the required type for $\log M(1-(1-r_0)\cos\alpha) \leqq \sigma \leqq \log M(r)$. Put $a = \pi(p+1)$, $\sigma_1 = \log M(1-(1-r_0)\cos\alpha)$, $\sigma_2 = \log M(r)$, and $\alpha - 2\delta$ in place of α in lemma 9. We have, as in theorem III

[15]) See M. L. Cartwright, *Quarterly Journal* (Oxford Series) 1 (1930), S. 44.

$$\text{(3.41)} \qquad \xi_1(\sigma_2) \leqq \frac{\pi(p+1)}{\alpha - 2\delta} \log \frac{1-r_0}{1-r},$$

$$\text{(3.42)} \qquad \xi_2(\sigma_1) \geqq 0,$$

$$\text{(3.43)} \qquad \xi_1(\sigma_2) - \xi_2(\sigma_1) > 2\pi(p+1) \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\Theta(\sigma)} - 8\pi(p+1),$$

provided that (3.32) is satisfied[16]). We observe that

$$\text{(3.44)} \qquad \Theta(\log|w_m|) \leqq 2\pi(p+1)$$

for $m = 1, 2, \ldots$. For if not, $w(z)$ would take every value for which $|w(z)| = |w_m|$ at least $p+1$ times. We also observe that $\arg w(z)$ is one-valued in $D'(\alpha - 2\delta, \varphi)$, and, as z traverses the cut γ_0, $\arg w(z)$ increases on one side of the cut by exactly the same amount as it decreases on the other. Hence $\Theta(\sigma)$ cannot increase between $\sigma = \log|w_m|$ and $\sigma = \log|w_{m+1}|$ except by means of increments along $\Gamma_2(\alpha - 2\delta)$, and $\Gamma_4(\alpha - 2\delta)$. We shall use lemma 7 to show that $\arg w(z)$ cannot vary very rapidly on $\Gamma_2(\alpha - 2\delta)$ or $\Gamma_4(\alpha - 2\delta)$ unless the cross sections are very far apart. If $\arg w(z)$ varies slowly, $\Theta(\sigma)$ is less than $2\pi(p+1) + \varepsilon$ for all the cross sections considered, and we shall complete the proof as in § 2.5; while if the cross sections by which $\Theta(\sigma)$ is defined are far apart, it will be shown that the function $w(z)$ is very small indeed.

We may suppose in what follows that $\varphi(r) = 0$. For if not, we can consider the function $W(z) = w(ze^{-i\varphi(r)})$ which has the same properties. Put $\beta = \pm(\alpha - 2\delta)$ in lemma 7, and let $4pd < \sin\delta$. Suppose that $\sigma = K$, where $\log|w_m| < K \leqq \log|w_{m+1}|$ is a cross section for which $\Theta(\sigma)$ is defined, and deform it into the two nearest cross sections for which $\sigma = \log|w_m|$ and $\sigma = \log|w_{m+1}|$ respectively. We call the cross sections which are obtained in this way for $m = 1, 2, \ldots$, *key lines*. They need not be the cross sections by which $\Theta(\log|w_m|)$ is defined, but the argument used for (3.44) shows that the length of any key line is less than $2\pi(p+1)$. We choose the numbers $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots \to 0$ as follows: Suppose that $z_0^{(q)}$, $q = 1, 2, \ldots, Q \leqq p$, are the points in $|z| < 1$ at which $w(z_0^{(q)}) = w_1$, and draw the circles $|z - z_0^{(q)}| \leqq 2d|1 - z_0^{(q)}|$, $q = 1, 2, \ldots, Q$. Excluding the points in these circles from consideration, the points where the lines in the z plane corresponding to the key lines, cut $\arg z = \beta$ form a sequence $z_n' = 1 - \varrho_n' e^{i\beta}$, where $\varrho_1' > \varrho_2' > \ldots$. If $\varrho_n' > \frac{1}{2}\varrho_{n-1}'$ for $n = 1, 2, \ldots$, and $\frac{1}{8} < \varrho_1' < \frac{1}{4}$, we have the sequence which we want. If not, we insert extra points $z_n'' = 1 - \varrho_n'' e^{i\beta}$, $\varrho_1'' > \varrho_2'' > \ldots$, also lying outside the excluded circles, and form a new

[16]) The r_0 in the statement of the theorem is equal to $1 - (1 - r_0)\cos\alpha$.

sequence, $z_n = 1 - \varrho_n e^{i\beta}$, $\varrho_1 > \varrho_2 > \ldots$ by combining these points with the first sequence. Since $pd < \frac{1}{4}$, we can choose ϱ_n'' so that $\varrho_n > \frac{1}{2}\varrho_{n-1}$, $\frac{1}{8} < \varrho_1 < \frac{1}{4}$. Then the regions (3.25) will cover the whole sector $|\arg(1-z)| \leqq \alpha - 2\delta$, $|1-z| \leqq \frac{1}{4}(1-r_0)$, and the distance of the point z_n from the nearest zero of $w(z) - w_1$ is greater than $d\,\varrho_n$.

Suppose that $|w_{m-1}| < |w(z_n)| \leqq |w_m|$, where $m = m(n)$. Then since $|w_m| \to \infty$, we can choose m_0 so that $|w_{m-1}| > 2|w_1|$ for $m > m_0$; and, since $|w_m| < k|w_{m-1}|$, we have $|w(z)| < k|w_{m-1}|$. Hence

$$(3.45)\qquad \left|\frac{w(z_n)-w_1}{w_m - w_1}\right| < \frac{k|w_{m-1}|+|w_1|}{|w_m|-|w_1|} < \frac{(k+1)|w_{m-1}|}{(1-\frac{1}{2})|w_{m-1}|} < 4k.$$

Also

$$(3.46)\qquad \left|\frac{w(z_n)-w_1}{w_m - w_1}\right| > \frac{|w_{m-1}|-|w_1|}{|w_m|+|w_1|} > \frac{\frac{1}{2}|w_{m-1}|}{(k+1)|w_{m-1}|} > \frac{1}{4k}.$$

It follows from (3.45) and (3.23) that

$$(3.47)\qquad |w(z) - w_1| < A(p,d,\delta,k)\,|w_m - w_1| = A(p,d,\delta,k)\,|w_m|$$

in the region (3.25); and it follows from (3.46) and (3.26) that, given any $\varepsilon_1 > 0$ we have

$$(3.48)\qquad |\arg w(z) - \arg w(z_n)| < \varepsilon_1,$$

provided that $m > m_0$, and that z, z_n lie in (3.25), and $|z - z_n| < \varepsilon_2\varrho_n$, where ε_2 depends on k, ε_1 and $A(p,d,\delta,k)$. If z_n corresponds to the end point of a key line, the length of the key line is not greater than $2\pi(p+1)$; and so we have

$$(3.481)\qquad \Theta(\sigma) < 2\pi(p+1) + 2\varepsilon_1$$

for the cross sections whose end points correspond to points in $|z - z_n| < \varepsilon_2\varrho_n$.

Suppose that given any $\alpha < \frac{1}{2}\pi$, $\varepsilon_1 > 0$, $\eta > 0$, $\delta > 0$, we can choose d and σ_0 so that (3.481) holds for $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, except perhaps for a set of measure less than $\eta(\sigma_2 - \sigma_1)$, provided that $\sigma_1 > \sigma_0$, $\sigma_2 - \sigma_1 > \sigma_0$. Then by (3.43) we have

$$\xi_1(\sigma_2) - \xi_2(\sigma_1) > \frac{2\pi(p+1)(1-\eta)(\sigma_2-\sigma_1)}{2\pi(p+1)+2\varepsilon_1} - 8\pi(p+1),$$

provided that $\sigma_2 - \sigma_1$ is sufficiently large for (3.32) to hold, i. e.

$$\frac{(1-\eta)(\sigma_2-\sigma_1)}{2\pi(p+1)+2\varepsilon_1} > 2.$$

Hence, choosing $\sigma_0 > 4\,\dfrac{\pi(p+1)+\varepsilon_1}{1-\eta}$, we have

$$\sigma_2 = \log M(r) \leqq \frac{\pi(p+1)+\varepsilon_1}{(\alpha-2\delta)(1-\eta)}\log\frac{1-r_0}{1-r} + \log M(1-(1-r_0)\cos\alpha) + A(p),$$

provided that $\sigma_2 - \sigma_1 > \sigma_0$, and $\sigma_1 > \sigma_0$. Since α may be chosen as near to $\frac{1}{2}\pi$ as we please, provided that σ_0 is sufficiently large, this

gives the required result. For if $\sigma_1 = \log M(1-(1-r_0)\cos\alpha)$ is bounded as $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$, the result is obviously true; and, if $\sigma_2 - \sigma_1$ is bounded when α is fixed and $r \to 1$, $\sigma_2 = \log M(r)$ is bounded as $r \to 1$.

Suppose now that (3.4 8 1) does not hold for certain cross sections; then the points in the z plane corresponding to the end points of these cross sections lie outside one of the circles $|z - z_n'| \leqq \varepsilon_2 \varrho_n'$, where z_n' corresponds to the end point of one of the key lines corresponding to the cross section considered.

Consider first cross sections whose end points correspond to points in the z plane outside the excluded circles $|z - z_0^{(q)}| \leqq 2d|1 - z_0^{(q)}|$, $q = 1, 2, \ldots, Q$. Suppose that there is a number $\eta > 0$ such that the measure of the set of cross sections for which (3.4 8 1) does not hold, and for whose end points $\xi < \xi_1(\sigma_2)$, is greater than $\eta(\sigma_2 - \sigma_1)$ for some large values of σ_2. Given any $\varepsilon_3 > 0$ we can choose $m_0 = m_0(\varepsilon_3)$ so that

$$\log|w_m| - \log|w_{m-1}| < \varepsilon_3$$

for $m > m_0$; and so any single interval of σ for which

$$\Theta(\sigma) > 2\pi(p+1) + 2\varepsilon_1, \quad \sigma > \sigma_0 > \log|w_{m_0}|,$$

must be less than ε_3 in length, provided that the end points correspond to points outside the excluded circles. Hence there are at least $\frac{\eta}{2\varepsilon_3}(\sigma_2 - \sigma_1)$ such intervals on either $\Gamma_2(\alpha - 2\delta)$, or $\Gamma_4(\alpha - 2\delta)$. Let z_{n_1}, z_{n_2} be points in the z plane on each side of one of these intervals. Then $|z_{n_1} - z_{n_2}| \geqq \varepsilon_2|1 - z_{n_2}|$; and so, if $\xi_{n_1} + i\pi(p+1)$, and $\xi_{n_2} + i\pi(p+1)$ are the corresponding points in the ζ plane, we have $\xi_{n_1} - \xi_{n_2} > \frac{1}{2}\varepsilon_2$ by (3.3 1). Summing over these intervals, we have

$$\sum(\xi_{n_1} - \xi_{n_2}) > \frac{1}{2}\varepsilon_2 \cdot \frac{\eta}{2\varepsilon_3}(\sigma_2 - \sigma_1) = \frac{\varepsilon_2\eta}{4\varepsilon_3}(\sigma_2 - \sigma_1).$$

Since $\xi \geqq 0$, the sum on the left is certainly less than $\xi_1(\sigma_2)$; and so

$$\sigma_2 = \log M(r) < \frac{4\varepsilon_3}{\varepsilon_2\eta}\xi_1(\sigma_2) + \log M(1-(1-r_0)\cos\alpha).$$

Given any $\varepsilon_4 > 0$, we can choose ε_3 so small that

$$\log M(r) < \varepsilon_4 \log\frac{1}{1-r} + \log M(1-(1-r_0)\cos\alpha),$$

provided that $\sigma_2 - \sigma_1 > \sigma_0$, and $\sigma_1 > \sigma_0$, where σ_0 now depends on ε_4, on the rate of convergence of (3.1 1), and on r_0 and k.

Suppose next that the measure of the set of cross sections for which (3.4 8 1) fails, and for whose end points $\xi_1(\sigma_2) \leqq \xi \leqq \xi_2(\sigma_2)$, is greater than $\eta(\sigma_2 - \sigma_1)$, where $\sigma_2 - \sigma_1$ is large; and suppose that the end points

correspond to points outside the circles $|z - z_0^{(q)}| \leqq 2d|1 - z_0^{(q)}|$. Then among these cross sections there are ones of measure greater than $\frac{1}{2}\eta(\sigma_2 - \sigma_1)$ for which $\sigma < \sigma_2 - \frac{1}{2}\eta(\sigma_2 - \sigma_1)$; and, as above, we see that these are divided into not less than $\frac{\eta}{2\varepsilon_3}(\sigma_2 - \sigma_1)$ intervals by the key lines, which give rise to the points z_n', and by the points corresponding to the excluded circles. Since $\sigma_2 - \sigma_1$ is large, the number of intervals is greater than the number of excluded circles, and so we have at least one point z_n' corresponding to $\xi_3 + i\pi(p+1)$, where $\xi_1(\sigma_2) < \xi_3 < \xi_2(\sigma_2)$. For the corresponding key line $\log|w_m| < \sigma_2 - \frac{1}{2}\eta(\sigma_2 - \sigma_1)$, and so it follows from (3.47) that

$$|w(z)| < A(p, d, \delta, k)\,|w_m| = A(p, d, \delta, k)\,M(r)\,e^{-\frac{1}{2}\eta(\sigma_2 - \sigma_1)}$$

for $|1 - z| = \varrho_n'$. That is

$$\sigma < \sigma_2 + A(p, d, \delta, k) - \tfrac{1}{2}\eta(\sigma_2 - \sigma_1) \tag{3.49}$$

at every point on $\xi = \xi_3$. But the line corresponding to the cross section $\sigma = \sigma_2$ is a continuous curve in the ζ plane touching both $\xi = \xi_1(\sigma_2)$ and $\xi = \xi_2(\sigma_2)$. Hence it crosses $\xi = \xi_3$ and there is at least one point on $\xi = \xi_3$ at which $\sigma = \sigma_2$. But (3.49) gives a contradiction when $\sigma_2 - \sigma_1$ is sufficiently large; and so the measure of these cross sections is less than $\eta(\sigma_2 - \sigma_1)$ for $\sigma_2 - \sigma_1 > \sigma_0$.

We have now proved the theorem for the case in which $w(z)$ does not take the value w_1. Suppose finally that there is a set of cross sections of measure greater than $\eta(\sigma_2 - \sigma_1)$ whose end points correspond to points in the excluded circles. Since there are at most p zeros, there are excepted intervals of length $\frac{\eta}{p}(\sigma_2 - \sigma_1)$ such that the points in the z plane corresponding to the end points lie within a distance $2d|1 - z_0^{(q)}|$ of one particular zero, $z_0^{(q)}$; and so they lie within a single interval I of length $2d|1 - z_0^{(q)}|$ on either arg $(1 - z) = \alpha - 2\delta$ or arg $(1 - z) = -\alpha + 2\delta$. Suppose that I lies on arg $(1 - z) = \alpha - 2\delta$, and add to I intervals of length $2d|1 - z_0^{(q)}|$ on each side, and call the new interval I'. Its length is $6d|1 - z_0^{(q)}|$. Since $\varrho_n > \frac{1}{2}\varrho_{n-1}$ for all n, we can select ϱ_n so that the region (3.25) contains I'; if there are two possible values of ϱ_n, we select the one for which $|w_m|$ is least. Then $|w(z)| > |w_{m-1}|$ on that part of $\arg(1 - z) = \alpha - 2\delta$ which lies in (3.25) but not in I. Let z' be the end point of I nearest the point

$$z = 1 + (1 - r_0)\,\varrho_n\,e^{i(\alpha - 2\delta)},$$

and let

$$\Phi(z) = \frac{w(z)}{|w(z')|}.$$

Then $|\Phi(z')| = 1$, and by (3.47) we have

$$|\Phi(z)| \leqq A(p, d, \delta, k) \frac{|w_m| + |w_1|}{|w(z')|} \leqq A(p, d, \delta, k) \frac{|w_m|}{|w_{m-1}|} = A(p, d, \delta, k)$$

in (3.25). The circle $|z - z'| \leqq 2d|1 - z_0^{(q)}| \leqq 4d|1 - z'|$ lies in (3.25), since $4d < \sin\delta < 1$. Applying lemma 10 to $\Phi(z)$ in this circle we have

$$(3.491) \qquad \left|\int_C d \arg w(z)\right| = \left|\int_C d \arg \Phi(z)\right| < A(p, d, \delta, k),$$

where the integral is taken round any arc of $|z - z'| = d|1 - z_0^{(q)}|$. Let C be the arc cut off by $\arg(1 - z) = \alpha - 2\delta$, and deform it into the chord, $\arg(1 - z) = \alpha - 2\delta$. Since there are only p zeros all together, this leaves (3.491) unchanged; and this chord covers I. Since the measure of the cross sections corresponding to points in I is greater than $\frac{\eta}{p}(\sigma_2 - \sigma_1)$ there is at least one key line in I; so, using (3.44), we have

$$\Theta(\sigma) < A(p, d, \delta, k)$$

for all these cross sections. Let $\sigma = \sigma_3$ and $\sigma = \sigma_4$ be the smallest and greatest respectively. Then $\sigma_4 - \sigma_3 > \frac{\eta}{p}(\sigma_2 - \sigma_1)$, and, using lemma 9 with $a = \pi(p + 1)$, we have

$$\begin{aligned} \xi_1(\sigma_4) - \xi_2(\sigma_3) &> 2\pi(p+1) \int_{\sigma_3}^{\sigma_4} \frac{d\sigma}{\Theta(\sigma)} - 8\pi(p+1) \\ &> A(p, d, \delta, k)(\sigma_4 - \sigma_3) - 8\pi(p+1) \\ &> A(p, d, \delta, k)\,\eta(\sigma_2 - \sigma_1). \end{aligned}$$

Since the distance between the corresponding points in the z plane is less than $d\varrho_n$, $\xi_1(\sigma_4) - \xi_2(\sigma_3)$ is certainly less than Ad.

Hence

$$Ad > A(p, d, \delta, k)\,\eta(\sigma_2 - \sigma_1),$$

which gives a contradiction if $\sigma_2 - \sigma_1$ is large, and so the theorem is proved.

3.5. The proof of theorem II may be completed by applying lemma 5 to

$$\frac{1}{4k\mu}\left(\frac{w(z) - w_1}{w_{m_0} - w_1}\right),$$

where m_0 is chosen so that $|w_{m_0}| > 2|w_1|$. Then

$$\left|w(r_0 e^{i\vartheta}) - w_1\right| < \mu A(p, k, r_0)|w_{m_0} - w_1| < \mu A(p, k, r_0)|w_1|,$$

and, putting this in theorem IV, we have the required result.

(Eingegangen am 1. 8. 1934.)

Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen.

Die Randpunkte der Regularitätsbereiche.

Von

Friedrich Korte[1]) in Münster (Westfalen).

Unter den Bereichen über dem (projektiv abgeschlossenen) Raum der n komplexen Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sind diejenigen ausgezeichnet, die genaue „Existenzbereiche" einer analytischen Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ sind. Diese Bereiche heißen *Regularitätsbereiche*, und jedem anderen Bereich $\mathfrak{B}$ ist eindeutig ein ihn umfassender Regularitätsbereich — der kleinste seiner Art — als seine *Regularitätshülle* $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ zugeordnet. In mehreren Arbeiten der letzten Jahre ist diese Zuordnung untersucht und der Zusammenhang der Theorie der Regularitätsbereiche und Hüllen mit den verschiedensten Fragen der Funktionentheorie aufgezeigt[2]).

Nun kann, im Gegensatz zur Eindeutigkeit der Hülle eines vorgelegten Bereiches, ein Regularitätsbereich Hülle verschiedener Bereiche sein. So ist im R_4 der Dizylinder $\mathfrak{D}$: $|z| < 1$, $|w| < 1$ Hülle jedes inneren Bereiches $\mathfrak{B}$, der 1. den Nullpunkt als inneren Punkt und 2. die Punkte der Kante $|z| = 1, |w| = 1$ des Dizylinders sämtlich als Randpunkte enthält; die übrigen Randpunkte von $\mathfrak{D}$ braucht $\mathfrak{B}$ nicht aufzuweisen. Die Randpunkte des Dizylinders zerfallen so in zwei Klassen: 1. Die *Stützpunkte*, das sind jene Randpunkte, die auch als Randpunkte aller Bereiche $\mathfrak{B}$ auftreten, für die $\mathfrak{D} = \mathfrak{H}(\mathfrak{B})$, und 2. die *Flachpunkte*, die nicht bei allen diesen Bereichen $\mathfrak{B}$ auftreten. (Näheres über diese Begriffe siehe im ersten Abschnitt dieser Arbeit.)

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich nun mit der Untersuchung dieser Stütz- und Flachpunkte jeweils vorgegebener Regularitätsbereiche.

Im ersten Abschnitt wird nach den einführenden Definitionen und den sich unmittelbar ergebenden Kriterien für die Stütz- und Flachpunkte die Frage der Existenz dieser beiden Klassen von Randpunkten erörtert.

---

[1]) Seminar Prof. Behnke. — Diese Arbeit hat als Inauguraldissertation der phil. und nat. Fakultät d. Univ. Münster vorgelegen.

[2]) Die folgenden Literaturangaben beziehen sich fast ausschließlich auf den soeben erschienenen Bericht: H. Behnke und P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen (1934), abgekürzt: B.-Th., Bericht. (Dort siehe auch Angabe der Originalliteratur.)

Das Beispiel der Hyperkugel zeigt schon, daß ein Regularitätsbereich keine Flachpunkte aufzuweisen braucht. Dagegen sind nur wenige Regularitätsbereiche bekannt, die keine Stützpunkte aufweisen, nämlich der Raum der $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nach Herausnahme eines algebraischen Gebildes. Ein beschränkter, schlichter Regularitätsbereich hat stets Stützpunkte.

Der zweite Abschnitt beginnt mit dem naheliegenden Satz: Wenn in jeder noch so kleinen Umgebung eines Randpunktes P eine im Bereiche $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion Werte annimmt, die sie sonst in $\mathfrak{B}$ nicht besitzt, so ist P Stützpunkt von $\mathfrak{B}$. Die weit schwerer zu beweisende Umkehrung wird für stetig-sternartige Bereiche gezeigt: „*P sei Stützpunkt eines stetig-sternartigen Regularitätsbereiches $\mathfrak{B}$. Dann gibt es zu jeder Umgebung $\mathfrak{U}$ von P eine in $\mathfrak{B}$ reguläre und beschränkte Funktion, die in gemeinsamen Punkten von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ Werte annimmt, die sie in den übrigen Punkten von $\mathfrak{B}$ nicht aufweist.*" Unter Benutzung bekannter Sätze folgt daraus, daß es zu jeder noch so kleinen Umgebung $\mathfrak{U}$ eines Stützpunktes (bei einem stetig-sternartigen Bereich) Polynomhyperflächen $|p(z_1, z_2, \ldots, z_n)| = 1$ gibt, die nur innerhalb $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{B}$ eindringen. Jetzt ergibt sich u. a. unmittelbar ein Zusammenhang mit den Untersuchungen von E. E. Levi über Hyperflächen als natürliche Grenzen. Aus dem soeben angegebenen Satz folgt sofort: Der Rand eines stetig-sternartigen Regularitätsbereiches $\mathfrak{B}$ im Raume zweier komplexer Veränderlichen bestehe in einer Umgebung eines Randpunktes P aus lauter Stützpunkten und sei dort zweimal stetig differentiierbar. Dann ist dort $L(\varphi) \neq 0$. Das heißt wiederum, daß der Rand von $\mathfrak{B}$ dort nicht von einem analytischen Hyperflächenstück gebildet wird.

Im dritten Abschnitt wird die letzte Aussage für beliebige Regularitätsbereiche bewiesen: „In einer Umgebung des Randpunktes P eines Regularitätsbereiches $\mathfrak{B}$ bestehe der Rand aus einem analytischen Hyperflächenstück $\mathfrak{f}$, das in jedem Punkte eine stetige Hypertangente (mit analytischer Haupttangente) aufweist. Dann sind die Punkte von $\mathfrak{f}$ alle Flachpunkte."

Im besonderen Falle der eigentlichen Kreiskörper und Hartogsschen Bereiche, deren Rand zweimal stetig differentiierbar ist, gelingt es uns nun im vierten Abschnitt, aus der Kenntnis des Levischen Differentialausdrucks zu entscheiden, ob der betreffende Randpunkt des Regularitätsbereiches $\mathfrak{B}$ Flachpunkt oder Stützpunkt ist. Ist in der Umgebung eines Randpunktes P der Ausdruck $L(\varphi) \neq 0$, so ist P immer ein Stützpunkt. Also *nur* die Punkte auf denjenigen Randmannigfaltigkeiten, die analytische Hyperflächenstücke bilden, sind Flachpunkte. Zum Beweis benötigen wir die Ergebnisse der neueren Untersuchungen über die polynom- und regulärkonvexen Bereiche.

Im letzten Abschnitt werden dann zu einem vorgegebenen eigentlichen Kreiskörper und Regularitätsbereich mit zweimal stetig differentiierbarem Rande sämtliche eigentlichen Kreiskörper angegeben, die ihn zur Hülle haben.

Die hier vorgenommene Einteilung der Randpunkte von Regularitätsbereichen legt es nahe, die Theorie der Stütz- und Flachpunkte als eine Theorie der Körper aufzufassen, die konvex in Bezug auf analytische Hyperflächen sind. Die einzelnen Sätze zeigen jedoch, daß in mancher Hinsicht keine Analogie zur Theorie der im elementaren Sinne konvexen Bereiche besteht[2a]).

Inhaltsübersicht.

Anmerkungen. Bei den verwandten, hier nicht definierten Begriffen wie Bereich, Teilbereich usw. und hier unbewiesenen Sätzen stützen wir uns auf den schon erwähnten Bericht: „B.-Th., Bericht."

Die Überlegungen im ersten und dritten Abschnitt sowie im zweiten Abschnitt mit Ausnahme der Schlußbemerkung über $L(\varphi)$ werden im Raume von $n \geqq 2$ komplexen Veränderlichen ausgeführt. In den übrigen Teilen der Arbeit tritt der Levische Differentialausdruck und der Begriff des Kreiskörpers auf. Deshalb beschränken wir uns dort auf zwei komplexe Veränderliche. (Der Kenner sieht sofort, daß hier eine Ausdehnung auf n komplexe Veränderliche nur durch die Schwerfälligkeit der Darstellung behindert wird.)

§ 1.

Definition, Existenz und allgemeine Eigenschaften der Stützpunkte sowie der Flachpunkte.

Definition. Ist $\mathfrak{G}$ ein Teilbereich des Regularitätsbereiches $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ die Regularitätshülle von $\mathfrak{G}$, so heißt $\mathfrak{G}$ ein **Stützbereich** von $\mathfrak{B}$. Ferner heißt ein Randpunkt P eines Regularitätsbereiches $\mathfrak{B}$ ein **Stützpunkt** von $\mathfrak{B}$, wenn P Randpunkt *aller* Stützbereiche von $\mathfrak{B}$ ist. Gibt es da-

[2a]) Über die Randpunkte von Bereichen im R_4 siehe auch Stefan Bergmann, Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande. Crelles Journal f. d. r. u. a. Math. **169** (1933) u. **172** (1934).

gegen *einen* Stützbereich von $\mathfrak{B}$, der P nicht zum Randpunkte hat, so heißt P ein **Flachpunkt** von $\mathfrak{B}$.

Existenz. Die $2n$-dimensionale Hyperkugel hat als Randpunkte nur Stützpunkte, weil jeder ihrer Stützbereiche ihre sämtlichen Randpunkte besitzt. Der Dizylinder $\mathfrak{D}$: $|w| < 1$, $|z| < 1$ hat als Stützbereich etwa den Bereich $|z| < 1$, $|w| - \frac{|z|}{2} < \frac{1}{2}$ sowie $|w| < 1$, $|z| - \frac{|w|}{2} < \frac{1}{2}$. Die Randpunkte $|w| = 1$, $|z| < 1$ und $|z| = 1$, $|w| < 1$ von $\mathfrak{D}$ sind also Flachpunkte.

Satz 1. *Ein Randpunkt P eines Regularitätsbereiches $\mathfrak{B}$ ist dann und nur dann ein Stützpunkt von $\mathfrak{B}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ der Bereich: „$\mathfrak{B}$ vermindert um die ε-Hyperkugel um P" eine Hülle hat, die von $\mathfrak{B}$ verschieden ist.*

In der Tat, die Bedingung ist notwendig! Denn wäre sie nicht erfüllt, so gäbe es ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß der Bereich: „$\mathfrak{B}$ vermindert um die ε_0-Hyperkugel um P" noch den Bereich $\mathfrak{B}$ als Hülle hat. P wäre also entgegen der Annahme kein Stützpunkt.

Die Bedingung ist auch hinreichend. $\mathfrak{B}^*$ sei ein Teilbereich von $\mathfrak{B}$, der P nicht zum Randpunkt hat. Der Abstand des Bereiches $\mathfrak{B}^*$ von P sei größer als $d > 0$. Der Bereich: „$\mathfrak{B}$ vermindert um die d-Hyperkugel um P" umfaßt dann $\mathfrak{B}^*$ und hat seinerseits eine Hülle, die kleiner als $\mathfrak{B}$ ist. Folglich gilt gleiches für $\mathfrak{B}^*$. Ein Teilbereich $\mathfrak{B}^{(0)}$ von $\mathfrak{B}$ kann also nur dann $\mathfrak{B}$ zur Hülle haben, wenn $\mathfrak{B}^{(0)}$ auch P zum Randpunkt hat, w. z. b. w.

Abkürzung. Für die $2n$-dimensionale Hyperkugel mit dem Radius r um P gebrauchen wir fernerhin die Bezeichnung: $\mathfrak{K}(P, r)$, für den Bereich: „$\mathfrak{B}$ vermindert um die ε-Hyperkugel um P" die Bezeichnung: $\mathfrak{B} - \mathfrak{K}(P, \varepsilon)$.

Wir fügen als Ergänzung von Satz 1 hinzu:

Ein Randpunkt P eines Regularitätsbereiches $\mathfrak{B}$ gehört dann und nur dann zu den Flachpunkten, wenn es ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt, derart, daß der Bereich $\mathfrak{B} - \mathfrak{K}(P, \varepsilon_0)$ ebenfalls Stützbereich von $\mathfrak{B}$ ist. Gleiches gilt also dann erst recht für die Bereiche $\mathfrak{B} - \mathfrak{K}(P, \varepsilon)$, $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Anmerkung. Aus der Eigenschaft der Flachpunkte kann nicht geschlossen werden, daß, wenn $\mathfrak{B}^*$ ein Teilbereich des Regularitätsbereiches $\mathfrak{B}$ ist und gleichfalls alle seine Stützpunkte als Randpunkte aufweist, $\mathfrak{B}$ die Hülle von $\mathfrak{B}^*$ sein müßte. So besitzt der Zylinderbereich $|w - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$, $|w| < 1$, $|z| < 1$ alle Randpunkte des Einheitsdizylinders $|w| < 1$, $|z| < 1$; er ist auch Teilbereich des letzteren und doch auch selbst Regularitätsbereich. Über die Beziehung zwischen den Stütz- und Flachpunkten zweier ineinanderliegender Bereiche sagt nun der folgende Satz aus.

Satz 2. *Der Regularitätsbereich* $\mathfrak{B}_1$ *sei Teilbereich des Regularitätsbereiches* $\mathfrak{B}_2$; *P und die in einer Umgebung von ihm liegenden Randpunkte seien alle gemeinsame Randpunkte von* $\mathfrak{B}_1$ *und* $\mathfrak{B}_2$. *Ist dann P Stützpunkt von* $\mathfrak{B}_2$, *so ist P auch Stützpunkt von* $\mathfrak{B}_1$.

Die Regularitätshülle $\mathfrak{N}$ des Bereiches $\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{K}(P, \varepsilon)$ ist nach Satz 1 kleiner als $\mathfrak{B}_2$ und ist ihrerseits sicher von $\mathfrak{B}_1$ verschieden. $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{B}_1$ besitzen einen Durchschnitt, der erstens Regularitätsbereich ist und zweitens gewisse in der Nachbarschaft von P liegende Randpunkte von $\mathfrak{B}_1$ nicht hat, dagegen drittens alle Randpunkte von $\mathfrak{B}_1$ aufweist, die nicht innerhalb von $\mathfrak{K}(P, \varepsilon)$ liegen.

Aus Satz 2 folgt unmittelbar: *Ist unter den Voraussetzungen von Satz 2 P ein Flachpunkt von* $\mathfrak{B}_1$, *so ist P auch Flachpunkt von* $\mathfrak{B}_2$. Als Ergänzung zu Satz 2 fügen wir noch hinzu:

Satz 2a. $\mathfrak{B}_1$ *sei Teilbereich von* $\mathfrak{B}_2$, *P gemeinsamer Randpunkt und ein solcher Stützpunkt von* $\mathfrak{B}_2$, *daß zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein Regularitätsbereich* $\mathfrak{N}_\varepsilon$ *mit* $\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{K}(P, \varepsilon) < \mathfrak{N}_\varepsilon < \mathfrak{B}_2$ *existiert, der P nicht zum Randpunkt hat. Dann ist P auch Stützpunkt von* $\mathfrak{B}_1$[3]).

Hiervon gilt sicher nicht die Umkehrung: „Aus P Stützpunkt von $\mathfrak{B}_1$ folgt P Stützpunkt von $\mathfrak{B}_2$". Beispiel: $\mathfrak{B}_1$ sei der Einheitsdizylinder $\mathfrak{D}$: $|w| < 1$, $|z| < 1$. Der Punkt $(1, 1)$ ist Stützpunkt (denn die Hyperebene $u + x = 2 - \varepsilon$ trennt nur die Punkte in der Nähe von $(1, 1)$ von $\mathfrak{D}$ ab, und der Restkörper ist Regularitätsbereich). $\mathfrak{B}_2$ sei der Zylinderbereich: w Vereinigung von $|w| < 1$ und $|w - 1| < \frac{1}{2}$, $|z| < 1$. Auch hier ist $(1, 1)$ Randpunkt, aber nicht Stützpunkt.

Aber auch von Satz 2 kann die Umkehrung nicht gelten. Beispiel: $\mathfrak{B}_1$ sei der Bereich $|w| < |z|$, $|z| < 1$. Der Punkt $(0, 0)$ ist Stützpunkt (denn die Bereiche $0 < \varepsilon < |w| < |z|$, $|z| < 1$ sind Regularitätsbereiche). $\mathfrak{B}_2$ sei der Einheitsdizylinder $|w| < 1$, $0 < |z| < 1$ ohne die Ebene $z = 0$. Hier ist der Punkt $(0, 0)$ Flachpunkt.

Satz 3. *Jeder beschränkte, schlichte Regularitätsbereich* $\mathfrak{B}$ *hat unter seinen Randpunkten mindestens einen Stützpunkt.*

Satz 3 ergibt sich unmittelbar aus Satz 2a, wenn man als Bereich $\mathfrak{B}_1$ den Bereich $\mathfrak{B}$, als $\mathfrak{B}_2$ die kleinste $\mathfrak{B}$ umfassende Hyperkugel wählt.

Nun ist uns der Satz bekannt: Wird durch eine in $\mathfrak{G}$ reguläre Transformation T der Bereich $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}^*$ übergeführt, so führt T auch $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ in $\mathfrak{H}(\mathfrak{G}^*)$ über[4]). Daraus folgt, daß, wenn auf einen Regularitätsbereich $\mathfrak{B}$ eine Transformation ausgeübt wird, die im Innern von $\mathfrak{B}$ *und* auf dem Rande noch regulär ist, die Eigenschaft eines Randpunktes von $\mathfrak{B}$, Stützpunkt oder Flachpunkt zu sein, erhalten bleibt. So können wir Satz 3 jetzt auch so aussprechen:

---

[3]) $\mathfrak{B}_1 < \mathfrak{B}_2$ bedeutet: „$\mathfrak{B}_1$ ist Teilbereich von $\mathfrak{B}_2$", $\mathfrak{B}_1 \ll \mathfrak{B}_2$ bedeutet: „$\mathfrak{B}_1$ ist ein Teilbereich von $\mathfrak{B}_2$, dessen Randpunkte alle innere Punkte von $\mathfrak{B}_2$ sind".

[4]) Vgl. B.-Th., Bericht, Kap. VI, § 2.

Jeder schlichte Regularitätsbereich, bei dem mindestens eine analytische Ebene ganz draußen liegt, weist einen Stützpunkt auf.

Daß die Eigenschaft, Stützpunkt oder Flachpunkt eines Regularitätsbereiches $\mathfrak{B}$ zu sein, nicht gegenüber allen in $\mathfrak{B}$ regulären Transformationen invariant ist, zeigt folgendes Beispiel: Der Regularitätsbereich

$$\mathfrak{B}:\quad |w| < 1, \quad |z| < 1, \qquad w \neq 0$$

wird durch die Transformation

$$T:\quad w' = w, \quad z' = zw$$

in den Regularitätsbereich

$$\mathfrak{B}^*:\quad |z| < |w|, \quad |w| < 1$$

übergeführt. Der Randpunkt $w = 0$, $z = \frac{1}{2}$ von $\mathfrak{B}$ z. B. wird dabei in $(0, 0)$ von $\mathfrak{B}^*$ geworfen. Der erste Punkt ist Flachpunkt von $\mathfrak{B}$, der zweite Stützpunkt von $\mathfrak{B}^*$. Der *endliche Raum* ist ein Regularitätsbereich, der als Randpunkte nur Flachpunkte hat. Wir beweisen jetzt:

Satz 4. *Häufungsstellen von Stützpunkten eines Regularitätsbereiches $\mathfrak{B}$ sind wieder Stützpunkte.*

Ist der Randpunkt P von $\mathfrak{B}$ kein Stützpunkt, so gibt es einen Stützbereich $\mathfrak{B}^{(0)}$ von $\mathfrak{B}$, der P nicht als Randpunkt hat. Da aber alle Stützpunkte von $\mathfrak{B}$ auch Randpunkte von $\mathfrak{B}^{(0)}$ sind, können diese Stützpunkte sich nicht in P häufen. Nunmehr folgt auch zugleich:

Bei einem Regularitätsbereich mit zusammenhängendem Rande, der Stützpunkte wie auch Flachpunkte aufweist, bilden die Stützpunkte eine abgeschlossene, die Flachpunkte eine offene Menge in der Randmannigfaltigkeit.

§ 2.

Das Verhalten der Funktionen und analytischen Flächen in der Umgebung von Stützpunkten.

Eine in einem Regularitätsbereiche $\mathfrak{B}$ analytische Funktion kann bekanntlich in $\mathfrak{B}$ keine anderen Werte annehmen, als sie in jedem seiner Stützbereiche annimmt. Daraus folgt:

Satz 5. *Hat ein Randpunkt P eines Regularitätsbereiches $\mathfrak{B}$ die Eigenschaft, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion gibt, die in $\mathfrak{K}(P, \varepsilon)$ im Innern von $\mathfrak{B}$ Werte annimmt, die sie sonst in $\mathfrak{B}$ noch nicht besitzt, so ist P Stützpunkt von $\mathfrak{B}$.*

Wichtig ist jetzt die Frage, ob umgekehrt in der Umgebung eines Stützpunktes von geeigneten Funktionen immer Werte angenommen werden, die sie sonst im Bereiche nicht annehmen. Für eine gewisse Klasse von Bereichen läßt sich das beweisen.

Ein Bereich $\mathfrak{B}$ heißt *sternartig*, wenn es einen inneren Punkt O von $\mathfrak{B}$ — den Bezugspunkt von $\mathfrak{B}$ — gibt, so daß jede Halbgerade durch O den Rand des Bereiches genau einmal schneidet. Der sternartige Bereich $\mathfrak{B}$ heißt *stetig-sternartig*, wenn die Entfernungen der Randpunkte von O mit stetig sich ändernden Halbgeraden sich nur stetig ändern.

Satz 6. *P sei Stützpunkt eines stetig-sternartigen Regularitätsbereiches $\mathfrak{B}$. Dann gibt es zu jeder Umgebung $\mathfrak{U}$ von P eine in $\mathfrak{B}$ reguläre und beschränkte Funktion, die in gemeinsamen Punkten von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ Werte annimmt, die sie in den übrigen Punkten von $\mathfrak{B}$ nicht aufweist.*

Dies ist gezeigt, wenn wir unter den Voraussetzungen von Satz 6 bewiesen haben: Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ eine in $\mathfrak{B}$ reguläre und beschränkte Funktion f_ε, so daß $|f_\varepsilon| \leqq \varepsilon$ für alle außerhalb $\mathfrak{K}(P, \varepsilon)$ liegenden Punkte von $\mathfrak{B}$, daß aber andererseits für eine Punktefolge P_i aus $\mathfrak{B}$

$$\lim_{i \to \infty} f_\varepsilon(P_i) = 1.$$

Zum Beweise sei der Bezugspunkt O der Koordinatenursprung. Wegen der Stetigkeit des Randes von $\mathfrak{B}$ in bezug auf O gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\eta(\varepsilon) > 0$, so daß die von O ausgehenden und $\mathfrak{K}(P, \eta)$ schneidenden Halbgeraden den Rand von $\mathfrak{B}$ innerhalb $\mathfrak{K}(P, \varepsilon)$ treffen. Nun gibt es aber zu jedem $\eta > 0$, also insbesondere zu $\eta(\varepsilon)$, nach Satz 1 einen inneren Bereich $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{B}$, der Regularitätsbereich ist und dessen Punkte, soweit sie außerhalb $\mathfrak{K}(P, \eta)$ liegen, mit den Punkten von $\mathfrak{B} - \mathfrak{K}(P, \eta)$ zusammenfallen. Durch eine Transformation

$$\begin{aligned} z_1' &= z_1(1 + \varrho_0), \\ z_2' &= z_2(1 + \varrho_0), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ z_n' &= z_n(1 + \varrho_0) \end{aligned}$$

mit geeignet gewähltem $\varrho_0 > 0$ geht $\mathfrak{G}$ in einen Bereich $\mathfrak{G}^*$ über mit folgender Eigenschaft:

1. $\mathfrak{B}$ ist echter Teilbereich von $\mathfrak{G}^*$.
2. Die Randpunkte von $\mathfrak{B}$, die außerhalb $\mathfrak{K}(P, \varepsilon)$ liegen, sind innere Punkte von $\mathfrak{G}^*$.
3. Es gibt mindestens einen Randpunkt von $\mathfrak{B}$ innerhalb $\mathfrak{K}(P, \varepsilon)$, der zugleich Randpunkt von $\mathfrak{G}^*$ ist.

$\mathfrak{G}^*$ ist Regularitätsbereich; also ist er regulär-konvex. Zum Bereiche $\mathfrak{G}$ gibt es folglich einen Bereich $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G} < \mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}^*$, so daß zu jedem Punkte Q in $\mathfrak{G}^*$ außerhalb $\mathfrak{G}_0$ eine in $\mathfrak{G}^*$ reguläre Funktion f_0 existiert, so daß

$$(1) \qquad |f_0(Q)| > \operatorname{Max} |f_0(\mathfrak{G}_0)| \geqq \operatorname{Max} |f_0(\mathfrak{B} - \mathfrak{K}(P, \varepsilon))|.$$

Als einen solchen Punkt Q können wir wegen der Eigenschaft 3 von $\mathfrak{G}^*$ insbesondere gewisse innerhalb $\mathfrak{B}$ und zugleich innerhalb $\mathfrak{K}(P, \varepsilon)$ liegende Punkte wählen.

Wir haben noch zu zeigen, daß wir als f_0 eine in $\mathfrak{B}$ beschränkte Funktion wählen können. Dazu beachten wir: Jede in einem stetig-sternartigen Bereich $\mathfrak{S}$ mit dem Bezugspunkt O reguläre Funktion läßt sich durch in $\mathfrak{S}$ reguläre und beschränkte Funktionen approximieren[5]).

In der Tat, mit $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ist auch $f(\varkappa z_1, \varkappa z_2, \ldots, \varkappa z_n)$, $0 < \varkappa < 1$, in $\mathfrak{S}$ regulär. $f(\varkappa z_1, \varkappa z_2, \ldots, \varkappa z_n)$ ist auch auf dem Rande von $\mathfrak{S}$ überall regulär, also im abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{S}$ beschränkt. Schließlich ist für $\lim\limits_{\nu \to \infty} \varkappa_\nu = 1$

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \lim_{\nu \to \infty} f(\varkappa_\nu z_1, \varkappa_\nu z_2, \ldots, \varkappa_\nu z_n).$$

Diese Konvergenz gilt gleichmäßig „im Innern" von $\mathfrak{B}$. Folglich ist für $\nu > \nu_0$ die Ungleichung (1) auch für die Funktionen $f_0(\varkappa_\nu z_1, \varkappa_\nu z_2, \ldots, \varkappa_\nu z_n)$ gültig.

In $\mathfrak{K}(P, \varepsilon)$ gibt es also einen Punkt Q und dazu eine in $\mathfrak{B}$ reguläre und beschränkte Funktion, so daß

$$|f(Q)| > \operatorname{Max} |f(\mathfrak{G}_0)|.$$

$\mathfrak{G}_0$ umfaßt alle Punkte von $\mathfrak{B}$, die außerhalb $\mathfrak{K}(P, \varepsilon)$ liegen. Normieren wir jetzt f so, daß $\operatorname{Max}|f(\mathfrak{B})| = 1$ ist, so folgt unmittelbar die Behauptung. Indem wir von f zu f^p mit genügend großem ganzen p übergehen, können wir ferner noch erreichen, daß $|f(\mathfrak{G}_0)| \leqq \varepsilon$.

Eine unmittelbare Folge der soeben bewiesenen Aussage ist:

Ist P Stützpunkt eines stetig-sternartigen Regularitätsbereiches $\mathfrak{B}$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine im abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion f_ε, so daß die Hyperfläche $|f_\varepsilon| = 1$ innerhalb $\mathfrak{K}(P, \varepsilon)$ und nur dort in $\mathfrak{B}$ eindringt.

Benutzen wir die Aussage von Bertil Almer[6]), daß sich jede in einem Sternbereich reguläre Funktion dort in eine gleichmäßig konvergente Polynomreihe entwickeln läßt, so können wir in der voranstehenden Aussage f_ε durch ein Polynom p_ε ersetzen. Daraus ergibt sich weiter:

Satz 6a. *Ist P Stützpunkt eines stetig-sternartigen Regularitätsbereiches $\mathfrak{B}$, so gibt es innerhalb jeder noch so kleinen Umgebung von P einen Randpunkt, durch den eine Polynomhyperfläche geht, welche nicht*

[5]) Hammerstein, A., Über Approximation von Funkt. zweier kompl. Ver. durch Polynome, S.-B. preuß. Akad. Wiss. V, 1933.

[6]) Almer, B., Sur quelques problèmes de la théorie des fonct. anal. de deux var. compl., Ark. Mat. Astron. Fys. 17 (1922).

in $\mathfrak{B}$ eindringt und außerhalb der betrachteten Umgebung auch nicht durch Randpunkte von $\mathfrak{B}$ verläuft.

Zum Beweise wählen wir ein $\varepsilon > 0$, so daß $\mathfrak{K}(P, \varepsilon)$ noch ganz in der vorgegebenen Umgebung liegt. Dann gibt es ein $\eta > 0$, so daß alle vom Bezugspunkt O ausgehenden Halbgeraden, die $\mathfrak{K}(P, \eta)$ treffen, den Rand von $\mathfrak{B}$ innerhalb $\mathfrak{K}(P, \varepsilon)$ schneiden. Das Polynom $|p_\eta| = 1$ dringe nur innerhalb $\mathfrak{K}(P, \eta)$ in $\mathfrak{B}$ ein. Nunmehr lassen wir durch eine Transformation $z_1' = \varrho z_1$, $z_2' = \varrho z_2, \ldots, z_n' = \varrho z_n$ mit geeignetem $\varrho > 1$ die Polynomhyperfläche $|p_\eta(z_1, z_2, \ldots, z_n)| = 1$ sich so ausdehnen, daß

$$\left| p_\eta\left(\frac{z_1}{\varrho}, \frac{z_2}{\varrho}, \ldots, \frac{z_n}{\varrho}\right)\right| = 1$$

den Bereich $\mathfrak{B}$ nur noch berührt. Das geschieht dann notwendig innerhalb $\mathfrak{K}(P, \varepsilon)$, w. z. b. w.

Anmerkung. Aus Satz 6a folgt, daß, wenn P einen Stützpunkt eines stetig-sternartigen Regularitätsbereiches $\mathfrak{B}$ bedeutet, P_ν eine gegen P, und Q_ν eine gegen $Q \neq P$ konvergierende Punktefolge aus $\mathfrak{B}$ ist, die Carathéodorysche Distanz $D_{\mathfrak{B}}(P_\nu, Q_\nu)$ gegen Unendlich konvergiert.

Die Verbindung mit den Untersuchungen von E. E. Levi bekommen wir nun sehr leicht.

Satz 7. *Der Rand eines stetig-sternartigen Regularitätsbereiches $\mathfrak{B}$ bestehe in einer Umgebung eines Randpunktes P aus lauter Stützpunkten und sei dort zweimal stetig differentiierbar. Dann ist dort $L(\varphi) \not\equiv 0$ (d. h. der Rand besteht dort nicht aus einem analytischen Hyperflächenstück).*

Wäre $L(\varphi) \equiv 0$, so würde in einer Umgebung $\mathfrak{U}$ von P der Rand eine Darstellung $f(w, z; t) = 0$ ($f(w, z; t)$ analytisch in w und z und stetig in t für w, z aus $\mathfrak{U}$) gestatten[7]. Auf dem Rande von $\mathfrak{B}$ innerhalb $\mathfrak{U}$ gäbe es einen Punkt $Q(w_0, z_0)$, in dem die beiden ersten Ableitungen von $f(w, z; t)$ nicht gleichzeitig verschwinden. In bezug auf Q wenden wir jetzt Satz 6a an. Durch den Randpunkt $Q_1(w_1, z_1)$, in dem auch die beiden ersten Ableitungen nicht gleichzeitig verschwinden, läuft eine in $\mathfrak{B}$ nicht eindringende Polynomhyperfläche $|p(w, z)| = 1$. Die Gleichung $f(w, z; t_1) = 0$ mit $f(w_1, z_1; t_1) = 0$ läßt sich in Q_1 nach w oder z auflösen. $|p(w[z], z)|$ bzw. $|p(w, z[w])|$ hätte in Q_1 den Extremwert Eins, womit wir einen Widerspruch gegen unsere Annahme $L(\varphi) \equiv 0$ aufgewiesen haben.

Eine Umkehrung dieses Satzes — unter allerdings sehr einengenden Voraussetzungen — ist:

---

[7]) Siehe: B.-Th., Bericht, Kap. II, § 3.

$\mathfrak{B}$ sei ein Regularitätsbereich mit zweimal stetig differentiierbarem Rande; in $\mathfrak{B}$ gelte der Cousinsche Satz[7a]. *Dann ist jeder Randpunkt P, in dem $L(\varphi) \neq 0$ ist, ein Stützpunkt von $\mathfrak{B}$.*

Unter den Voraussetzungen über den Rand von $\mathfrak{B}$ gibt es zu jedem solchen Randpunkt P und jedem $\varepsilon > 0$ ein quadratisches Polynom $q(w, z)$, welches für gewisse Punkte innerhalb $\mathfrak{K}\left(P, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ im Innern von $\mathfrak{B}$ verschwindet, dagegen *nicht* für innere Punkte verschwindet, die um mehr als $\frac{\varepsilon}{2}$ und weniger als ε von P entfernt sind. Gilt nun für $\mathfrak{B}$ der Cousinsche Satz, so gibt es eine in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion, die nur in jedem inneren Punkte von $\mathfrak{B}$ verschwindet, in dem erstens $q(w, z) = 0$ und der zweitens um weniger als $\frac{\varepsilon}{2}$ von P entfernt ist[7b].

§ 3.

Analytische Randmannigfaltigkeiten.

Im letzten Abschnitte haben wir aus den Eigenschaften der Stützpunkte unter anderem schließen können, daß 3-dimensionale analytische Randmannigfaltigkeiten bei stetig-sternartigen Regularitätsbereichen ausschließlich aus Flachpunkten bestehen müssen. Wir zeigen mit dem folgenden Satze, daß dies für alle Regularitätsbereiche zutrifft.

Satz 8. *In einer Umgebung des Randpunktes P eines Regularitätsbereiches $\mathfrak{B}$ bestehe der Rand aus einem analytischen Hyperflächenstück $\mathfrak{f}$, das in jedem Punkte eine stetige Hypertangente (mit analytischer Haupttangente) aufweist. Dann sind die Punkte von $\mathfrak{f}$ alle Flachpunkte*[8].

P sei der Koordinatenursprung, und die Hypertangente in P sei $x_1 = 0$. $\mathfrak{f}$ weist dann in einer Umgebung von P die Darstellungen

(2a) $$x_1 = \varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$$

und

2b) $$z_1 = g(z_2, z_3, \ldots, z_n; t) \quad (g \text{ analytisch in } z_i \text{ und stetig in } t)$$

auf; $x_1 < \varphi$ weise ins Innere von $\mathfrak{B}$.

[7a]) Siehe: B.-Th., Bericht. Kap. V, § 4, Satz 32.

[7b]) Vgl. P. Thullen, Bemerkung über die Levische Randbedingung, Math. Annalen **110** (1934).

[8]) Ist das analytische Hyperflächenstück $\mathfrak{f}$: $f(z_1, z_2, \ldots, z_n; t) = 0$ in dem reellen Parameter t reell analytisch, so läßt sich der Beweis wesentlich kürzer führen.

Angenommen, P wäre Stützpunkt von $\mathfrak{B}$. Dann existiert nach Satz 1 ein Regularitätsbereich $\mathfrak{B}_\varepsilon < \mathfrak{B}$, so daß der Bereich $\mathfrak{B} - \mathfrak{K}\left(P, \frac{\varepsilon}{4}\right)$ Stützbereich von $\mathfrak{B}_\varepsilon$ ist. Die Schnittpunkte der Geraden

(3) $\quad x_2 = \alpha_2,\ x_3 = \alpha_3,\ \ldots,\ x_n = \alpha_n,\ y_1 = \beta_1,\ y_2 = \beta_2,\ \ldots,\ y_n = \beta_n$ (laufendes x_1),

die innerhalb $\mathfrak{K}(P, \varepsilon)$ die Hyperfläche $\mathfrak{f}$ treffen, seien symbolisch mit R bezeichnet. Jede dieser Geraden hat offenbar höchstens einen Schnittpunkt mit $\mathfrak{f}$, falls nur $\varepsilon > 0$ genügend klein ist. Weiter betrachten wir innerhalb $\mathfrak{K}(P, \varepsilon)$ die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Rande von $\mathfrak{B}_\varepsilon$. Schneidet eine der Geraden den Rand von $\mathfrak{B}_\varepsilon$ dort mehrmals, so wählen wir für das folgende nur den Schnittpunkt aus, dessen auf der Geraden gemessener Abstand von R am größten ist. Die auf diese Weise festgelegten Punkte seien durch S bezeichnet. Auf den außerhalb und auf dem Rande von $\mathfrak{K}\left(P, \frac{\varepsilon}{4}\right)$ liegenden (aber noch durch $\mathfrak{K}(P, \varepsilon)$ verlaufenden) Geraden (3) ist die Abstandsfunktion

$$\Omega(\alpha, \beta) = \text{Abstand } [R, S]$$

gleich Null. Sicher gibt es aber eine durch einen inneren Punkt von $\mathfrak{K}\left(P, \frac{\varepsilon}{4}\right)$ verlaufende Gerade (3), für die $\Omega(\alpha, \beta) > 0$. Es sei

$$d_0 = \operatorname{Max} \Omega(\alpha, \beta).$$

Da sich die Berandungen von $\mathfrak{B}_\varepsilon$ und $\mathfrak{B}$ nur innerhalb $\mathfrak{K}\left(P, \frac{\varepsilon}{4}\right)$ unterscheiden, so folgt $d_0 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Nun zeigen wir, daß ein analytisches Flächen*stück*

(4) $\quad z_1 = g(z_2, z_3, \ldots, z_n; t_0) - d_0, \qquad |z_i| < \varepsilon$ für $i = 1, 2, \ldots, n$,

welches innerhalb $\mathfrak{K}\left(P, \frac{\varepsilon}{4}\right)$ einen Randpunkt Q mit $\mathfrak{B}_\varepsilon$ gemein hat, außerhalb $\mathfrak{K}\left(P, \frac{\varepsilon}{4}\right)$ nur durch das Innere von $\mathfrak{B}_\varepsilon$ läuft.

In der Tat! Es sei $d_0 = \Omega(\alpha^{(0)}, \beta^{(0)})$. Dann wählen wir t_0 in (4) so, daß $z_1 = g(z_2, z_3, \ldots, z_n; t_0)$ die Gerade $x_2 = \alpha_2^{(0)}, x_3 = \alpha_3^{(0)}, \ldots, x_n = \alpha_n^{(0)}$, $y_1 = \beta_1^{(0)}, y_2 = \beta_2^{(0)}, \ldots, y_n = \beta_n^{(0)}$ schneidet. (4) hat dann einen Randpunkt Q mit $\mathfrak{B}_\varepsilon$ gemein. Ferner liegt (4), falls ε nur genügend klein gewählt ist, aber auch ganz in $\mathfrak{B}$, also außerhalb $\mathfrak{K}\left(P, \frac{\varepsilon}{4}\right)$ auch ganz in $\mathfrak{B}_\varepsilon$. Da die Funktion $\Omega(\alpha, \beta)$ in bezug auf den von $\mathfrak{f}$ entferntesten Schnittpunkt des Randes von $\mathfrak{B}_\varepsilon$ mit den Geraden (3) gebildet ist, kann (4) nicht ins Äußere von $\mathfrak{B}_\varepsilon$ dringen.

Die analytische Funktion $h(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ habe $\mathfrak{B}_\varepsilon$ als Existenzbereich. Dann hat h auf (4) unter anderem die singuläre Stelle Q, während

die Punkte auf (4), die der Rand von $\mathfrak{K}(P, \frac{3}{4}\varepsilon)$ herausschneidet, alles reguläre Stellen von h sind. Um nun den Kontinuitätssatz anwenden zu können, führen wir folgende Transformation aus:

$$z_i^* = z_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$
$$z_1^* = z_1 - g(z_2, z_3, \ldots, z_n; t_0).$$

Diese Transformation ist eineindeutig und analytisch innerhalb $\mathfrak{K}(P, \varepsilon)$. (4) geht über in

$$(5) \qquad z_1^* = -d_0, \quad |z_i^*| < \varepsilon \text{ für } i = 2, 3, \ldots, n.$$

Der Punkt Q^* auf (5), das Bild von Q, ist ein singulärer Punkt für die aus h hervorgegangene Funktion $h^*(z_1^*, z_2^*, \ldots, z_n^*)$, während um Q^* innerhalb des ε-Kreises auf (5) ein ringförmiges Gebiet liegt, in dem h^* regulär ist. Aus dem Kontinuitätssatz folgt nun, daß h^* auf den Ebenen

$$z_1^* = -d_0 + \eta, \qquad |\eta| < \delta,$$

im Innern des Bildes von $\mathfrak{K}(P, \frac{3}{4}\varepsilon)$ singuläre Stellen aufweist. Die Funktion h wiese also auf allen analytischen Flächen

$$z_1 = g(z_2, z_3, \ldots, z_n; t_0) - d_0 + \eta, \qquad |\eta| < \delta,$$

innerhalb $\mathfrak{K}(P, \frac{3}{4}\varepsilon)$ singuläre Stellen auf. Das würde aber für reelles $\eta < 0$ der Definition von d_0 widersprechen. Damit ist unser Satz bewiesen.

Das Entsprechende für isoliert liegende $(2n-2)$-dimensionale Randflächen läßt sich ebenso beweisen. Wir bekommen so die Aussage:

Satz 9. *P sei Randpunkt eines Regularitätsbereiches $\mathfrak{B}$. Es gebe eine volle $2n$-dimensionale Umgebung von P, in welcher Randpunkte von $\mathfrak{B}$ höchstens auf einem gewissen analytischen Flächenstück liegen, von dem P gewöhnlicher Punkt ist. Dann ist P ein Flachpunkt von $\mathfrak{B}$.*

Wir beachten dabei, daß auf Grund der Untersuchungen von Hartogs[9]) nicht-analytische $(2n-2)$-dimensionale Flächenstücke als isolierte Randmannigfaltigkeiten nicht auftreten können.

§ 4.

Die Randpunkte der Kreiskörper und Hartogsschen Körper.

Die Aufstellung der Kriterien für die Stütz- und Flachpunkte bei den Kreiskörpern[9a]) und Hartogsschen Bereichen gelingt uns auf Grund

[9]) Vgl. B.-Th., Bericht, Kap. IV, § 2.

[9a]) Die Einteilung der Randpunkte eines Kreiskörpers und Regularitätsbereiches $\mathfrak{B}$ in Stütz- und Flachpunkte geschieht natürlich (wie im allgemeinen Falle) in bezug auf *sämtliche* Bereiche $\mathfrak{D}$, die $\mathfrak{B}$ zur Hülle haben. Würde man sich bei den Bereichen $\mathfrak{D}$ nur auf Kreiskörper beschränken, so wären die folgenden Aussagen beinahe selbstverständlich. — Entsprechendes gilt für die Hartogsschen Körper.

folgender älterer Sätze, für die bisher Analoga in bezug auf andere Klassen von Körpern fehlen:

Ein vollkommener[10]) *Kreiskörper* $\mathfrak{B}$: $|z| < R(s)$, $s = \frac{w}{z}$, *bei dem* $R(s)$ *zweimal stetig differentiierbar ist und* $\lim\limits_{s \to \infty} |s| \cdot R(s)$ *existiert, ist, falls* $\Delta \log R(s) \leqq 0$ *für alle* s, *ein Regularitätsbereich.*

Ein schlichter, einfach zusammenhängender und vollkommener[11]) *Hartogsscher Körper* $\mathfrak{H}$: $|z| < R(w)$, *bei dem* $R(w)$ *zweimal stetig differentiierbar und* $\Delta \log R(w) \leqq 0$ *für alle* w *der Projektion* $b^{(w)}$ *von* $\mathfrak{H}$ *ist, ist ein Regularitätsbereich.*

Ist $\Delta \log R(s) \equiv 0$ in einer Umgebung des Randpunktes P eines vollkommenen Kreiskörpers, so ist nach dem Ergebnis des letzten Abschnittes P notwendig ein Flachpunkt. Hier beweisen wir nun, daß, wenn $\Delta \log R(s_0) \neq 0$ ist, der Randpunkt P (mit $s = s_0$) ein Stützpunkt ist. Da Häufungspunkte von Stützpunkten wieder Stützpunkte sind, so ist damit auch der Fall $\Delta \log R(s_0) = 0$ völlig entschieden.

Satz 10. *Der Bereich* $\mathfrak{B}$ *sei zugleich Regularitätsbereich und vollkommener Kreiskörper (vollkommener Hartogsscher Körper) mit zweimal stetig differentiierbarem Rande* $|z| = R(s)$ (*bzw.* $|z| = R(w)$). *Der Randpunkt* (w_0, z_0) *ist dann und nur dann Flachpunkt, wenn in einer Umgebung von* $s_0 = \frac{w_0}{z_0}$ *in der* s*-Ebene* (*bzw. von* w_0 *in der* w*-Ebene*) $\Delta \log R(s) \equiv 0$ (*bzw.* $\Delta \log R(w) \equiv 0$) *ist.*

Folgerung. *Ist* $\mathfrak{S}$ *ein zum Rande eines der eben betrachteten Körper gehöriges Hyperflächenstück, das nur Flachpunkte aufweist, so ist* $\mathfrak{S}$ *ein analytisches Hyperflächenstück.*

Diese Folgerung ist für die hier behandelten Körper die Umkehrung des Satzes 8.

Den Beweis von Satz 10 führen wir nur für Kreiskörper. Doch verläuft er für Hartogssche Körper genau so. Da unter unseren Voraussetzungen stets $\Delta \log R(s) \leqq 0$, so ist Satz 10 bewiesen, wenn wir gezeigt haben: Ist in einem Kreiskörper $\mathfrak{B}$, für den die Voraussetzungen dieses Satzes zutreffen, $\Delta \log R(s_0) < 0$, so ist jeder der Randpunkte $(s_0 \cdot R(s_0) e^{i\varphi}, R(s_0) e^{i\varphi})$ mit beliebigem reellen φ Stützpunkt von $\mathfrak{B}$. Dieses wiederum ist gesichert, wenn es zu jedem der Punkte $P_\varphi(s_0 \cdot R(s_0) e^{i\varphi}, R(s_0) e^{i\varphi})$

---

[10]) Ein vollkommener Kreiskörper ist ein (eigentlicher) Kreiskörper, bei dem jede analytische Ebene durch den Mittelpunkt (hier als Nullpunkt gewählt) aus dem Körper eine Kreisscheibe herausschneidet.

[11]) Ein vollkommener Hartogsscher Körper $|z| < R(w)$ ist ein (eigentlicher) Hartogsscher Körper, bei dem jede überhaupt schneidende Ebene $w = c$ eine Kreisscheibe um $z = 0$ herausschneidet.

und jedem noch so kleinen positiven ε eine in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion $f(w, z)$ gibt, für die $f(w, z) = 1$ für einen Punkt aus $\mathfrak{K}(P_\varphi, \varepsilon)$ in $\mathfrak{B}$, dagegen $f(w, z) \neq 1$ in $\mathfrak{B} - \mathfrak{K}(P_\varphi, \varepsilon)$ (vgl. Satz 5). Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $s_0 = 0$ und $R(s_0) = R(0) = |z_0| = 1$ ist.

I. Zuerst zeigen wir, daß, wenn $\Delta \log R(0) < 0$ ist, es zu jedem noch so kleinen $\eta > 0$ einen vollkommenen Kreiskörper $\mathfrak{B}_\eta$, $\mathfrak{B}_\eta < \mathfrak{B}$, gibt, der Regularitätsbereich ist und auf denjenigen Ebenen $s = \frac{w}{z} = c$ von $\mathfrak{B}$ abweicht, für die $|s| < \frac{\eta}{2}$.

Für die Funktion $p(\sigma, \tau) = \log R(s)$, $s = \sigma + i\tau$, ist wegen der Stetigkeit der zweiten Ableitungen

$$\Delta p(\sigma, \tau) < -\zeta; \qquad \zeta > 0 \text{ für } |s| < \varrho.$$

Wir wählen nun eine reelle Zahl r_0 so, daß

1. $0 < r_0 < \frac{\eta}{2} < \varrho$,

2. $9r(r_0 - r)^3 + 21r^2(r_0 - r)^2 + 6r^3(r_0 - r) < \zeta$ für $0 \leqq r \leqq r_0$.

Das ist immer möglich. Sodann setzen wir

$$p^*(\sigma, \tau) = \begin{cases} p(\sigma, \tau) & \text{für } |s| \geqq r_0, \\ p(\sigma, \tau) - r^3(r_0 - r)^3 & \text{für } |s| < r_0, \quad r = |s|. \end{cases}$$

$p^*(\sigma, \tau)$ ist zweimal stetig differentiierbar, und wegen Eigenschaft 2 von r_0 ist für $|s| < r_0$

$$\Delta p^*(\sigma, \tau) = \Delta p(\sigma, \tau) - 9r(r_0 - r)^3 + 21r^2(r_0 - r)^2 - 6r^3(r_0 - r) < 0.$$

Schließlich gilt auch $p^*(\sigma, \tau) < p(\sigma, \tau)$ für $|s| < r_0$. Als $\mathfrak{B}_\eta$ können wir jetzt wählen

$$\mathfrak{B}_\eta\colon \ |z| < R(s) \cdot e^{p^*(\sigma, \tau) - p(\sigma, \tau)}.$$

Es ist dabei

$$\operatorname{Min} \{e^{p^* - p}\} = m < 1.$$

Auf Grund des zu Beginn dieses Abschnittes aufgeführten Satzes ist $\mathfrak{B}_\eta$ ein Regularitätsbereich. Dementsprechend ist auch der Kreiskörper

$$\mathfrak{B}_\eta^*\colon \ |z| < \frac{1}{m} R(s) e^{p^* - p}$$

Regularitätsbereich. Für $|s| \geqq \frac{\eta}{2}$ sind die Randpunkte von $\mathfrak{B}$ innere Punkte von $\mathfrak{B}_\eta^*$, doch gibt es mindestens ein $s_1^{(\eta)}$, $|s_1^{(\eta)}| < \frac{\eta}{2}$, so daß auf der Ebene $\frac{w}{z} = s_1^{(\eta)}$ die Randpunkte von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_\eta^*$ zusammenfallen.

II. Es gibt eine Polynomfläche $f(w, z) = 1$, die die Ebenen $s = \frac{w}{z} = c$ für $|s| \geqq \frac{\eta}{2}$ nur außerhalb $\mathfrak{B}$ schneidet, jedoch auf mindestens einer Ebene $s_1 = \frac{w_1}{z_1}$, $|s_1| < \frac{\eta}{2}$, $\mathfrak{B}$ berührt.

In der Tat! $\mathfrak{B}_\eta$ ist konvex in bezug auf homogene Polynome in w und z[12]). Es gibt also ein homogenes Polynom $P_\eta(w, z)$, so daß

$$|P_\eta(w, z)| < 1 \quad \text{für} \quad |z| \leqq R(s)e^{p^*-p},$$

aber

$$P_\eta(w, z) = 1 \text{ für einen inneren Punkt } Q_\eta \text{ aus } \mathfrak{B}.$$

Daraus folgt für gewisses $\varkappa$, $0 < \varkappa < 1$,

$$\begin{aligned} &|P_\eta(\varkappa w, \varkappa z)| < 1 \quad \text{in } \mathfrak{B}, \\ (6) \qquad &|P_\eta(\varkappa w, \varkappa z)| < 1 \quad \text{in } |z| \leqq \frac{1}{\sqrt{m}} R(s) e^{p^*-p}, \\ &P_\eta(\varkappa w_1, \varkappa z_1) = 1 \text{ für mindestens einen Punkt } (w_1, z_1) \end{aligned}$$

auf dem Rande von $\mathfrak{B}$. In bezug auf den herausgegriffenen Punkt (w_1, z_1) setzen wir $a = Ampl\ z_1$. Für $|s| \geqq \frac{\eta}{2}$ hat die Fläche

$$P_\eta(\varkappa w, \varkappa z) = 1$$

einen Mindestabstand $0 < d(\eta) < \eta^3$ von dem Rande von $\mathfrak{B}$.

III. Wir konstruieren nunmehr eine Polynomfläche, die nur innerhalb $\mathfrak{K}(P_0, \varepsilon)$ in $\mathfrak{B}$ eindringt; $P_0 = (0, e^{i\alpha})$ ist ein Randpunkt von $\mathfrak{B}$. Wir setzen

$$\mu = \frac{d(\eta)}{\sqrt{|w_1|^2 + |z_1|^2}},$$

$(w_1\ z_1)$ der in (6) definierte Punkt, und betrachten die Fläche

$$\mathfrak{f}_1\colon\ P_\eta(\varkappa[w - \mu w_1], \varkappa[z - \mu z_1]) = 1;$$

$\mathfrak{f}_1$ weist innere Punkte von $\mathfrak{B}$ auf. Ein solcher Punkt ist

$$Q_0(w_1[1-\mu], z_1[1-\mu]).$$

Weiter ordnen wir jedem in $\mathfrak{B}$ liegenden Punkte $Q(\tilde{w}, \tilde{z})$ von $\mathfrak{f}_1$ eine reelle Zahl $\Omega(Q)$ zu, definiert durch

$$\Omega(Q) = \frac{|\tilde{z}|}{R\left(\frac{\tilde{w}}{\tilde{z}}\right)}.$$

Nur für solche Punkte auf $\mathfrak{f}_1$, *die innerhalb* $\mathfrak{K}(P_0, \lambda_9\sqrt{\eta})$ *liegen, kann* $\Omega(Q)$ *kleiner sein als*

$$(7) \qquad 1 - \mu + \lambda_1 \mu \eta.$$

[12]) Siehe B.-Th., Bericht, Kap. VI, § 3.

λ_1, wie überhaupt die jetzt auftretenden λ_i $(i = 1, 2, \ldots, 8, 9)$, bedeuten positive, in bezug auf ε und μ (also auch η) konstante Zahlen. Es gibt sicher Punkte auf $\mathfrak{f}_1$, in denen $\Omega(Q)$ kleiner als der Wert in (7) ist. So ist z. B.

(8) $$\Omega(Q_0) = 1 - \mu.$$

Zum Beweise der obigen Behauptung beachten wir zuerst, daß, wenn $Q(\tilde{w}_1, \tilde{z}_1)$ ein in $\mathfrak{B}$ liegender Punkt von $\mathfrak{f}_1$ ist, der Punkt mit den Koordinaten

$$w_2 = \tilde{w}_1 + \mu w_1,$$
$$z_2 = \tilde{z}_1 + \mu z_1$$

nicht mehr in $\mathfrak{B}$ liegt. Ferner ist $\left|\frac{w_2}{z_2}\right| < \frac{\eta}{2}$. $\Omega(Q)$ schätzen wir jetzt folgendermaßen ab:

$$\Omega(Q) = \frac{|z_2|}{R\left(\frac{\tilde{w}_1}{\tilde{z}_1}\right)} \sqrt{1 - 2\mu\left|\frac{z_1}{z_2}\right| \cos\varphi + \mu^2\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2},$$

wobei $\varphi = Ampl\ z_2 - a$ sicher zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt. Wegen $|z_2| \geqq R\left(\frac{w_2}{z_2}\right)$ und $\frac{1}{2} < \left|\frac{z_1}{z_2}\right| < 1 + \lambda_2\mu\eta$ gilt

$$\Omega(Q) > \frac{R\left(\frac{w_2}{z_2}\right)}{R\left(\frac{\tilde{w}_1}{\tilde{z}_1}\right)} \sqrt{1 - 2\mu\cos\varphi + \frac{1}{4}\mu^2 - 2\lambda_2\mu\eta},$$

$$\Omega(Q) > \frac{R\left(\frac{w_2}{z_2}\right)}{R\left(\frac{w_2}{z_2}\right) + \lambda_3\mu\eta}\left(1 - \mu\cos\varphi - \frac{\mu^2}{2} - \lambda_2\mu\eta\right),$$

$$\Omega(Q) > \left(1 - \frac{\lambda_3\mu\eta}{R\left(\frac{w_2}{z_2}\right)}\right)\left(1 - \mu\cos\varphi - \frac{\mu^2}{2} - \lambda_2\mu\eta\right),$$

$$\Omega(Q) > 1 - \mu - \frac{\lambda_3\mu\eta}{R\left(\frac{w_2}{z_2}\right)} + \mu\lambda_4\varphi^2 - \lambda_5\mu^2\eta,$$

$$\Omega(Q) > 1 - \mu + \lambda_1\mu\eta \qquad \text{falls } |\varphi| \geqq \lambda_6\sqrt{\eta}.$$

Also ist

$$\Omega(Q) < 1 - \mu + \lambda_1\mu\eta = A$$

höchstens für solche $Q(\tilde{w}_1, \tilde{z}_1)$, für die $\left(\text{wegen } \left|\frac{w_2}{z_2}\right| < \frac{\eta}{2} \text{ und } |\varphi| < \lambda_6\sqrt{\eta}\right)$

$$\left|\frac{\tilde{w}_1}{\tilde{z}_1}\right| < \eta \quad \text{und} \quad |Ampl\ \tilde{z}_1 - a| \leqq |\varphi| + \mu\lambda_7 < \lambda_8\sqrt{\eta}.$$

Diese Punkte aber liegen alle in $\mathfrak{R}(P_0, \lambda_9\sqrt{\eta})$. Indem wir nun aus $\mathfrak{f}_1$ die Polynomfläche $\mathfrak{f}_2$ durch die Abbildung

$$w' = \frac{1}{A}w, \quad z' = \frac{1}{A}z$$

herstellen, werden nur noch solche Punkte aus $\mathfrak{f}_2$ in $\mathfrak{B}$ liegen, für deren entsprechende Punkte Q von $\mathfrak{f}_1$

$$\Omega(Q) < A$$

ist. Dies trifft wegen (8) für gewisse Punkte noch zu, doch liegen sie wie auch deren Bilder auf $\mathfrak{f}_2$ alle in $\mathfrak{K}(P_0, \lambda_0 \sqrt{\eta})$. Setzen wir bei gegebenem ε

$$\eta \leq \frac{\varepsilon^2}{\lambda_0^2},$$

so folgt jetzt die Behauptung, die diesem Beweisteile voransteht.

IV. Durch Drehung von $\mathfrak{f}_2$ um den Nullpunkt bekommen wir zu jedem Randpunkt P von $\mathfrak{B}$ auf $s_0 = 0$ eine Polynomfläche, die in $\mathfrak{K}(P, \varepsilon)$ und nur dort in $\mathfrak{B}$ eindringt. Diese Punkte P sind also alle Stützpunkte von $\mathfrak{B}$. Vorausgesetzt war $\Delta \log R(s_0) < 0$. Flachpunkte können also nur dort auf dem Rande von $\mathfrak{B}$ liegen, wo $\Delta \log R(s) = 0$, und auch nur dann, wenn sie keine Häufungsstellen von solchen Randpunkten sind, für die $\Delta \log R(s) < 0$. Das war zu beweisen.

Anmerkung. Nennen wir zwei Randpunkte P, Q eines Regularitätsbereiches $\mathfrak{B}$ *endlich-fern* voneinander, falls es zwei Folgen P_ν und Q_ν aus $\mathfrak{B}$ gibt mit $\lim_{\nu \to \infty} P_\nu = P$, $\lim_{\nu \to \infty} Q_\nu = Q$ und mit beschränkter Carathéodoryscher Distanz

$$D_{\mathfrak{B}}(P_\nu, Q_\nu) < M,$$

anderenfalls *unendlich-fern*, so können wir die Schlußbemerkung von Abschnitt 2 auch so fassen: Bei einem stetig-sternartigen Regularitätsbereich ist jeder Stützpunkt von jedem anderen Randpunkt unendlich fern. Auf Grund von Satz 10 können wir weiter sagen: Bei einem vollkommenen Kreiskörper (Hartogsschen Körper) mit zweimal stetig differentiierbarem Rande gibt es zu jedem Flachpunkte endlich-ferne Randpunkte.

§ 5.

Kreiskörper als echte Regularitätshüllen.

Ein Regularitätsbereich $\mathfrak{B}$ heißt eine echte Regularitätshülle, falls $\mathfrak{B}$ mindestens einen Teilbereich $\mathfrak{B}_0$ hat, so daß $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$ und $\mathfrak{B}$ mindestens einen Randpunkt besitzt, der nicht zugleich Randpunkt von $\mathfrak{B}_0$ ist. Nun gilt:

Satz 11. *Der Regularitätsbereich und vollkommene Kreiskörper* $\mathfrak{B}$ *mit zweimal stetig differentiierbarem Rande* $|z| = R(s)$ *ist dann und nur dann echte Regularitätshülle, wenn zu mindestens einem endlichen* s_0 *eine Umgebung* $\mathfrak{U}(s_0)$ *existiert, so daß dort* $\Delta \log R(s) \equiv 0$.

Ist $\Delta \log R(s) \equiv 0$ in $\mathfrak{U}(s_0)$, so wird dort der Rand von $\mathfrak{B}$ von Flachpunkten gebildet, so daß $\mathfrak{B}$ echte Regularitätshülle ist.

Wird umgekehrt vorausgesetzt, daß $\mathfrak{B}$ echte Regularitätshülle ist, so liegen auf dem Rande von $\mathfrak{B}$ Flachpunkte, also gilt nach Satz 10 auf einem Stück des Randes $\Delta \log R(s) \equiv 0$.

Satz 12. *Ist der vollkommene Kreiskörper* $\mathfrak{B}$ *mit zweimal stetig differentiierbarem Rande echte Regularitätshülle, so ist er auch Regularitätshülle von einem von ihm verschiedenen Kreiskörper.*

Unter den Voraussetzungen dieses Satzes gibt es ein s_0, so daß in $\mathfrak{U}(s_0)$: $\Delta \log R(s) \equiv 0$. Wir wählen nun r_0 so klein, daß $|s - s_0| < r_0$ in $\mathfrak{U}(s_0)$ liegt. Sodann bilden wir

$$p(\sigma, \tau) = \begin{cases} \log R(s) & \text{für } |s - s_0| \geqq r_0, \\ \log R(s) - r^3 (r_0 - r)^3 & \text{für } |s - s_0| < r_0,\ r = |s - s_0|. \end{cases}$$

Der Kreiskörper

$$\mathfrak{B}_1 \colon |z| = e^{p(\sigma, \tau)}$$

ist kein Regularitätsbereich. Seine Hülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_1)$ ist ein Kreiskörper

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_1) \colon |z| = R^*_{(s)}.$$

Dabei ist $\log R(s)$ eine superharmonische Funktion, also

$$R^*_{(s)} \geqq R(s) \quad \text{für alle } s.$$

$\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_1)$ umfaßt also den Regularitätsbereich $\mathfrak{B}$ und ist deshalb mit ihm identisch.

Anmerkung. Die Hülle eines vollkommenen Kreiskörpers mit zweimal stetig differentiierbarem Rande braucht nicht ihrerseits einen durchwegs zweimal differentiierbaren Rand aufzuweisen.

Die Gesamtheit der eigentlichen Kreiskörper, die einen gegebenen vollkommenen Kreiskörper als Hülle haben, kann man (wieder unter gewissen Differentiierbarkeitsvoraussetzungen) auf Grund der obigen Sätze übersehen.

Satz 13. *Der eigentliche Kreiskörper* $\mathfrak{B}_1$ *hat den vollkommenen Kreiskörper* $\mathfrak{B}_0$: $|z| < R(s)$ *mit zweimal stetig differentiierbarem Rande dann und nur dann zur Hülle, wenn* $\mathfrak{B}_1$ *in* $\mathfrak{B}_0$ *enthalten ist und* $\mathfrak{B}_1$ *alle Randpunkte von* $\mathfrak{B}_0$, *für die* $\Delta \log R(s) < 0$, *gleichfalls aufweist.*

Die Bedingung ist notwendig, weil alle Punkte von $\mathfrak{B}_0$, für die $\Delta \log R(s) < 0$, Stützpunkte von $\mathfrak{B}_0$ sind (Satz 10).

Die Bedingung ist auch hinreichend. $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_1)$ umfaßt sicher den kleinsten $\mathfrak{B}_1$ umfassenden, vollkommenen Kreiskörper. Dieser sei

$$\mathfrak{B}_2 \colon |z| < R^*(s).$$

$\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_2) = \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_1)$ ist wiederum ein vollkommener Kreiskörper $|z| < R^{(0)}_{(s)}$. Die Funktion $\log R^{(0)}_{(s)}$ ist superharmonisch und $\leqq \log R(s)$. Wo $\log R^{(0)}_{(s)} < \log R(s)$, ist $\Delta \log R(s) \equiv 0$. Hieraus folgt

$$R^{(0)}_{(s)} \equiv R(s),$$

w. z. b. w.

(Eingegangen am 12. 11. 1934.)

Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen im Raume von n komplexen Veränderlichen *).

Von

Peter Thullen in Quito (Ecuador).

Ist die Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ der komplexen Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ überall in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ des Raumes R_{2n} mit Ausnahme einer in $\mathfrak{B}$ irreduziblen, $(2n-2)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ regulär oder meromorph und in mindestens einem Punkte auf $\mathfrak{M}$ singulär, so breiten sich auf Grund des Kontinuitätssatzes [1]) die Singularitäten von f notwendig über *ganz* $\mathfrak{M}$ aus. Die Singularitätenflächen niedrigster Dimension sind also $(2n-2)$-dimensional und zudem stets analytisch [2]), wenn nur das jeweils gegebene Flächenstück in je einer Umgebung eines jeden seiner Punkte durch eine komplexe, nach mindestens einer Veränderlichen auflösbare Gleichung dargestellt werden kann (eventuell nach je geeigneten linearen Koordinatentransformationen). *So entsprechen den isolierten Singularitäten einer Funktion $f(z)$ der z-Ebene hier im R_{2n} isolierte, irreduzible, $(2n-2)$-dimensionale analytische Flächenstücke* — wir wollen sie kurz *isolierte Singularitätenflächen* nennen.

Eine isolierte Singularitätenfläche einer Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ besteht entweder *nur* aus außerwesentlichen oder *nur* aus wesentlichen Singularitäten. Während nun der Weierstraßsche Vorbereitungssatz und seine Folgerungen die außerwesentlichen Singularitäten hinreichend charakterisieren, ist über das Verhalten einer Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in der Umgebung jener wesentlichen Singularitäten noch nichts bekannt — wir sehen dabei ab von der trivialen Verallgemeinerung des Picardschen Satzes der klassischen Funktionentheorie, daß nämlich eine Funktion f

---

*) Einen Teil der Ergebnisse dieser Arbeit habe ich in den Atti Accad. naz. Lincei Rend. (6) **18** (1933) und C. R. Acad. Sci. Paris **198** (1934) veröffentlicht.

[1]) Die zahlreiche Literatur zum Kontinuitätssatz siehe Behnke-Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Ergeb. Math. u. Grenzgeb. **3**, 3 — im folgenden zitiert als Behnke-Thullen, Bericht.

[2]) Vgl. Hartogs, Acta math. **32** (1909) und Behnke-Thullen, Bericht S. 51. Unter analytischen Mannigfaltigkeiten schlechthin verstehen wir — wie in der Theorie der Funktionen komplexer Veränderlichen üblich — stets nur komplexanalytische Mannigfaltigkeiten (Näheres s. § 1). Bei verschiedenen Autoren werden solche auch *charakteristische* Mannigfaltigkeiten genannt.

in jeder Umgebung eines jeden Punktes einer solchen Singularitätenmannigfaltigkeit alle Werte mit höchstens je einer Ausnahme annimmt [3]).

In der vorliegenden Arbeit soll nun versucht werden, die Frage nach dem Verhalten der analytischen und meromorphen Funktionen in der Umgebung ihrer isolierten wesentlichen Singularitätenflächen möglichst erschöpfend zu beantworten. Es wird sich vor allem darum handeln, den genauen Verlauf der a-Stellenflächen der jeweils gegebenen Funktion in der Umgebung einer solchen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, insbesondere ihre auf $\mathfrak{M}$ liegenden Grenzpunkte und wesentlich singulären Punkte zu untersuchen. Kennen wir die Verteilung dieser Randpunkte auf $\mathfrak{M}$, so wird es leicht sein, die Antwort auch auf die obige Frage zu geben.

In § 1 werden wir uns zunächst mit dem Begriff der analytischen Fläche und dem der wesentlichen Singularitäten solcher Flächen näher beschäftigen müssen. Wir werden hier insbesondere zeigen (vgl. Satz 1), *daß die wesentlichen Singularitäten eines analytischen Flächenstückes nie isoliert liegen* (im Gegensatz zu den stets isolierten algebraischen Singularitäten).

Es folgt dann (in § 2 für den Fall zweier, in § 4 für den Fall von n Veränderlichen) der Beweis des grundlegenden

Satzes 2: *Verhält sich das in einem Bereich $\mathfrak{B}$ liegende analytische Flächenstück $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{B}$ bis auf höchstens ein irreduzibles ebenfalls analytisches Flächenstück $\mathfrak{M}$ algebraisch, so ist entweder $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{B}$ ausnahmslos algebraisch* [4]), *oder aber $\mathfrak{F}$ hat jeden Punkt auf $\mathfrak{M}$ als wesentlich singulären Punkt* (insbesondere also jeden Punkt auf $\mathfrak{M}$ als Grenzpunkt) [5]).

Ist nun $\mathfrak{M}$ eine isolierte Singularitätenfläche einer regulären Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, so genügen die analytischen Flächenstücke $f(z_1, z_2, \ldots, z_n) - a = 0$ (a eine beliebige Konstante) in der Umgebung von $\mathfrak{M}$ den Voraussetzungen von Satz 2, und so ergibt sich aus der Aussage dieses Satzes fast unmittelbar die gesuchte Antwort auf unsere Frage. Es gilt:

Hauptsatz. *Besitzt die in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ bis auf ein irreduzibles analytisches Flächenstück $\mathfrak{M}$ reguläre Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ $\mathfrak{M}$ als wesentliche Singularitätenmannigfaltigkeit, so erfüllen für beliebig vorgegebenes*

[3]) Vgl. hierzu auch Caccioppoli, Boll. Un. Mat. Italiana 12 (1933).

[4]) Vgl. Definition auf S. 140.

[5]) Dieser Satz erinnert an den Kontinuitätssatz über die Singularitäten einer Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ [vgl. Anm. [1])]. Wie dort müssen sich die Singularitäten von $\mathfrak{F}$ — falls überhaupt eine solche auf $\mathfrak{M}$ existiert — über ganz $\mathfrak{M}$ ausbreiten. Es sei ferner bemerkt, daß sich aus Satz 2 ein neuer Beweis und zugleich eine Verallgemeinerung eines Satzes von Radó aus der klassischen Funktionentheorie ergibt (näheres s. S. 148). Den Hinweis hierauf verdanke ich den Herren H. Cartan und de Possel.

komplexes a mit höchstens einer Ausnahme a_0 die a-Stellen von f je ein analytisches Flächenstück $\mathfrak{F}_a$, das jeden Punkt auf $\mathfrak{M}$ als Grenzpunkt und damit als wesentliche Singularität besitzt. Es existiert höchstens ein a_0, so daß das Gebilde $\mathfrak{F}_{a_0}$ sich in ganz $\mathfrak{B}$ mit Einschluß von $\mathfrak{M}$ algebraisch verhält, sofern überhaupt f den Wert a_0 in $\mathfrak{B}$ annimmt.

Verhält sich also ein Gebilde $\mathfrak{F}_{a_0}$ auch nur in der Umgebung eines einzigen Punktes auf $\mathfrak{M}$ algebraisch oder — was im wesentlichen das gleiche bedeutet — wird a_0 in einer Umgebung auch nur eines Punktes Q auf $\mathfrak{M}$ von der Funktion f *nicht* angenommen[6]), so ist $\mathfrak{F}_{a_0}$ schlechthin in $\mathfrak{B}$ algebraisch und a_0 und nur a_0 Ausnahmewert in *jedem* Punkte auf $\mathfrak{M}$, abgesehen von den eventuellen Schnittpunkten von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{F}_{a_0}$, in denen *kein* Ausnahmewert existiert[6a]). Durch das Verhalten von f in der Umgebung eines einzigen Punktes auf $\mathfrak{M}$ ist so gewissermaßen das Verhalten von f in der Umgebung von ganz $\mathfrak{M}$ festgelegt.

Der Hauptsatz läßt sich unmittelbar auch auf *meromorphe* Funktionen ausdehnen, nur daß statt eines hier zwei Ausnahmewerte auftreten können.

Im letzten Paragraphen werden wir die gewonnenen Ergebnisse auf den besonders interessierenden Fall der ganzen Funktionen und die durch sie definierten „ganzen" Flächen anwenden.

Inhalt.

§ 1.

Allgemeines über analytische Flächen und ihre wesentlichen Singularitäten[7]).

Gegeben sei der Raum der n komplexen Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Die erste Veränderliche z_1 werden wir bei unseren Beweisen öfters auszeichnen müssen und sie dann der Deutlichkeit halber mit w bezeichnen, ohne im einzelnen Falle darauf hinzuweisen.

---

[6]) Wir sagen kurz, a_0 ist *Ausnahmewert* der Funktion f *im Punkte Q*.

[6a]) Diese bilden ein $(2n-4)$-dimensionales, auf $\mathfrak{M}$ algebraisches Gebilde, für $n = 2$ eine in $\mathfrak{B}$ sich nicht häufende Menge *isolierter* Punkte.

[7]) Zu einem Teile der eingeführten Begriffe vgl. Behnke-Thullen, Bericht S. 24ff.

Wenn wir im folgenden von analytischen Flächen schlechthin sprechen, so verstehen wir darunter $(2n-2)$-dimensionale komplex-analytische (auch reduzible) Mannigfaltigkeiten, d. h. Systeme von endlich vielen oder unter gewissen Voraussetzungen auch unendlich (aber stets abzählbar) vielen analytischen Flächenstücken im engeren Sinne[8]). Setzen wir eine Fläche irreduzibel voraus, so wird dies stets ausdrücklich bemerkt. *Eine Punktmenge $\mathfrak{F}$ eines Bereiches $\mathfrak{B}$ ist dann und nur dann eine in $\mathfrak{B}$ liegende analytische Fläche (im weiteren Sinne), falls es zu jedem Punkte P auf $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{B}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ und eine dort reguläre Funktion f_P gibt, so daß sämtliche in $\mathfrak{U}(P)$ liegenden Punkte von $\mathfrak{F}$ und nur diese der Gleichung $f_P = 0$ genügen.*

Da nach dem Vorbereitungssatze[9]) die Gleichung $f_P = 0$ (eventuell nach einer geeigneten linearen Transformation) durch eine pseudoalgebraische Gleichung ersetzt werden kann und somit $\mathfrak{F}$ sich in $\mathfrak{U}(P)$ wie eine algebraische Fläche verhält, so sagen wir auch: „*$\mathfrak{F}$ verhält sich in P algebraisch*" und nennen P einen *algebraischen Punkt* von $\mathfrak{F}$.

Einen Randpunkt Q einer solchen Fläche $\mathfrak{F}$ nennen wir einen *wesentlichen Randpunkt* oder *wesentlich singulären Punkt* von $\mathfrak{F}$, falls es in keiner Weise möglich ist, $\mathfrak{F}$ durch Hinzunahme weiterer Punkte über P hinaus analytisch fortzusetzen (so daß sich also die erweiterte Fläche in P algebraisch verhält). Besitzt die in $\mathfrak{B}$ liegende analytische Fläche $\mathfrak{F}$ dort bei geeigneter analytischer Erweiterung keinen Randpunkt, so sagen wir, *$\mathfrak{F}$ ist in $\mathfrak{B}$ algebraisch.* Umgekehrt nennen wir $\mathfrak{F}$ eine *in $\mathfrak{B}$ transzendente Fläche,* falls sie in $\mathfrak{B}$ mindestens einen wesentlichen Randpunkt besitzt.

Ein Randpunkt Q heißt *isolierter Randpunkt,* falls in genügend kleiner Umgebung $\mathfrak{U}(Q)$ kein weiterer Randpunkt von $\mathfrak{F}$ existiert.

Satz 1. *Ist Q ein isolierter Randpunkt der Fläche $\mathfrak{F}$, so verhält sich $\mathfrak{F}$ nach Erweiterung durch Q in Q algebraisch.*

Beweis. Wir wählen der Einfachheit halber Q als den Koordinatenanfang $(0, 0, \ldots, 0)$. Nach Voraussetzung verhält sich $\mathfrak{F}$ überall in einer geeigneten Umgebung $\mathfrak{U}(Q)$ mit Ausnahme eventuell von Q algebraisch. Wir dürfen annehmen (nach einer homogenen linearen Transformation der Koordinaten $w, z_2, \ldots, z_n$), daß $\mathfrak{F}$ die (zweidimensionale) Ebene

$$z_2 = z_3 = \ldots = z_n = 0$$

---

[8]) Darunter seien die in Behnke-Thullen, Bericht eingeführten ergänzten analytischen (stets irreduziblen) Flächen verstanden.

[9]) Vgl. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II_1 (zitiert als Osgood, Lehrbuch) oder Behnke-Thullen, Bericht.

nicht als Teil enthält[10]) und somit diese nur in isolierten Punkten schneidet. Es gibt daher ein positives e, so daß auf dem Hyperflächenstück

$$|w| = e, \quad |z_i| \leqq e, \quad i = 2, \ldots, n$$

kein Punkt von $\mathfrak{F}$ liegt und der Polyzylinder

$$|w| \leqq e, \quad |z_i| \leqq e, \quad i = 2, \ldots, n$$

noch in $\mathfrak{U}(Q)$ enthalten ist.

Auf Grund unserer Voraussetzung schneidet ferner eine (zweidimensionale) Ebene

$$z_i = \zeta_i, \quad i = 2, \ldots, n \quad (|\zeta_i| \leqq e \text{ und } (\zeta_2, \ldots, \zeta_n) \neq (0, \ldots, 0))$$

die Fläche $\mathfrak{F}$ innerhalb $|w| \leqq e$ höchstens in je einer endlichen Anzahl von Punkten. Wie man dann leicht aus dem Vorbereitungssatze schließt, bleibt für alle diese Ebenen die Zahl dieser Schnittpunkte — sie sei m — bei Berücksichtigung der Schnittmultiplizitäten[11]) ungeändert, und $\mathfrak{F}$ selbst läßt sich innerhalb

$$|w| \leqq e, \quad |z_i| \leqq e, \quad i = 2, \ldots, n, \quad (z_2, \ldots, z_n) \neq (0, \ldots, 0)$$

darstellen durch eine pseudoalgebraische Gleichung

$$(\mathfrak{F}) \quad \Phi(w, z_2, \ldots, z_n) \equiv w^m + w^{m-1} A_1(z_2, \ldots, z_n) + \ldots + A_m(z_2, \ldots, z_n) = 0$$

mit in

$$|z_i| \leqq e, \quad i = 2, \ldots, n, \quad (z_2, \ldots, z_n) \neq (0, \ldots, 0)$$

eindeutigen und regulären $A_k(z_2, \ldots, z_n)$.

Ist nun $n \geqq 3$, so folgt bereits unmittelbar aus dem Kontinuitätssatz, daß der isolierte Punkt $(0, \ldots, 0)$ kein singulärer Punkt der A_k sein kann.

Ist $n = 2$, so beachte man, daß die $A_k(\zeta_2)$ die elementarsymmetrischen Funktionen der in $|w| < e$ liegenden Wurzeln

$$w_\nu(\zeta_2), \quad \nu = 1, 2, \ldots, m$$

von $\Phi(w, \zeta_2) = 0$ bedeuten. Deshalb gilt überall in $0 < |z_2| < e$

$$|A_k(z_2)| < m e^m$$

oder (falls $e \leqq 1$)

$$|A_k(z_2)| < m, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

---

[10]) Es soll sich natürlich hier (wie auch im folgenden) stets nur um die innerhalb $\mathfrak{U}(Q)$ (bzw. innerhalb der sonst vorgegebenen Bereiche) liegenden Stücke der vorkommenden Flächen und Hyperflächen handeln.

[11]) Zum Begriff der Schnittmultiplizität vgl. etwa Severi, Rend. Semin. mat. Roma (2) 7 (1932), S. 43. Daß die Summe der Schnittmultiplizitäten erhalten bleibt, folgt aus der Tatsache, daß auf $|w| = e$, $|z_i| \leqq e$ kein Punkt von $\mathfrak{F}$ liegt, also bei stetiger Verschiebung der Ebenen $z_i = \zeta_i$ $(i = 2, \ldots, n)$ kein Schnittpunkt das Hyperflächenstück $|w| = e$ überschreiten kann (innerhalb $|\zeta_i| \leqq e$). Dieser Schluß wird im folgenden öfters benutzt werden.

woraus sich nach einem bekannten Satze der klassischen Funktionentheorie die Regularität der $A_k(z_2)$ in $z_2 = 0$ ergibt.

$\mathfrak{F}$ gestattet somit in $\mathfrak{U}(Q)$ die in Q noch analytische Darstellung $\Phi(w, z_2, \ldots, z_n) = 0$, w. z. b. w.

Ein wesentlicher Randpunkt kann also nie isolierter Randpunkt sein und ist deshalb stets Häufungspunkt weiterer wesentlicher Randpunkte.

§ 2.

Analytische Flächen des w-z-Raumes mit zweidimensionaler analytischer Singularitätenfläche.

Gegeben sei der Raum R_4 der beiden Veränderlichen w, z. Hier gilt

Satz 2. *Verhält sich das in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ liegende analytische Flächenstück $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{B}$ bis auf höchstens ein irreduzibles analytisches Flächenstück $\mathfrak{M}$ algebraisch und besitzt $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{M}$ mindestens einen wesentlichen Randpunkt, so ist notwendig auch jeder andere Punkt auf $\mathfrak{M}$ ein wesentlicher Randpunkt von $\mathfrak{F}$.*

Mit anderen Worten: Ist $\mathfrak{F}$ auch nur in *einem* Punkte auf $\mathfrak{M}$ algebraisch, so kann $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{M}$ keinen wesentlichen Randpunkt besitzen, verhält sich also in ganz $\mathfrak{B}$ mit Einschluß von $\mathfrak{M}$ algebraisch. Im anderen Falle besitzt das zweidimensionale Flächenstück $\mathfrak{F}$ ein gleichdimensionales Stück als Mannigfaltigkeit seiner Singularitäten. Unter allgemeineren Voraussetzungen können natürlich die wesentlichen Randpunkte einer analytischen Fläche Mannigfaltigkeiten der verschiedensten Art ausfüllen [12]).

Zum Beweise von Satz 2 zunächst der einfache

Hilfssatz. *Ist das Flächenstück $\mathfrak{F}$ in*

$$0 < |w| < d, \qquad |z| < d$$

und ferner in jedem Punkte einer geschlossenen, auf

$$w = 0, \qquad |z| < d$$

liegenden Jordankurve $\mathfrak{C}^{(z)}$ algebraisch, so verhält sich $\mathfrak{F}$ notwendig im ganzen Innern von $\mathfrak{C}^{(z)}$ algebraisch.

Beweis. Da $\mathfrak{F}$ noch in einem genügend kleinen, $\mathfrak{C}^{(z)}$ enthaltenden Streifen algebraisch sein muß, und dort die Schnittpunkte von $\mathfrak{F}$ mit der z-Ebene nur isoliert auftreten, können wir annehmen, daß auf $\mathfrak{C}^{(z)}$ *kein* Punkt von $\mathfrak{F}$ liegt. Da $\mathfrak{C}^{(z)}$ eine abgeschlossene Punktmenge ist, so gibt es ein $e > 0$, so daß die Menge aller (w, z) mit

$$|w| \leqq e, \qquad z \text{ auf } \mathfrak{C}^{(z)}$$

mit $\mathfrak{F}$ punktfremd ist. Wörtlich wie im Beweise von Satz 1, schließt man dann wieder (nur sind hier die Rollen von w und z vertauscht),

---

[12]) Vgl. eine demnächst erscheinende Arbeit des Verfassers.

daß $\mathfrak{F}$ auf $w = 0$ im ganzen Innern von $\mathfrak{C}^{(z)}$ algebraisch sein muß, w. z. b. w.

Beweis von Satz 2. Es genügt offenbar, die Behauptung des Satzes 2 für einfachzusammenhängendes, beschränktes $\mathfrak{M}$ zu beweisen[13]). Wir dürfen ferner annehmen, daß $\mathfrak{M}$ in der Form $w = g(z)$ darstellbar ist (die Punkte, in denen dies nicht möglich ist, liegen isoliert). $\mathfrak{M}$ läßt sich dann mittels der in einer geeigneten Umgebung von $\mathfrak{M}$ eineindeutigen und analytischen Abbildung

$$w = w - g(z), \qquad z = z$$

auf ein Stück der Ebene $\tilde{w} = 0$ abbilden. Aus all dem folgt, daß wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit wie im Hilfssatz voraussetzen können, daß $\mathfrak{M}$ mit dem Ebenenstück

$$(\mathfrak{M}) \qquad w = 0, \qquad |z| < d \qquad (d < 1)$$

und $\mathfrak{B}$ mit dem Bereich

$$(\mathfrak{B}) \qquad |w| < d, \qquad |z| < d$$

identisch ist.

Es wird zweckmäßig sein, den Gang des nun folgenden Beweises kurz anzudeuten:

Unter der Annahme, daß der Satz falsch sei, läßt sich auf $\mathfrak{M}$ ein durch einen Durchmesser aufgespaltener Kreisring $\mathfrak{R}^{(z)}$ und ein im Innern von $\mathfrak{R}^{(z)}$ liegender einfachzusammenhängender Bereich $\mathfrak{B}^{(z)}$ mit folgenden Eigenschaften bestimmen:

1. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß auf

$$|w| = \varepsilon, \qquad z \text{ aus } \mathfrak{R}^{(z)}$$

kein Punkt von $\mathfrak{F}$ liegt,

2. $\mathfrak{B}^{(z)}$ läßt einen zweidimensionalen Teil von $\mathfrak{R}^{(z)}$ unbedeckt,

3. $\mathfrak{F}$ verhält sich in

$$(\mathfrak{B}) \qquad |w| < \varepsilon, \qquad z \text{ aus } \mathfrak{B}^{(z)}$$

algebraisch,

4. Jeder in $\mathfrak{R}^{(z)}$ gelegene Randpunkt von $\mathfrak{B}^{(z)}$ ist wesentlich singulär für $\mathfrak{F}$.

Ist dann

$$\Psi(w, z) \equiv w^m + A_1(z_1) w^{m-1} + \ldots + A_m(z) = 0$$

die in $\mathfrak{B}$ gültige Darstellung von $\mathfrak{F}$, so muß die in $\mathfrak{B}^{(z)}$ reguläre Funktion $w = A_m(z)$ entweder in jedem in $\mathfrak{R}^{(z)}$ liegenden Randpunkte von $\mathfrak{B}^{(z)}$ den Grenzwert Null haben, oder es existiert wenigstens ein solcher Randpunkt, in dem $\lim A_m(z) \neq 0$, oder aber $\mathfrak{F}$ hat keinen Punkt mit $\mathfrak{B}$ gemeinsam. Sämtliche drei Fälle führen zu einem Widerspruch zu unserer Voraussetzung.

---

[13]) Wir denken uns etwa $\mathfrak{M}$ geeignet in übereinandergreifende einfachzusammenhängende Stücke zerlegt; falls $\mathfrak{M}$ einen unendlichfernen Punkt P enthält, bilden wir P mitsamt einer vollen Umgebung durch eine projektive Transformation ins Endliche ab. Vgl. auch Anm. [25]).

Der Beweis benutzt neben dem Vorbereitungssatz im wesentlichen den Cousinschen Satz über Funktionen zu vorgegebenen Nullstellen und einen Satz über die Regularitätshüllen Reinhardtscher Körper.

Nun der ausführliche Beweis!

Angenommen, die Behauptung des Satzes 2 *sei unter den gemachten Voraussetzungen falsch!*

Dann gäbe es auf $w = 0$ mindestens eine ganz in $|z| < d$ liegende Kreisscheibe $\mathfrak{A}^{(z)}$ (mit dem Mittelpunkt A), die keinen wesentlich singulären Punkt von $\mathfrak{F}$ enthält, wohl aber auf dem Rande mindestens einen solchen Punkt $Q(0, z_0)$ aufweist.

Wir können annehmen, daß die Ebene $z = z_0$ keinen Teil der gegebenen Fläche $\mathfrak{F}$ bildet. Dann existiert wieder (vgl. S. 141) ein $e > 0$ $(e < d < 1)$, so daß auf

(1) $$|w| = e, \quad |z - z_0| < e \qquad ((1) \text{ ganz in } \mathfrak{B})$$

kein Punkt von $\mathfrak{F}$ liegt. Innerhalb $|z - z_0| < e$ ziehe man jetzt auf $\mathfrak{M}$ um Q zwei verschiedene konzentrische Kreise, die beide $\mathfrak{A}^{(z)}$ schneiden mögen. Den zugehörigen durch die Gerade $\overline{AQ}$ aufgespaltenen Kreisring bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}^{(z)}$, ferner mit $\mathfrak{B}^{(z)}$ den größten auf einer vorgegebenen Seite von $\overline{AQ}$ liegenden, in $\mathfrak{R}^{(z)}$ enthaltenen Bereich der z-Ebene, der keinen wesentlichen Randpunkt von $\mathfrak{F}$ enthält. Man beachte, daß nach dem Hilfssatze $\mathfrak{B}^{(z)}$ einfachzusammenhängend ist und insbesondere, daß man innerhalb $\mathfrak{B}^{(z)}$ von einem Ufer der Geraden $\overline{AQ}$ nicht zum anderen gelangen kann.

In dem Bereiche

(2) $$|w| < e, \quad z \text{ aus } \mathfrak{B}^{(z)},$$

in dem $\mathfrak{F}$ sich nach unserer Annahme algebraisch verhält, läßt sich dann $\mathfrak{F}$ (falls überhaupt Punkte von $\mathfrak{F}$ in (2) liegen[14])) darstellen durch

$$\Psi(w, z) \equiv w^m + A_1(z)\, w^{m-1} + \ldots + A_m(z) = 0$$

mit in $\mathfrak{B}^{(z)}$ regulären $A_k(z)$[15]).

Wir zeigen, daß die $A_k(z)$ *bei Annäherung an einen beliebigen Randpunkt* α *von* $\mathfrak{B}^{(z)}$ *einem nur von* α *abhängigen Grenzwert zustreben.* Da die $A_k(z)$ die elementarsymmetrischen Funktionen der zu $\Psi(w, z) = 0$ gehörigen Wurzeln

$$\eta_\nu(z), \quad \nu = 1, 2, \ldots, m$$

sind, genügt es, die Behauptung für die $\eta_\nu(z)$ zu beweisen.

Existierten in $\mathfrak{B}^{(z)}$ zwei gegen α konvergente Punktfolgen $\alpha_\mu \to \alpha$, $\beta_\mu \to \alpha$ mit

$$\lim_{\mu=\infty} \eta_{\nu_0}(\alpha_\mu) = k_0 \neq \lim_{\mu=\infty} \eta_{\nu_0}(\beta_\mu) = k_1 \quad (|k_0|, |k_1| \leqq e < 1),$$

14) Vgl. Fall 3, S. 148.

15) Man vgl. Beweis von Satz 1 und beachte (1).

so folgte aus der Stetigkeit von $\eta_{\nu_0}(z)$ in $\mathfrak{B}^{(z)}$, daß man auf *jeder* die Werte k_0 und k_1 trennenden Sehne des Kreises $|\eta| \leqq e$ mindestens einen Wert k und dazu in $\mathfrak{B}^{(z)}$ eine Punktfolge $\gamma_\mu^{(k)} \to \alpha$ angeben könnte mit

$$\lim_{\mu=\infty} \eta_{\nu_0}(\gamma_\mu^{(k)}) = k;$$

hierzu hat man nur von einem μ_0 ab je ein geeignetes $\gamma_\mu^{(k)}$ auf einer α_μ und β_μ in $\mathfrak{B}^{(z)}$ verbindenden Kurve zu wählen. Die Fläche $\mathfrak{F}$ hätte also mit dem Ebenenstück $z = \alpha$ eine nicht abzählbare Punktmenge gemeinsam, müßte damit das Ebenenstück

$$z = \alpha, \ |w| \leqq e$$

ganz enthalten; dies widerspricht unserer Annahme, daß auf (1) kein Punkt von $\mathfrak{F}$ liegt.

Im folgenden kommt es allein auf das Verhalten der Funktion $A_m(z)$ an. Wir setzen $A_m(z) \not\equiv 0$ voraus; im anderen Falle ließe sich von $\Psi(w, z)$ ein Faktor w^ϱ abspalten, und wir könnten für die reduzierte Funktion dieselben Überlegungen durchführen.

Da

$$|\eta_\nu(z)| < e < 1 \quad \text{für } z \text{ aus } \mathfrak{B}^{(z)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m),$$

verläuft das analytische Flächenstück

$$w = A_m(z) \equiv \prod_{\nu=1}^{m} \eta_\nu(z)$$

für z aus $\mathfrak{B}^{(z)}$ ganz innerhalb $|w| < e$ und ist dort algebraisch.

Wir unterscheiden nun drei Fälle:

Fall 1. *In jedem erreichbaren Randpunkte P von $\mathfrak{B}^{(z)}$, der zugleich wesentlich singulärer Punkt von $\mathfrak{F}$ ist, nehme $A_m(z)$ den Grenzwert 0 an, falls sich z auf einem beliebigen Geradenstück P nähert!*

Ähnlich wie oben schließen wir, daß $\lim A_m(z) = 0$ bei jeder beliebigen Annäherung an einen erreichbaren oder nicht erreichbaren Randpunkt von $\mathfrak{B}^{(z)}$, der zugleich wesentlicher Randpunkt von $\mathfrak{F}$ ist.

Ordnen wir nun den Punkten $P(w, z)$ des Zylinderbereiches

$$(3) \qquad 0 < |w| < e, \quad z \text{ aus } \mathfrak{R}^{(z)}$$

die Funktion $f_P \equiv w - A_m(z)$ zu, falls z in $\mathfrak{B}^{(z)}$, und $f_P \equiv 1$, falls z außerhalb oder auf dem Rande von $\mathfrak{B}^{(z)}$ liegt, so lassen sich geeignete Umgebungen $\mathfrak{U}(P)$ so bestimmen, daß die $\mathfrak{U}(P)$ und die f_P der Verträglichkeitsbedingung des bekannten Cousinschen Satzes (über Funktionen zu vorgegebenen Nullstellenflächen) genügen[16]). Es existiert demnach

[16]) Der Cousinsche Satz besagt bekanntlich: *Jedem Punkt P eines Zylinderbereiches* $(\mathfrak{B}_1^{(z_1)}, \mathfrak{B}_2^{(z_2)}, \ldots, \mathfrak{B}_n^{(z_n)})$ [$\mathfrak{B}^{(z_i)}$ *jeweils ein einfach-zusammenhängender*

eine in $\mathfrak{Z}$ reguläre Funktion $\varphi(w, z)$, die innerhalb $\mathfrak{Z}$ nur auf $w = A_m(z)$, z aus $\mathfrak{B}^{(z)}$ verschwindet.

In $\mathfrak{R}^{(z)}$ wähle man nun einen Punkt $(0, \alpha)$ und ein $q > 0$, so daß der Kreis $|z - \alpha| < q$ noch ganz in $\mathfrak{R}^{(z)}$ und der Kreis $|z - \alpha| < \frac{q}{2}$ außerhalb von $\mathfrak{B}^{(z)}$ liegt, letzterer aber mindestens einen Randpunkt $(0, \beta)$ mit dem Rande von $\mathfrak{B}^{(z)}$ gemeinsam hat ($(0, \beta)$ ist wesentlich singulärer Punkt von $\mathfrak{F}$). Um $(0, \alpha)$ als Mittelpunkt läßt sich dann ein (uneigentlicher) Reinhardtscher Körper $\mathfrak{K}$ so konstruieren, daß die Punkte

$$0 < |w| < e, \quad |z - \alpha| < \frac{q}{2}$$

im Innern und die Punkte

$$w = 0, \quad |z - \alpha| \leqq \frac{q}{2} \quad \text{und} \quad |w| = e, \quad |z - \alpha| \leqq q$$

auf dem Rande von $\mathfrak{K}$ liegen und $\mathfrak{K}$ zugleich *keinen* Punkt von $\varphi = 0$ enthält.

Da die Regularitätshülle von $\mathfrak{K}$ mit dem vollen Zylinder

$$(\mathfrak{H}(\mathfrak{K})) \qquad 0 < |w| < e, \quad |z - \alpha| < q$$

identisch ist[17]), so folgt, daß die in $\mathfrak{K}$ nicht verschwindende Funktion φ auch in $\mathfrak{H}(\mathfrak{K})$ keine Nullstelle besitzt. Somit könnte in dem Durchschnitt von (2) und $\mathfrak{H}(\mathfrak{K})$ und damit — wie man nach dem Vorbereitungssatz leicht schließt[18]) — in ganz (2) kein Punkt der Fläche $w = A_m(z)$ liegen im Widerspruch zu unserer Annahme. Der Fall 1 kann also nicht eintreten.

Fall 2. *Es existiere ein für $\mathfrak{F}$ wesentlich singulärer Randpunkt* $(0, \gamma)$ *von* $\mathfrak{B}^{(z)}$ *und in* $\mathfrak{B}^{(z)}$ *ein in* γ *endendes Geradenstück* $\mathfrak{C}_0$, *so daß auf* $\mathfrak{C}_0$ $\lim\limits_{z=\gamma} A_m(z) = k \neq 0$ (*es ist* $|k| < e < 1$)!

Bereich der z_i-Ebene] sei eine Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ und eine dort reguläre Funktion f_P so zugeordnet, daß stets, falls Q einen beliebigen Punkt aus $\mathfrak{U}(P)$, f_Q die Q zugeordnete Funktion bedeutet, die Funktionen f_P und f_Q in Q äquivalent in bezug auf Division sind. Dann gibt es eine im ganzen Zylinderbereiche reguläre Funktion $G(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, die in jedem Punkte P mit der zugehörigen Funktion f_P äquivalent in bezug auf Division ist.

Zwei in Q reguläre Funktionen f und g heißen dabei *äquivalent* in bezug auf Division, falls der Quotient f/g in Q regulär und von Null verschieden ist.

Dieser Satz gilt auch dann noch, wenn einer der Grundbereiche $\mathfrak{B}_{i_0}^{(z_{i_0})}$ *mehrfachzusammenhängend* ist. Vgl. Osgood, Lehrbuch, S. 264/265.

[17]) Zur Theorie der Regularitätshüllen vgl. Thullen und Cartan-Thullen, Math. Annalen 106 (1932) und Behnke-Thullen, Bericht. Daß obiger Zylinderbereich die Regularitätshülle von $\mathfrak{K}$ ist, folgt unmittelbar aus einem Ergebnis von Nakano [Jap. Journ. Math. 9 (1932)].

[18]) Man beachte, daß auf $|w| = e$, z aus $\mathfrak{B}^{(z)}$ kein Punkt von $w = A_m(z)$ liegt.

Um $\mathfrak{C}_0$ gibt es einen Teilbereich $\mathfrak{B}_0^{(z)}$ von $\mathfrak{B}$, der γ als einfachen Randpunkt besitzt, aber sonst keinen weiteren Randpunkt mit dem Rande von $\mathfrak{B}^{(z)}$ gemeinsam hat. Wir wählen $\mathfrak{B}_0^{(z)}$ so klein, daß dort für alle $\eta_\nu(z)$ gilt:

(3) $$|\eta_\nu(z)| > \frac{|k|}{2} \qquad (\text{für } z \text{ aus } \mathfrak{B}_0^{(z)}).$$

Dann aber existiert ein gewisses $r_0 > 0$, so daß das Hyperflächenstück

$$|w| = \frac{|k|}{3}, \quad |z-\gamma| < r_0$$

mit $\mathfrak{F}$ punktefremd ist — anderenfalls läge nämlich auf

$$w = \frac{|k|}{3}, \quad z = \gamma$$

ein Punkt P_0 von $\mathfrak{F}$ und damit nach dem Vorbereitungssatze auf jeder Nachbarebene $z = c$ Punkte von $\mathfrak{F}$ in beliebiger Nähe von P_0 entgegen unserer Voraussetzung (3).

Aus dem Durchschnitt von $|z-\gamma| < r_0$ und $\mathfrak{B}_0^{(z)}$ greifen wir ein δ heraus mit $|\delta - \gamma| = \frac{r_0}{3}$. Bei geeigneter Wahl einer positiven Zahl $\varrho_0 < \frac{r_0}{3}$ existiert dann wieder um $(0, \delta)$ als Mittelpunkt ein (uneigentlicher) Reinhardtscher Körper $\widetilde{\mathfrak{K}}$, der auf seinem Rande die Punkte

$$w = 0, \quad |z-\delta| \leqq \varrho_0 \quad \text{und} \quad |w| = \frac{|k|}{3}, \quad |z-\delta| \leqq \frac{2}{3} r_0$$

und im Innern die Punkte

$$0 < |w| < \frac{|k|}{3}, \quad |z-\delta| < \varrho_0,$$

dort aber keinen Punkt von $\mathfrak{F}$ enthält. Nach dem Cousinschen Satze[19]) existiert ferner eine im ganzen Zylinderbereiche

$$0 < |w| < d, \quad z \text{ aus } \mathfrak{N}^{(z)}$$

reguläre Funktion f, die in den Punkten von $\mathfrak{F}$ und nur in diesen verschwindet. f ist also insbesondere in $\widetilde{\mathfrak{K}}$ regulär und hat dort und damit auch in der Regularitätshülle

($\mathfrak{H}(\widetilde{\mathfrak{K}})$) $$0 < |w| < \frac{|k|}{3}, \quad |z-\delta| < \frac{2}{3} r_0$$

keine Nullstelle, entgegen unserer Voraussetzung, daß $(0, \gamma)$ ein wesentlich singulärer Punkt, also zum mindesten Grenzpunkt von Punkten der Fläche ist.

---

[19]) Vgl. Anm. [16]).

Fall 3. *Innerhalb des Bereiches*

$$|w| < e, \quad z \text{ aus } \mathfrak{B}^{(z)}$$

liege überhaupt kein Punkt von $\mathfrak{F}$*!*

Der Beweis wird in diesem Falle fast wörtlich wie im Falle 2 geführt und kann hier übergangen werden.

Die drei nur möglichen Fälle führen also sämtlich zu einem Widerspruch. Hiermit ist die Behauptung des Satzes 2 vollständig bewiesen.

Bemerkung zu Satz 2. Aus Satz 2 ergibt sich der folgende von Radó bewiesene Satz der klassischen Funktionentheorie [20]):

„Lemma: *Sei G ein schlichtes einfachzusammenhängendes Gebiet im Einheitskreis, welches indessen nicht mit dem Innern des Einheitskreises identisch sein soll. Sei ferner* $f(z)$ *eine in G reguläre Funktion, welche in jedem Randpunkte von G, welcher im Innern des Einheitskreises liegt, verschwindet. Genauer gesagt: Ist* α *ein Randpunkt von G, welcher im Innern des Einheitskreises liegt und* $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ *eine Punktfolge in G, welche gegen* α *konvergiert, so ist* $\lim f(z_n) = 0$.

Dann wird behauptet, daß $f(z)$ *identisch verschwindet*".

(Auf Grund dieses Lemmas schließt dann Radó auf die Existenz offener nichtfortsetzbarer Riemannscher Flächen.)

Über diesen Radóschen Satz hinaus können wir nun folgendes behaupten:

$\mathfrak{B}^{(z)}$ *sei ein beschränkter und schlichter einfachzusammenhängender Bereich der z-Ebene,* $\tilde{\mathfrak{B}}^{(z)} \neq \mathfrak{B}^{(z)}$ *ein endlicher, einfachzusammenhängender und* $\mathfrak{B}^{(z)}$ *enthaltender Bereich. Ist dann* $f(z)$ *eine in* $\mathfrak{B}^{(z)}$ *reguläre Funktion, die in sämtlichen im Innern von* $\tilde{\mathfrak{B}}^{(z)}$ *liegenden Randpunkten von* $\mathfrak{B}^{(z)}$ *den Grenzwert Null hat, so verschwindet* $f(z)$ *identisch in* $\mathfrak{B}^{(z)}$.

Wendet man nämlich den Cousinschen Satz (vgl. Beweis von Satz 2) auf den Zylinder

$$(3) \qquad 0 < |w| < M, \quad z \text{ aus } \tilde{\mathfrak{B}}^{(z)} \quad (M \text{ geeignete positive Konstante})$$

an, indem man jedem Punkte $P(w, z)$ aus $\mathfrak{Z}$ mit z aus $\mathfrak{B}^{(z)}$ die Funktion $f_P \equiv w - f(z)$, mit z auf dem Rande und außerhalb von $\mathfrak{B}^{(z)}$ die Funktion $f_P \equiv 1$ zuordnet, so erhält man eine in $\mathfrak{Z}$ reguläre Funktion $F(w, z)$, die innerhalb $\mathfrak{Z}$ nur auf $w = f(z)$ verschwindet.

Die Fläche $F(w, z) = 0$ verhält sich in ganz $\mathfrak{Z}$ algebraisch, hat aber, falls $F(w, z)$ nicht in jedem Punkte von

$$(\mathfrak{M}) \qquad w = 0, \quad z \text{ aus } \tilde{\mathfrak{B}}^{(z)}$$

[20]) Vgl. Radó, „Über eine nicht fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit"; Math. Zeitschr. 20 (1934).

verschwindet, auf $\mathfrak{M}$ mindestens einen wesentlich singulären Punkt. In jedem Falle muß (vgl. Satz 2) $F(w, z) = 0$ jeden Punkt auf $\mathfrak{M}$ als Grenzpunkt besitzen; das aber heißt, $w = f(z)$ muß in ganz $\mathfrak{B}^{(z)}$ verschwinden, w. z. b. w.

Interessant ist, daß wir so mit Hilfe der Funktionen zweier Veränderlichen einen Satz aus der Funktionentheorie einer Veränderlichen beweisen konnten.

§ 3.

Hauptsatz über die isolierten wesentlichen Singularitäten von Funktionen zweier Veränderlichen

In einem Bereiche $\mathfrak{B}$ des R_4 sei ein irreduzibles analytisches Flächenstück $\mathfrak{M}$ und eine in $\mathfrak{B}$ mit Ausnahme von $\mathfrak{M}$ reguläre Funktion $f(w, z)$ gegeben, die $\mathfrak{M}$ als wesentliche Singularitätenmannigfaltigkeit besitzt.

Wird nun von der Funktion $f(w, z)$ ein Wert a_0 in einer noch so kleinen Umgebung auch nur eines Punktes auf $\mathfrak{M}$ *nicht* angenommen, so ist nach Satz 2 die Fläche $f(w, z) = a_0$ im ganzen Innern von $\mathfrak{B}$ mit Einschluß von $\mathfrak{M}$ algebraisch (falls $f(w, z) - a_0$ überhaupt in mindestens einem Punkte von $\mathfrak{B}$ verschwindet).

Haben die Flächen $f(w, z) - a_0 = 0$ und $\mathfrak{M}$ keine gemeinsamen Schnittpunkte, so ist a_0 Ausnahmewert der Funktion f in allen Punkten auf $\mathfrak{M}$; im anderen Falle bilden die Schnittpunkte von $f - a_0 = 0$ und $\mathfrak{M}$ eine abzählbare, in $\mathfrak{B}$ sich nirgends häufende Punktmenge. Mit Ausnahme dieser *isolierten* Punkte ist a_0 wieder Ausnahmewert von f in jedem Punkte von $\mathfrak{M}$. In beiden Fällen kann in keinem Punkte auf $\mathfrak{M}$ ein von a_0 verschiedener Ausnahmewert existieren. Insbesondere ist jede Fläche $f(w, z) = a \neq a_0$ in $\mathfrak{B}$ transzendent und besitzt *jeden* Punkt auf $\mathfrak{M}$ als wesentlichen Randpunkt.

Wir können also sagen:

Satz 3. (Hauptsatz für $n = 2$.) *Besitzt die in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ bis auf ein irreduzibles analytisches Flächenstück $\mathfrak{M}$ reguläre Funktion $f(w,z)$ $\mathfrak{M}$ als wesentliche Singularitätenmannigfaltigkeit, so erfüllen für beliebig vorgegebenes komplexes a mit höchstens einer Ausnahme a_0 die a-Stellen von f je ein analytisches Flächenstück $\mathfrak{F}_a$, das jeden Punkt auf $\mathfrak{M}$ als wesentlichen Randpunkt besitzt. Es existiert höchstens ein a_0, so daß entweder das Gebilde $\mathfrak{F}_{a_0}$ sich in ganz $\mathfrak{B}$ mit Einschluß von $\mathfrak{M}$ algebraisch verhält oder aber f den Wert a_0 in $\mathfrak{B}$ überhaupt nicht annimmt.*

a_0 ist dann Ausnahmewert von f in sämtlichen Punkten auf $\mathfrak{M}$ mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren, in $\mathfrak{B}$ sich nicht häufenden Punkt-

menge, den eventuellen Schnittpunkten von $\mathfrak{F}_{a_0}$ *mit* $\mathfrak{M}$, *in denen kein Ausnahmewert von* f *existiert.*

Statt der regulären Funktion $f(w, z)$ betrachten wir nun eine in $\mathfrak{B}$ bis auf $\mathfrak{M}$ *meromorphe* Funktion $F(w, z)$, die $\mathfrak{M}$ als wesentliche Singularitätenfläche besitzt.

Die a-Stellenflächen von F genügen den gleichen, durch den Vorbereitungssatz gegebenen Gesetzen wie die der regulären Funktionen. Wir können also Satz 2 unmittelbar auch auf $F(w, z)$ anwenden und sagen:

Satz 3a. *Besitzt die in einem Bereiche* $\mathfrak{B}$ *bis auf ein irreduzibles analytisches Flächenstück* $\mathfrak{M}$ *meromorphe Funktion* $F(w, z)$ $\mathfrak{M}$ *als wesentliche Singularitätenmannigfaltigkeit, so erfüllen für allgemeines* a *die* a*-Stellen von* F *je ein analytisches Flächenstück* $\mathfrak{F}_a$, *das jeden Punkt von* $\mathfrak{M}$ *als wesentlichen Randpunkt besitzt. Es existieren höchstens zwei Ausnahmewerte* a_0 *und* a_1, *so daß die Gebilde* $\mathfrak{F}_{a_0}$ *und* $\mathfrak{F}_{a_1}$ *sich in* $\mathfrak{B}$ *mit Einschluß von* $\mathfrak{M}$ *algebraisch verhalten oder aber* F *den Wert* a_0 *bzw.* a_1 *in* $\mathfrak{B}$ *überhaupt nicht annimmt.*

Es ist selbstverständlich, daß die Polfläche $\mathfrak{F}_\infty$ der Funktion $F(w, z)$ den gleichen Bedingungen unterworfen ist. Entweder besitzt die Fläche $\mathfrak{F}_\infty$ *jeden* Punkt auf $\mathfrak{M}$ als wesentlichen Randpunkt, oder sie ist in sämtlichen Punkten von $\mathfrak{M}$ noch algebraisch. Im letzten Falle kann dann höchstens noch *ein* Ausnahmewert a_0 auftreten.

Hat nun $F(w, z)$ in einem Punkte auf $\mathfrak{M}$ zwei Ausnahmewerte a_0 und a_1, so wird F auch in jedem anderen, *allgemein* gewählten Punkte auf $\mathfrak{M}$ die Ausnahmewerte a_0 und a_1, dagegen in den (isolierten) gemeinsamen Schnittpunkten von $\mathfrak{F}_{a_0}$ und $\mathfrak{F}_{a_1}$ *keinen* Ausnahmewert und in den übrigen Schnittpunkten von $\mathfrak{F}_{a_0}$ mit $\mathfrak{M}$ (bzw. $\mathfrak{F}_{a_1}$ mit $\mathfrak{M}$) den Ausnahmewert a_1 (bzw. a_0) besitzen. Es kann natürlich vorkommen, daß nur ein Ausnahmewert a_0 oder überhaupt kein Ausnahmewert auftritt.

§ 4.

Der Hauptsatz für Funktionen von n Veränderlichen.

Wir beweisen zunächst die Gültigkeit des Satzes 2 für $(2n-2)$-dimensionale analytische Flächen des $2n$-dimensionalen Raumes. *Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion.* Wir nehmen also die Behauptung für $\nu \leqq n-1$ als richtig an und beweisen unter dieser Annahme die Richtigkeit der Behauptung für $\nu = n$. Da der Satz für $n = 2$ bewiesen ist, folgt seine Gültigkeit für beliebiges n.

Ähnlich wie beim Beweise auf S. 143 dürfen wir voraussetzen, daß $\mathfrak{M}$ mit einem $(2n-2)$-dimensionalen Ebenenstück

$$(\mathfrak{M}) \qquad w = 0, \qquad |z_i| < d, \qquad i = 2, \ldots, n$$

identisch ist und daß die gegebene $(2n-2)$-dimensionale Fläche sich in

$$(1) \qquad 0 < |w| < d, \quad |z_i| < d, \quad i = 2, \ldots, n$$

algebraisch verhält.

Wir betrachten nun die $(2n-4)$-dimensionalen Schnitte der Fläche $\mathfrak{F}$ mit den Ebenen $z_\nu = \text{const}$. Es ist durchaus möglich, daß einer dieser Ebenenschnitte sich innerhalb

$$|w| < d, \quad |z_i| < d, \quad i = 2, \ldots, \nu-1, \nu+1, \ldots, n$$

algebraisch verhält, obwohl $\mathfrak{F}$ selbst dort eine wesentliche Singularität aufweist. Doch können wir behaupten:

Hilfssatz. *Gibt es unter den über $\mathfrak{F}$ gemachten Voraussetzungen ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß jeder Schnitt von $\mathfrak{F}$ mit einer beliebigen Ebene $z_\nu = c$ $(|c| < \varepsilon_0)$ in*

$$|w| < d, \quad |z_i| < d, \quad i = 2, \ldots, \nu-1, \nu+1, \ldots, n$$

algebraisch ist, existieren ferner auf $w = 0$ in jeder Nähe von $O\,(0, 0, \ldots, 0)$ Punkte, in denen $\mathfrak{F}$ sich schlechthin algebraisch verhält, so ist auch O ein algebraischer Punkt für $\mathfrak{F}$.

Beweis. Wir dürfen annehmen, daß die 2-dimensionale Ebene

$$z_2 = z_3 = \ldots = z_n = 0$$

nicht als Teil in $\mathfrak{F}$ enthalten ist und damit höchstens isolierte Punkte mit $\mathfrak{F}$ gemeinsam hat (dies läßt sich stets durch eine lineare Transformation der Fläche erreichen, die zugleich $w = 0$ in sich überführt). Es existiert dann wieder ein $e > 0$, so daß auf

$$(2) \qquad |w| = e, \quad |z_i| \leqq e, \quad i = 2, \ldots, n \quad (e \leqq d)$$

kein Punkt von $\mathfrak{F}$ liegt. Nach Voraussetzung existiert ferner ein Punkt $(0, a_2, \ldots, a_n)$ und ein ϱ, so daß $\mathfrak{F}$ sich innerhalb

$$(2') \qquad w = 0, \quad |z_i - a_i| < \varrho, \quad i = 2, \ldots, n$$

algebraisch verhält und zugleich $|z_i - a_i| < \varrho$ in $|z_i| < e$ enthalten ist $(i = 2, \ldots, n)$. Wir können $e = \varepsilon_0$ wählen.

Wir betrachten zunächst die Schnitte von $\mathfrak{F}$ mit einer Ebene $z_n = c_n$ (c_n konstant und $|c_n| < e$). Da $\mathfrak{F}$ mit (2) punktfremd ist, läßt sich ein solcher Schnitt auf Grund des Vorbereitungssatzes darstellen durch:

$$w^{m(c_n)} + A_1(z_2, \ldots, z_{n-1}, c_n)\, w^{m(c_n)-1} + \ldots + A_{m(c_n)}(z_2, \ldots, z_{n-1}, c_n) = 0;$$

hierbei sind die $A_k(z_2, \ldots, z_{n-1}, c_n)$ in

$$|z_i| < e, \quad i = 2, \ldots, n-1$$

regulär bei jeweils festem, sonst aber beliebigem c_n aus $|c_n| < e$; zugleich sind die $A_k(\zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}, \zeta_n)$ die elementarsymmetrischen Funktionen der w-Koordinaten der auf

$$z_2 = \zeta_2, \quad z_3 = \zeta_3, \ldots, \quad z_n = \zeta_n, \quad |w| < e$$

gelegenen Punkte von $\mathfrak{F}$, gerechnet mit der jeweils zugehörigen Schnittmultiplizität[21]), und zwar bei *festgehaltenem* ζ_n.

Unser Ziel ist, zu zeigen, daß $m(c_n)$ von c_n unabhängig ist und daß die $A_k(z_2, \ldots, z_n)$ in

$$|z_i| < e, \qquad i = 2, \ldots, n$$

reguläre Funktionen der unabhängigen Veränderlichen $z_2, \ldots, z_n$ sind.

Zur Vereinfachung des Beweises können wir voraussetzen, daß keine Verzweigungsmannigfaltigkeit von $\mathfrak{F}$ mit einem in (1) gelegenen $(2n-4)$-dimensionalen Teile irgendeines Ebenenschnittes zusammenfällt; dies läßt sich stets durch eine nicht spezielle lineare Transformation der Fläche $\mathfrak{F}$ erreichen (bei festem $w = 0$ und fester Achse $z_2 = z_3 = \ldots = z_n = 0$). Ist aber eine solche Verzweigungsmannigfaltigkeit für $z_n = \bar{c}_n$ mit der durch $z_n = \bar{c}_n$ aus $w = 0$ ausgeschnittenen $(2n-4)$-dimensionalen Ebene identisch, so wählen wir statt $m(\bar{c}_n)$ den oberen limes der $m(c_n)$ für $c_n \to \bar{c}_n$ (wir setzen dann $A_k(z_2, \ldots, z_{n-1}, \bar{c}_n) \equiv 0$ für $k > m(\bar{c}_n)$).

Da nun $\mathfrak{F}$ sich innerhalb

$$|w| \leqq e, \quad |z_i - a_i| < \varrho, \quad i = 2, \ldots, n$$

algebraisch verhält (vgl. (1) und (3)), folgt unter den gemachten Voraussetzungen, daß $m(c_n) \equiv m = \text{const}$ für alle c_n mit $|c_n - a_n| < \varrho$, daß ferner die $A_k(z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n)$ in

$$|z_i - a_i| < \varrho, \quad i = 2, \ldots, n-1, n$$

schlechthin reguläre Funktionen der z_i sind und zugleich, daß für jedes $(\zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}, \zeta_n)$ aus

$$(4) \qquad |\zeta_i| < e, \quad i = 2, \ldots, n-1, \quad |\zeta_n - a_n| < \varrho$$

die Summe der Schnittmultiplizitäten der Schnittpunkte von $\mathfrak{F}$ mit dem 2-dimensionalen Ebenenstück

$$|w| < e, \quad z_2 = \zeta_2, \quad z_3 = \zeta_3, \ldots, z_n = \zeta_n \qquad (\zeta_i \text{ aus } (4))$$

konstant und gleich m ist, gemessen bei *beliebiger* Annäherung an diese Ebenen.

Dieselbe Überlegung führen wir für z_{n-1} durch und erhalten als Darstellung der zugehörigen Schnitte:

$$w^{m(c_{n-2})} + A_1(z_2, \ldots, z_{n-2}, c_{n-1}, z_n)\, w^{m(c_{n-2})-1} + \ldots$$
$$+ A_{m(c_{n-2})}(z_2, \ldots, z_{n-2}\, c_{n-1}, z_n) = 0;$$

---

[21]) Vgl. Anm. [11]).

hierbei sind die $A_k(z_2, \ldots, z_{n-1}, c_{n-1}, z_n)$ bei festem c_{n-1} in

$$|z_i| < e, \quad i = 2, \ldots, n-2, n$$

regulär. Da jeder Ebenenschnitt $z_{n-1} = c_{n-1}$ den Streifen (4) in einem $(2n-4)$-dimensionalen Stücke trifft, ergibt sich nunmehr[22]), daß $m(c_{n-1}) \equiv m$ für *alle* c_{n-1} aus $|c_{n-1}| < e$ und daraus, daß für *jedes* $(\zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ aus $|\zeta_i| < e$, $i = 2, \ldots, n$ die Summe der Schnittmultiplizitäten innerhalb $|w| < e$ schlechthin gleich m ist.

Auf diese Weise erhalten wir schließlich innerhalb

$$(5) \qquad |w| < e, \quad |z_i| < e, \quad i = 2, \ldots, n$$

für $\mathfrak{F}$ die Darstellung:

$$w^m + A_1(z_2, \ldots, z_n)\, w^{m-1} + \ldots + A_m(z_2, \ldots, z_n) = 0,$$

wobei die A_k in

$$(6) \qquad |z_i| < e, \quad i = 2, \ldots, n$$

bei festgehaltener einer Veränderlichen reguläre Funktionen der übrigen sind. Nach einem bekannten Hartogsschen Satze sind also die A_k in (6) schlechthin regulär und somit $\mathfrak{F}$ in ganz (5) algebraisch, w. z. b. w.

Aus dem Hilfssatz ergibt sich jetzt wie folgt unsere Behauptung:

Setzen wir voraus, daß auf $\mathfrak{M}$ mindestens ein wesentlich singulärer Punkt von $\mathfrak{F}$ existiert, so sind nur zwei Fälle möglich:

1. Die wesentlichen Singularitäten von $\mathfrak{F}$ bilden auf $\mathfrak{M}$ eine Menge mit nur *inneren* Punkten. Da jeder Häufungspunkt von wesentlich singulären Punkten wieder ein solcher ist, muß diese Menge ganz $\mathfrak{M}$ bedecken. Unsere Behauptung wäre also bereits bewiesen.

2. Es gibt auf $\mathfrak{M}$ einen wesentlich singulären Punkt Q, so daß in jeder auf $\mathfrak{M}$ liegenden Umgebung von Q algebraische Punkte von $\mathfrak{F}$ existieren. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß Q die Koordinaten $0, 0, \ldots, 0$ hat.

Aus dem Hilfssatz folgt dann, daß es zu mindestens einem $i = i_0$ eine Folge positiver Zahlen ε_ν mit $\lim\limits_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 0$ gibt, so daß die zu den Ebenen $z_{i_0} = \varepsilon_\nu$ gehörigen Schnitte von $\mathfrak{F}$ in mindestens einem Punkte auf

$$(7) \qquad w = 0, \quad |z_i| < e, \quad i = 2, \ldots, i_0 - 1, i_0 + 1, n$$

wesentlich singulär werden, oder daß der zu $z_{i_0} = 0$ gehörige Schnitt bereits selbst auf (7) eine wesentliche Singularität besitzt.

[22]) Betreffs der c_{n-1} machen wir die gleichen Annahmen wie oben über die $\bar{c}_n$.

Da nach unserer Annahme Satz 2 für diese $(2n-4)$-dimensionalen Schnitte gilt, muß *jeder* Punkt auf

$$w=0,\quad z_{i_0}=\varepsilon_\nu,\quad |z_i|<e\quad i=2,\ldots,i_0-1,i_0+1,\ldots,n$$

bzw. auf

$$(8)\qquad w=0,\quad z_{i_0}=0,\quad |z_i|<e\quad i=2,\ldots,i_0-1,\ i_0+1,\ldots,n$$

wesentlich singulärer Punkt des zugehörigen Schnittes und damit erst recht der gegebenen Fläche $\mathfrak{F}$ sein. In jedem Fall ist also *jeder* Punkt auf (8) als Häufungspunkt von wesentlichen Singularitäten selbst eine solche.

Beziehen wir nun die Fläche $\mathfrak{F}$ auf ein anderes Koordinatensystem, das aus dem ursprünglichen bei festem w und fester Achse $z_2=z_3=\ldots=z_n=0$ durch eine homogene lineare Transformation hervorgeht, so müssen für dieses neue Koordinatensystem die gleichen Überlegungen wie oben gelten. Es existiert also wieder ein i_1, so daß der Schnitt der beiden Koordinatenebenen $w=0$ und $z'_{i_1}=0$ mit Singularitäten von $\mathfrak{F}$ bedeckt ist. Hieraus ergibt sich dann leicht, daß notwendig *jeder* Punkt auf $\mathfrak{M}$ wesentlich singulär ist, im Widerspruch zu unserer Annahme, daß in jeder Umgebung von Q auf $\mathfrak{M}$ algebraische Punkte von $\mathfrak{F}$ existieren sollen.

Hiermit ist die Übertragung des Satzes 2 auf n Veränderliche vollständig bewiesen.

Aus der Gültigkeit von Satz 2 können wir wie auf S. 149 mühelos auch auf die Gültigkeit des Hauptsatzes für beliebiges n schließen. Es ergibt sich also:

Hauptsatz. *Besitzt die in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ bis auf ein irreduzibles analytisches Flächenstück $\mathfrak{M}$ reguläre Funktion $f(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ $\mathfrak{M}$ als wesentliche Singularitätenmannigfaltigkeit, so erfüllen für allgemeines komplexes a die a-Stellen von f je ein analytisches Flächenstück $\mathfrak{F}_a$, das jeden Punkt auf $\mathfrak{M}$ als wesentliche Singularität besitzt. Es existiert höchstens ein a_0, so daß entweder das Gebilde $\mathfrak{F}_{a_0}$ sich in ganz $\mathfrak{B}$ mit Einschluß von $\mathfrak{M}$ algebraisch verhält oder aber $f(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ den Wert a_0 in $\mathfrak{B}$ überhaupt nicht annimmt.*

Existiert dieser Ausnahmewert a_0 und nimmt f den Wert a_0 in mindestens einem Punkte aus $\mathfrak{B}$ an, so wird die Fläche $\mathfrak{F}_{a_0}$ die Fläche $\mathfrak{M}$, falls überhaupt, in einer $(2n-4)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit schneiden, die sich auf $\mathfrak{M}$ ausnahmslos algebraisch verhält. In den Punkten dieser Mannigfaltigkeit wird f *keinen* Ausnahmewert besitzen, während f in einem allgemein gewählten Punkte auf $\mathfrak{M}$ den festen Ausnahmewert a_0 hat.

Wir können also insbesondere sagen: Besitzt f in einem Punkte auf $\mathfrak{M}$ einen Ausnahmewert a_0, so erfüllen die Punkte von $\mathfrak{M}$, in denen a_0 Aus-

nahmewert ist, entweder ganz $\mathfrak{M}$ oder ein auf $\mathfrak{M}$ algebraisches $(2n-4)$-*dimensionales* Gebilde.

Entsprechend wie auf S. 150 lautet wieder die Ausdehnung des Hauptsatzes auf meromorphe Funktionen von n Veränderlichen.

§ 5.

Ganze Funktionen und ganze Flächen.

Eine $(2n-2)$-dimensionale analytische Fläche, die mit dem Nullstellengebilde einer ganzen Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ identisch ist, wollen wir eine **ganze Fläche** nennen. Eine ganze Fläche verhält sich im *endlichen* Raume R_{2n} ausnahmslos algebraisch, und umgekehrt ist nach dem Cousinschen Satze eine überall im Endlichen algebraische Fläche eine ganze Fläche[23]). Eine ganze Fläche, die auch im Unendlichen keine wesentlichen Randpunkte besitzt, ist notwendig eine *algebraische* Fläche schlechthin[24]), d. h. eine Fläche, die durch eine algebraische Gleichung $F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$ gegeben ist (F ein Polynom in $z_1, z_2, \ldots, z_n$).

Eine ganze, nicht-algebraische Fläche wollen wir eine *ganze transzendente Fläche* nennen. Eine solche Fläche besitzt nach Definition auf der unendlichfernen analytischen Ebene[25]) mindestens einen wesentlichen Randpunkt. Aus Satz 2 ergibt sich dann unmittelbar:

Satz 4[26]). *Eine ganze transzendente Fläche besitzt jeden unendlichfernen Punkt als wesentlichen Randpunkt.*

Es können demnach nur zwei Fälle eintreten:

Entweder hat eine ganze Fläche $\mathfrak{F}$ mit der unendlichfernen Ebene eine $(2n-4)$-dimensionale algebraische Fläche gemeinsam (für $n=2$ nur *endlich* viele Punkte), ist dann also selbst eine algebraische und insbesondere *geschlossene* Fläche.

Oder aber $\mathfrak{F}$ ist eine *offene* Fläche, die *jeden* unendlichfernen Punkt als Grenz- und wesentlich singulären Punkt besitzt.

---

[23]) Vgl. Anm. [16]).

[24]) Vgl. die in Anm. [11]) zitierte Arbeit von Severi, S. 42.

[25]) Wir denken uns den R_{2n} komplex-projektiv abgeschlossen. Vgl. Severi loc. cit. und Behnke-Thullen, Bericht.

[26]) Satz 4 gilt nicht mehr bei beliebiger Abschließung des Raumes, so nicht mehr in dem von Osgood eingeführten „Raume der Funktionentheorie"; hier können wir behaupten, daß die gegebene transzendente Fläche mindestens *eine* der n unendlichfernen Ebenen als wesentliche Singularitätenfläche hat. Wohl gilt Satz 4 in allen Räumen, deren unendlichferne Punkte eine *irreduzible* analytische Mannigfaltigkeit bilden. Satz 4 enthält als unmittelbare Folgerung den bekannten Hurwitz-Weierstraßschen Satz, daß *eine im abgeschlossenen Raume meromorphe Funktion eine rationale ist* (siehe auch Severi, loc. cit. S. 41).

Als ein einfaches Beispiel des zweiten Typus sei die Fläche $w - e^z = 0$ genannt. Diese wird von einer Ebene $z = c$ in je einem Punkte, von einer Ebene $w = c$ in unendlich vielen Punkten geschnitten und schmiegt sich in der Richtung der w-Achse „oszillierend" der unendlichfernen Ebene an.

Satz 4 läßt sich auch ohne Umweg über Satz 2 beweisen. Da das Beweisverfahren des Satzes 2 sehr kompliziert ist, sei der direkte einfache Beweis angeführt.

Es genügt hierbei zu beweisen, daß eine ganze Fläche, die sich gegen mindestens einen unendlich fernen Punkt Q *nicht* häuft, eine algebraische Fläche ist.

Beweis[27]). Die n Veränderlichen bezeichnen wir mit $w, z_2, \ldots, z_n$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß Q der auf der Ebene $z_2 = z_3 = \ldots = z_n = 0$ gelegene unendlichferne Punkt ist.

Nach Voraussetzung existiert eine Umgebung $\mathfrak{U}(Q)$, in der kein Punkt von $\mathfrak{F}$ liegt. $\mathfrak{U}(Q)$ sei gegeben durch

$$(1) \qquad |w| > \varrho, \quad |w| > \varrho \cdot |z_i|, \quad i = 2, \ldots, n \qquad (\varrho > 1).$$

Ähnlich wie im Beweise von Satz 1 und 2 können wir wieder schließen, daß jede Ebene

$$z_2 = \zeta_2, \quad z_3 = \zeta_3, \ldots, z_n = \zeta_n$$

die Fläche $\mathfrak{F}$ in einer endlichen, von den ζ_i unabhängigen Anzahl m von Punkten trifft (jeder Punkt mit der ihm zugehörigen Multiplizität gezählt), und ferner, daß $\mathfrak{F}$ die Darstellung zuläßt:

$$R(w, z_2, \ldots, z_n) \equiv w^m + A_1(z_2, \ldots, z_n)\, w^{m-1} + \ldots + A_m(z_2, \ldots, z_n) = 0;$$

hierbei sind die A_k ganze Funktionen der z_i. Für die Wurzeln $w_\nu(\zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ von $R(w, \zeta_n, \ldots, \zeta_n) = 0$ gilt nach (1)

$$|w_\nu(\zeta_2, \ldots, \zeta_n)| \leqq \varrho \text{ oder } |w_\nu(\zeta_2, \ldots, \zeta_n)| \leqq \varrho \cdot \max_{i=2,\ldots,n} |\zeta_i|, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m.$$

Somit genügen ihre elementarsymmetrischen Funktionen

$$A_k(\zeta_2, \ldots, \zeta_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

(außerhalb des Polyzylinders $|\zeta_i| > 1$, $i = 2, \ldots, n$) Ungleichungen der Form

$$|A_k(\zeta_2, \ldots, \zeta_n)| \leqq m\, [\varrho \operatorname{Max} |\zeta_i|]^m.$$

Hieraus folgt, daß die A_k ganz rational sind, somit $R(w, z_2, \ldots, z_n)$ ein Polynom ist, w. z. b. w.

[27]) Vgl. auch Behnke-Thullen, Bericht, wo sich im Falle zweier Veränderlichen ein ähnlicher Beweis zu einem anderen Zwecke vorfindet.

War nun $G(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$ (G eine ganze Funktion) die ursprüngliche Darstellung der gegebenen Fläche $\mathfrak{F}$, so ist sicherlich G durch das Polynom R teilbar, d. h. es ist

$$\frac{G(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{R(z_1, z_2, \ldots, z_n)} \equiv \widetilde{G}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

wieder eine ganze Funktion, und zwar verschwindet $\widetilde{G}$ nirgends im abgeschlossenen R_{2n}.

Zusammenfassend können wir sagen:

Satz 5. *Ist $G(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ eine ganze Funktion, so ist für allgemeines a die ganze Fläche $G(z_1, z_2, \ldots, z_n) - a = 0$ transzendent und besitzt jeden unendlichfernen Punkt als wesentlichen Randpunkt. Es existiert höchstens ein a_0, so daß das Gebilde $G(z_1, z_2, \ldots, z_n) - a_0 = 0$ eine algebraische Fläche ist; es ist dann*

$$G(z_1, z_2, \ldots, z_n) \equiv e^{H(z_1, z_2, \ldots, z_n)} R(z_1, z_2, \ldots, z_n) + a_0,$$

wobei H eine geeignete ganze Funktion, R ein Polynom bedeutet.

(Eingegangen am 7. 12. 1934.)

Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen.

Konvexität in bezug auf analytische Ebenen im kleinen und großen.

Von

H. Behnke und E. Peschl in Münster (Westf.).

Den Untersuchungen über die analytischen Funktionen $f(w, z)$ der beiden komplexen Veränderlichen

$$w = u + iv \quad \text{und} \quad z = x + iy$$

wird jetzt allgemein der projektiv abgeschlossene Raum zu Grunde gelegt. Die dazu gehörige Gruppe besteht aus den linearen Transformationen

$$(1) \qquad \begin{cases} w' = \dfrac{a_{11}w + a_{12}z + a_{13}}{a_{31}w + a_{32}z + a_{33}} \\[2ex] z' = \dfrac{a_{21}w + a_{22}z + a_{23}}{a_{31}w + a_{32}z + a_{33}}, \quad |a_{ik}| \neq 0. \end{cases}$$

Die einzige Klasse linearer Gebilde, die invariant gegenüber der vollen Gruppe der Transformationen (1) ist, ist die Klasse der 2-dimensionalen analytischen Ebenen $\alpha w + \beta z + \gamma = 0$. Mit Bezug auf diese analytischen Ebenen gibt es eine Konvexität im kleinen und im großen.

Den schlichten Bereich $\mathfrak{B}$[1]) nennen wir *im kleinen planarkonvex*, wenn es durch jeden Randpunkt P von $\mathfrak{B}$ eine *analytische* Ebene gibt, die in einer Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ nicht in $\mathfrak{B}$ eindringt.

Der schlichte Bereich $\mathfrak{B}$ ist *im großen planarkonvex* oder schlechthin *planarkonvex*, wenn es durch jeden Randpunkt P von $\mathfrak{B}$ eine *analytische* Ebene (Stützebene) gibt, die nicht in $\mathfrak{B}$ eindringt. Zur Definition der *Planarkonvexität* (S. 162) benutzen wir eine andere Eigenschaft, die für schlichte Bereiche (nach Satz 2 und 3) mit der zuletzt genannten äquivalent ist.

Beide Arten von Konvexität werden in dieser Arbeit näher untersucht. Die Konvexität im großen hat die im kleinen unmittelbar zur Folge. Es

---

[1]) Unter „Bereich" ohne Zusatz sei immer ein offener vierdimensionaler Bereich verstanden. Siehe H. Behnke und P. Thullen: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Erg. d. Math. u. i. Grenzgebiete. Berlin (1934). Im folgenden abgekürzt: B.-Th.-Bericht. In der Begriffsbildung beziehen wir uns immer auf diesen Bericht.

wird gezeigt, daß auch das Umgekehrte bei dieser Art von Konvexität zutrifft. Das ist nicht selbstverständlich, sondern ist bei jeder Art von Konvexität gesondert zu prüfen.

So gilt dies sicher nicht in bezug auf Gerade im R_3. Es gibt Bereiche im R_3, die durch jeden Randpunkt eine den Bereich nicht treffende Stützstrecke aufweisen, aber trotzdem gewisse Randpunkte haben, durch die es keine Gerade gibt, die nirgends in $\mathfrak{B}$ eindringt. Ein Beispiel dafür bildet der Volltorus:

$$(\sqrt{x^2+y^2}-r)^2+z^2 < R^2, \quad r > R.$$

Sogar bei jener Art von Konvexität im (w, z)-Raum, welche mit *beliebigen* (also *auch nicht*analytischen) zweidimensionalen Stützebenen erklärt wird, ist der Schluß vom „Kleinen ins Große“ bereits *falsch*. So weist der Bereich

$$(|z|-r)^2+u^2 < R^2, \quad -1 < v < +1, \quad r > R$$

durch jeden seiner Randpunkte eine zweidimensionale Ebene auf, die in einer gewissen Umgebung Stützebene ist. Jedoch gibt es hier wieder gewisse Randpunkte, durch die *keine* Ebene E_2 läuft, die in ihrer gesamten Ausdehnung nirgends eindringt.

Daraus erkennen wir, daß in dem hier zu behandelnden Falle *der Schluß vom Kleinen ins Große* ganz wesentlich *vom analytischen Charakter der Ebenen abhängt*, auf welche die Konvexität bezogen wird.

Das ganz entsprechende Problem für Konvexität in bezug auf analytische Flächen (die sogenannte Pseudokonvexität) ist in der Literatur immer wieder beachtet, aber bis heute noch im allgemeinen Falle ungelöst[2]). Es ist dies die Frage, die sich an die Untersuchungen von E. E. Levi über den Rand von Regularitätsgebieten unmittelbar anschließt. E. E. Levi bewies, daß die „Pseudokonvexität im kleinen“ für den Rand von Regularitätsbereichen notwendig ist. Ist umgekehrt der Rand eines Bereiches $\mathfrak{B}$ überall pseudokonvex im kleinen, so ist bis heute die Frage noch nicht geklärt, ob — gewisse Differentiierbarkeitsbedingungen etwa noch vorausgesetzt — der Bereich dann auch Regularitätsbereich ist. Sie wäre sofort bejahend beantwortet, wenn die „Pseudokonvexität im großen“ aus der im kleinen folgte.

Zur Kenntnis der Planarkonvexität ist noch zu erwähnen:

1. Es gibt nichtplanarkonvexe Bereiche, bei denen es trotzdem durch **jeden** Randpunkt eine zweidimensionale Ebene gibt, die nirgends in $\mathfrak{B}$ eindringt. (Siehe S. 163.)

---

[2]) Vgl. B.-Th.-Bericht. Kap. IV. § 3 und neuerdings P. Thullen, Math. Annalen 110 (1934), S. 29—32.

2. Es gibt unendlich viele topologisch verschiedene Typen planarkonvexer Bereiche. (Es genügt, dazu Zylinderbereiche mit mehrfach zusammenhängender Projektion zu betrachten.)

3. Es gibt nichtschlichte planarkonvexe Bereiche. (Siehe S. 163.)

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut:

Im Abschnitt 1 wird nach einer vorbereitenden Behandlung von konvergenten Folgen analytischer Ebenen die *Planarkonvexität* von Bereichen eingeführt. Die Begriffsbildung ist nach einer Methode, die Henri Cartan[3]) angab, so gefaßt, daß sie auch bei nichtschlichten Bereichen verwandt werden kann. Sodann werden die sich unmittelbar ergebenden Eigenschaften der Planarkonvexität in bezug auf Durchschnitt und Stützebene aufgestellt.

Im Abschnitt 2 wird unter gewissen Differentiierbarkeitsvoraussetzungen gezeigt, daß bei den Reinhardtschen Körpern die Planarkonvexität die Konvexität im elementargeometrischen Sinne zur Folge hat.

Im Abschnitt 3 werden die Differentialungleichungen aufgestellt, die das planarkonvexe Verhalten im kleinen charakterisieren. Ist $\varphi(u, v, x, y) = 0$ der zweimal stetig differentiierbare Rand des Bereiches $\mathfrak{B}$, $\varphi < 0$ $\mathfrak{B}$ zugewandt, $L(\varphi)$ der Levische Ausdruck,

$$M(\varphi) = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi_w & \varphi_z \\ \varphi_w & \varphi_{ww} & \varphi_{wz} \\ \varphi_z & \varphi_{wz} & \varphi_{zz} \end{vmatrix}$$

und $N(\varphi) = L^2(\varphi) - |M(\varphi)|^2$ ein Ausdruck, dessen Vorzeichen invariant gegenüber projektiven Transformationen ist, gilt ferner in jedem Randpunkte von $\mathfrak{B}$ $L(\varphi) > 0$, $N(\varphi) > 0$, so ist $\mathfrak{B}$ planarkonvex im kleinen. Ist umgekehrt die Planarkonvexität im kleinen von $\mathfrak{B}$ vorausgesetzt, so gilt — bei Annahme genügender Differentiierbarkeit — $L(\varphi) \geqq 0$, $N(\varphi) \geqq 0$.

Im Abschnitt 4 wird gezeigt, daß *aus der Planarkonvexität im kleinen die im großen folgt*. Insbesondere wird bewiesen:

Der schlichte Bereich $\mathfrak{B}$ sei von einer überall zweimal stetig differentiierbaren Hyperfläche $\varphi = 0$ mit lauter gewöhnlichen Stellen berandet. ($\varphi < 0$ *sei $\mathfrak{B}$ zugewandt.*) *In jedem Punkte des Randes sei $L(\varphi) > 0$, $N(\varphi) > 0$. Dann schneidet eine analytische Ebene $\mathfrak{B}$ in höchstens einem Gebiete, und durch jeden Randpunkt von $\mathfrak{B}$ gibt es eine analytische Stützebene.* (*$\mathfrak{B}$ ist dann also auch Regularitätsbereich.*)

Im Abschnitt 5 wird von den *Hyperebenen* ausgegangen. Sie bilden keine Klasse projektiv invarianter Gebilde. Die zugehörige Klasse ist die Klasse der „*Projektivebenen*". Diese werden dann durch Gleichungen

---

[3]) H. Cartan, Sur les domaines d'existence des fonctions de plusieurs variables complexes. Bull. Soc. Math. France 59 (1931).

charakterisiert. Die Grenzgebilde von Folgen von Projektivebenen werden untersucht.

Abschnitt 6. Es liegt nahe, die Konvexität von Bereichen in bezug auf Projektivebenen einzuführen. Diese Konvexität fällt bei schlichten Bereichen mit der Planarkonvexität zusammen. Da die Konvexität in bezug auf Geraden und projektive Bilder im abgeschlossenen (w, z)-Raum inhaltsleer ist — jeder Bereich wäre sonst konvex — folgt, daß im wesentlichen die einzige Konvexität in bezug auf lineare Gebilde und ihre projektiven Bilder im schlichten, abgeschlossenen (w, z)-Raum die Planarkonvexität ist.

Inhaltsverzeichnis.

§ 1.

Planarkonvexität.

Die zweidimensionale Ebene, die durch die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}u + a_{14}v &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}u + a_{24}v &= 0 \end{aligned}$$

angegeben wird, heißt eine **analytische Ebene**, wenn sich die beiden Gleichungen (1) zu

$$(2)\qquad \alpha w + \beta z + \gamma = 0$$

zusammenfassen lassen. Weiter wird noch die Gesamtheit der unendlich fernen Punkte als die unendlich ferne Ebene zu den analytischen Ebenen gerechnet.

Bei projektiven Transformationen wird eine analytische Ebene wieder in eine solche transformiert.

Später werden wir Folgen von analytischen Ebenen benötigen. Deshalb definieren wir zunächst: *Eine Folge von Punktmengen $\mathfrak{P}_n$ konvergiert gegen eine Punktmenge $\mathfrak{M}$ (genannt das Grenzgebilde der $\mathfrak{P}_n$),* wenn jeder Punkt P_0 von $\mathfrak{M}$ Konvergenzpunkt von Folgen P_n auf $\mathfrak{P}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, ist und keine weiteren Punkte als Häufungspunkte dieser Folgen auftreten.

Hat also $\mathfrak{M}$ keinen gemeinsamen Punkt mit einem abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{B}$, so gilt gleiches auch für $\mathfrak{P}_n$, $n > n_0$.

Konvergente Folgen analytischer Ebenen $\mathfrak{E}_n$ weisen als Grenzgebilde wieder nur analytische Ebenen auf.

Zum Beweise beachten wir zunächst, daß bei einer Folge $\mathfrak{E}_n$:

(3) $\alpha_n w + \beta_n z + \gamma_n = 0, \; |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 + |\gamma_n|^2 = 1; \;\; \gamma_n$ reell

mit

(4) $\lim \alpha_n = \alpha_0, \; \lim \beta_n = \beta_0, \; \lim \gamma_n = \gamma_0,$

die analytische Ebene $\mathfrak{E}_0$:

$$\alpha_0 w + \beta_0 z + \gamma_0 = 0,$$

falls mindestens α_0 oder $\beta_0 \neq 0$ (und im andern Falle die unendlich ferne Ebene), das Grenzgebilde der $\mathfrak{E}_n$ ist. Wegen der Stetigkeit der linken Seite von (3) in allen vorkommenden Größen können nur Punkte von $\mathfrak{E}_0$ Häufungspunkte von Folgen P_n auf $\mathfrak{E}_n$ sein. Andererseits ist zu jedem Punkte auf $\mathfrak{E}_0$ leicht eine Folge gegen diesen Punkt konvergierender P_n auf $\mathfrak{E}_n$ angebbar.

Wären nun bei einer konvergenten Folge $\mathfrak{E}_n$, die den Gleichungen

$$\alpha_n w + \beta_n z + \gamma_n = 0, \quad |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 + |\gamma_n|^2 = 1; \quad \gamma_n \text{ reell},$$

genügt, die Folgen der Koeffizienten α_n, β_n und γ_n nicht ihrerseits konvergent, so gäbe es unter den $\mathfrak{E}_n$ mindestens zwei Teilfolgen, die gegen verschiedene Ebenen konvergierten, was der Konvergenz der $\mathfrak{E}_n$ widerspricht. Bei konvergenten Folgen $\mathfrak{E}_n$ sind also die Gleichungen (4) immer erfüllt. Das Grenzgebilde ist stets eine analytische Ebene.

Diesem Satze fügen wir ergänzend hinzu:

Jede Folge analytischer Ebenen weist mindestens eine konvergente Teilfolge auf.

Dieses folgt nach dem Obigen einfach aus der Tatsache, daß in jeder Folge $\mathfrak{E}_n$

$$\alpha_n w + \beta_n z + \gamma_n = 0; \quad |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 + |\gamma_n|^2 = 1,$$

eine Teilfolge vorhanden ist, in der die α_n, β_n und γ_n konvergieren. Sind α_0, β_0, γ_0 die Grenzwerte der Koeffizienten, so ist

$$\alpha_0 w + \beta_0 z + \gamma_0 = 0$$

(bzw. falls $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ die unendlich ferne Ebene) die Grenzebene der herausgewählten Teilfolge.

Jede Folge analytischer Ebenen, deren konvergente Teilfolgen alle dasselbe Grenzgebilde aufweisen, ist selbst konvergent.

Definition der Planarkonvexität von (schlichten und nichtschlichten) vierdimensionalen Bereichen über dem abgeschlossenen (w, z)-Raum.

$\mathfrak{B}$ heißt planarkonvex, *wenn es zu jedem Bereiche $\mathfrak{B}_0 \ll \mathfrak{B}$ einen Bereich $\mathfrak{B}^*$ gibt, $\mathfrak{B}_0 < \mathfrak{B}^* \ll \mathfrak{B}$, so daß durch jeden Punkt P in $\mathfrak{B}$, aber außerhalb $\mathfrak{B}^*$, eine analytische Ebene läuft, die nicht in $\mathfrak{B}_0$ eindringt — genauer: eine analytische Ebene läuft, auf der man P innerhalb $\mathfrak{B}$ mit keinem Punkt von $\mathfrak{B}_0$ verbinden kann.*

Als Beispiel planarkonvexer Bereiche seien die schlichten, wie auch nichtschlichten Zylinderbereiche erwähnt. Andererseits möge als Regularitätsbereich, der nicht planarkonvex ist, erwähnt sein

$$\mathfrak{R}: \ |w|\cdot|z| < 1.$$

Im Punkte (1, 1) weist $\mathfrak{R}$ als analytische Tangente $\mathfrak{T}$ auf:

$$(w-1)+(z-1)=0.$$

$\mathfrak{T}$ dringt in $\mathfrak{R}$ ein. Bei allen anderen analytischen Ebenen durch (1, 1) ist von vornherein klar, daß sie in $\mathfrak{R}$ eindringen. Im Punkte (1, 1) weist also $\mathfrak{R}$ keine Stützebene auf. Wir werden aber gleich (Satz 2) sehen, daß dies der Planarkonvexität widerspricht.

Auch gibt es nichtplanarkonvexe Bereiche, bei denen trotzdem durch jeden Randpunkt eine zweidimensionale (natürlich nicht immer analytische) Stützebene existiert. Zur Konstruktion eines solchen Bereiches gehen wir von einem Zylinderbereiche $\mathfrak{Z}$ aus, dessen Projektion in der w-Ebene nicht konvex ist. P sei ein Punkt auf dem Rande dieser Projektion, durch den es keine Stützgerade gibt. R sei ein nicht auf der Kante des Zylinderbereiches liegender Randpunkt mit P als Projektion in der w-Ebene. Jede zweidimensionale Ebene durch R bis auf die analytische Tangentialebene dringt in $\mathfrak{Z}$ ein. $\mathfrak{B}$ sei nun der Bereich, der aus $\mathfrak{Z}$ durch eine geeignete nichtanalytische Drehung hervorgeht. Durch den Bildpunkt R^* von R gibt es dann keine analytische Stützebene.

Aus der Definition folgt unmittelbar:

Satz 1. *Ein Bereich, der Durchschnitt von endlich oder unendlich vielen planarkonvexen Bereichen ist, ist wieder planarkonvex*[4]).

Ist ein Bereich schlicht, so können wir von seinem Äußern sprechen und damit die Planarkonvexität bequem fassen.

Satz 2. *Durch jeden Randpunkt P eines schlichten, planarkonvexen Bereiches gibt es eine analytische Ebene, die überhaupt keine Punkte mit dem offenen Bereich gemein hat.*

Eine solche analytische Ebene durch den Randpunkt P nennen wir eine Stützebene von P.

Aus Satz 2. folgt[4a]): *Jeder schlichte planarkonvexe Bereich ist Regularitätsbereich.*

Zum Beweise von Satz 2. sei $\mathfrak{B}_0^{(\nu)}$ eine Folge ganz in $\mathfrak{B}$ gelegener (schlichter) Bereiche, so daß $\mathfrak{B}_0^{(\nu)} < \mathfrak{B}_0^{(\nu+1)}$ und $\lim \mathfrak{B}_0^{(\nu)} = \mathfrak{B}$. Wir konstruieren zu den $\mathfrak{B}_0^{(\nu)}$ jeweils Bereiche $\mathfrak{B}_*^{(\nu)}$ von der in der Definition der Planarkonvexität erwähnten Eigenschaft. Ferner wählen wir eine Folge von Punkten P aus, die 1. gegen P konvergieren, und 2. von denen $P^{(\nu)}$ immer außerhalb $\mathfrak{B}_*^{(\nu)}$ liegt. Durch $P^{(\nu)}$ gibt es eine analytische Ebene, die $\mathfrak{B}_0^{(\nu)}$ nicht trifft. Die Folge dieser Ebenen weist eine Teilfolge auf,

[4]) Über den Begriff des Durchschnittes nichtschlichter Bereiche siehe B.-Th.-Bericht. Kap. 1.

[4a]) Siehe H. Behnke, Natürliche Grenzen. Hamburg. Abhandl. 5 (1927), S. 292.

die gegen eine Ebene $\mathfrak{E}_0$ konvergiert. $\mathfrak{E}_0$ läuft durch P und bleibt außerhalb aller $\mathfrak{B}_*^{(\nu)}$, also außerhalb $\mathfrak{B}$.

Es gilt die Umkehrung:

Satz 3. *Gibt es durch jeden Randpunkt eines schlichten Bereiches eine analytische Ebene, die nirgends eindringt, so ist der Bereich planarkonvex.*

In der Tat, wäre $\mathfrak{B}$ nicht planarkonvex, so gäbe es mindestens einen Bereich $\mathfrak{B}_0 \ll \mathfrak{B}$, zu dem es kein $\mathfrak{B}^*$ (mit der bewußten Eigenschaft) gäbe. In beliebiger Nähe des Randes von $\mathfrak{B}$ würde es Punkte T geben, so daß alle analytischen Ebenen durch T innere Punkte von $\mathfrak{B}_0$ aufwiesen. Unter diesen T greifen wir eine gegen einen Randpunkt R_0 konvergierende Folge $T_1, T_2, \ldots$ heraus. Durch R gibt es aber nach Voraussetzung eine Stützebene. Wir denken uns diese jetzt in die unendlich ferne Ebene transformiert. Dann ist $\mathfrak{B}_0$ notwendig ein beschränkter Bereich. Also gibt es doch durch die T_i für $i > i_0$ Ebenen, die nicht in $\mathfrak{B}_0$ eindringen, entgegen der Annahme.

Aus Satz 3. folgt weiter:

Satz 4. *Gibt es durch jeden Punkt außerhalb des schlichten Bereiches $\mathfrak{B}$ eine analytische Ebene, die nicht in $\mathfrak{B}$ eindringt, und ist jeder Randpunkt R von $\mathfrak{B}$ Häufungspunkt äußerer Punkte, so ist $\mathfrak{B}$ planarkonvex.*

Sind nämlich die R_i Punkte außerhalb von $\mathfrak{B}$ mit $\lim R_i = R$, so gibt es in der Folge $\mathfrak{E}_i$ durch R_i laufender analytischer Ebenen, die nicht in $\mathfrak{B}$ eindringen, eine konvergente Teilfolge. Das Grenzgebilde ist eine analytische durch R laufende Ebene, die nicht in $\mathfrak{B}$ eindringt. Die Voraussetzungen des Satzes 3. sind erfüllt, woraus dann die Behauptung folgt.

Die Aussage des Satzes 4. ist falsch, wenn die Voraussetzung über die Randpunkte fallen gelassen wird. Beispiel: Die im Nullpunkt punktierte Hyperkugel.

Satz 3. gestattet auch, einen Bereich anzugeben, der zwar planarkonvex, nicht aber konvex im elementaren Sinne ist. Man wähle den Zylinderbereich $\mathfrak{Z}$, der festgelegt ist durch: w im Einheitskreise, z in einem nichtkonvexen Bereich $\mathfrak{b}_0$. Durch jeden Randpunkt von $\mathfrak{Z}$ geht eine analytische Ebene, die nicht in $\mathfrak{Z}$ eindringt, so daß nach Satz 3. $\mathfrak{Z}$ planarkonvex ist, während es Gerade gibt, die $\mathfrak{Z}$ mehrmals schneiden.

§ 2.

Planarkonvexität und Reinhardtsche Körper.

Die Planarkonvexität von Reinhardtschen Körpern läßt sich auf einfache Bedingungen zurückführen. Wir beweisen:

Satz 5. *Ist ein Reinhardtscher Körper $\mathfrak{R}$ planarkonvex, so ist der Bereich $\overline{\mathfrak{R}}$, der von seiner Projektion in der Viertelsebene von $|w|$ und $|z|$ (absolute Ebene genannt) gebildet wird, konvex.*

Zum Beweise beachten wir zunächst: Die Projektion einer analytischen Ebene $\alpha w + \beta z + \gamma = 0$ auf die absolute Ebene bildet — abgesehen von den gleich zu erwähnenden Ausnahmefällen — einen Halbstreifen, der begrenzt wird von den Halbgeraden

$$|\alpha| \cdot |w| - |\beta| \cdot |z| + |\gamma| = 0$$

und

$$|\alpha|\,|w| - |\beta| \cdot |z| - |\gamma| = 0$$

und der Strecke S

$$|\alpha| \cdot |w| + |\beta| \cdot |z| - |\gamma| = 0.$$

Bei den Halbgeraden ist der Tangens des Richtungswinkels positiv, bei der Strecke S negativ. Im Ausnahmefalle, in dem mindestens einer der Koeffizienten gleich null ist, tritt statt des Halbstreifens eine zu einer Achse parallele oder durch den Nullpunkt laufende Gerade auf.

Es ist nun selbstverständlich, daß dann (und nur dann) eine analytische Ebene $\mathfrak{E}$ mit einem Reinhardtschen Körper $\mathfrak{R}$ Punkte gemein hat, wenn dieses für die Projektion von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{R}$ gilt. Wenn nun $\mathfrak{R}$ im Randpunkt P eine Stützebene $\mathfrak{E}_0$ aufweist, so muß durch die Projektion $\overline{P}$ von P auf dem Rande von $\overline{\mathfrak{R}}$ eine der drei Begrenzungsgeraden der Projektion von $\mathfrak{E}_0$ laufen, die nirgends $\overline{\mathfrak{R}}$ schneidet, und daher Stützgerade in $\overline{P}$ an $\overline{\mathfrak{R}}$ ist.

Folgerung: *Ein planarkonvexer Reinhardtscher Körper $\mathfrak{R}$ mit stetig differentiierbarem Rande $\varphi(u^2 + v^2, x^2 + y^2) = 0$ (wobei von φ die vier ersten Ableitungen in keinem Randpunkte zugleich verschwinden sollen) hat einen seiner drei Fixpunkte* (0, 0), (0, ∞) *oder* (∞, 0) *im Innern, während die beiden anderen stets draußen liegen.*

Ein wichtiger Sonderfall dieser Aussage ist:

Ein endlicher, nichteigentlicher Reinhardtscher Körper (der den obigen Differentiierbarkeitsbedingungen genügt) kann niemals planarkonvex sein.

Zum Beweis der Folgerung bemerken wir zunächst, daß wegen der Differentiierbarkeit ein Punkt auf den Achsen nur dann Randpunkt von $\mathfrak{R}$ sein kann, wenn die Begrenzung der Projektion $\overline{\mathfrak{R}}$ dort senkrecht auf der Achse steht. Ferner kann keiner der drei Fixpunkte Randpunkt von $\mathfrak{R}$ sein, weil sonst in diesem Fixpunkte keine eindeutig bestimmte Tangentialhyperebene vorhanden wäre.

Wir unterscheiden jetzt verschiedene Fälle:

1. Der abgeschlossene Reinhardtsche Körper $\mathfrak{R}^*$ enthalte keinen Punkt der drei Achsen. In diesem Falle treten unter den Tangenten an $\overline{\mathfrak{R}}$ notwendig solche auf, bei denen der Richtungstangens negativ ist

und zugleich in der absoluten Ebene der Nullpunkt durch die Tangente von $\overline{\mathfrak{R}}$ getrennt wird. $\overline{T}_0$ sei eine solche Tangente im Punke $\overline{P}_0$. P_0 sei ein Punkt des Randes von $\mathfrak{R}$ mit $\overline{P}_0$ als Projektion. Die Projektion der Stützebene $\mathfrak{E}_0$ in P_0 bildet einen Halbstreifen, zu dessen Begrenzung (als Strecke) $\overline{T}_0$ gehört. Der Halbstreifen liegt auf derselben Seite von $\overline{T}_0$ wie $\overline{\mathfrak{R}}$. Also liegen Punkte von $\overline{\mathfrak{R}}$ im Halbstreifen. $\mathfrak{E}_0$ dringt in $\mathfrak{R}$ ein. $\mathfrak{R}$ kann nicht planarkonvex sein.

2. $\mathfrak{R}^*$ enthalte keinen seiner Fixpunkte, wohl aber mindestens einen Punkt auf einer Achse. Wie unter 1. schließen wir, daß $\mathfrak{R}$ nicht planarkonvex sein kann.

3. Der Nullpunkt ist innerer Punkt von $\mathfrak{R}$. Wegen unserer Voraussetzungen fallen die trivialen Fälle des offenen und abgeschlossenen Raumes heraus. Dann aber gibt es im Endlichen stets einen Randpunkt P, durch den es eine analytische Stützebene gibt. Dies hat in der Projektion zur Folge, daß durch $\overline{P}$ eine Gerade läuft mit einem Richtungswinkel φ, $\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \pi$, die $\overline{\mathfrak{R}}$ ganz auf einer ihrer Seiten läßt. Nur in den Grenzfällen $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \pi$ könnten noch unbeschränkte Bereiche auftreten. Sie fallen ihrerseits aus, weil sie notwendig im Unendlichen die Differentiierbarkeitsbedingungen verletzen. So bleiben nur noch eigentliche, beschränkte Reinhardtsche Körper übrig, w. z. b. w.

Schließlich können wir noch beweisen:

Satz 6. *Ist ein Reinhardtscher Körper mit einmal stetig differentiierbarem Rande $\Phi(r_1, r_2) = 0$ planarkonvex, so ist er im elementargeometrischen Sinne ein konvexer Bereich.* $(r_1 = |w|, r_2 = |z|)$.

Zum Beweis beachtet man zunächst, daß eine Hyperebene

$$au + bv + cx + dy + f = 0 \qquad a, b, \ldots \text{ reell}$$

sich zusammensetzt aus der einparametrigen Schar analytischer Ebenen

$$(a - ib)w + (c - id)z + f + it = 0 \qquad -\infty < t < \infty.$$

Die einzelne dieser analytischen Ebenen weist als Projektion in der $|w|$, $|z|$-Viertelsebene den Halbstreifen

$$(5) \qquad \begin{cases} |a - ib|\,|w| - |c - id|\,|z| + |f + it| \geqq 0 \\ |a - ib|\,|w| - |c - id|\,|z| - |f - it| \leqq 0 \\ |a - ib|\,|w| + |c - id|\,|z| - |f - it| \geqq 0 \end{cases}$$

auf. Die Gesamtheit dieser Halbstreifen bedeckt alle Punkte der Viertelsebene, für die

$$|a - ib|\,|w| + |c - id|\,|z| - |f| \geqq 0$$

ist. Die Hypertangente im Punkte w_0, z_0 genügt der Gleichung

$$(6) \quad \frac{\partial\Phi}{\partial r_1}\bigg|_0 \frac{u_0(u - u_0)}{r_1^0} + \frac{\partial\Phi}{\partial r_1}\bigg|_0 \frac{v_0(v - v_0)}{r_1^0} + \frac{\partial\Phi}{\partial r_2}\bigg|_0 \frac{x_0(x - x_0)}{r_2^0} + \frac{\partial\Phi}{\partial r_2}\bigg|_0 \frac{y_0(y - y_0)}{r_2^0} = 0,$$

und die analytische Tangente der Gleichung:

(7) $$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial r_1}\right|_0 \frac{\overline{w}_0}{r_1^0}(w - w_0) + \left.\frac{\partial \Phi}{\partial r_2}\right|_0 \frac{\overline{z}_0}{r_2^0}(z - z_0) = 0, \quad r_1 = |w|;\ r_2 = |z|.$$

Wegen der in Satz 5 bewiesenen Konvexität von $\overline{\mathfrak{R}}$ liegt die Projektion des Berührungspunktes (w_0, z_0) für $w_0, z_0 \neq 0$ immer auf der Strecke S des Halbstreifens, der von der Projektion von (7) gebildet wird. Da ferner das konstante Glied in (7) reell ist, wird die Projektion von (6) gebildet von den Punkten der $|w|, |z|$-Viertelsebene, die auf der anderen Seite wie der Nullpunkt von der Strecke S (der Projektion von (7)) liegt. Wegen der Planarkonvexität des vorgegebenen Reinhardtschen Körpers liegt dieser aber gerade auf der anderen Seite der Strecke S. Die Hyperebene (6) dringt also nicht in den Reinhardtschen Körper ein. Dieser weist also in allen seinen Randpunkten eine Stützhyperebene auf. Daraus folgt unsere Behauptung.

§ 3.
Planarkonvexität im kleinen von Hyperflächen.

Aus Satz 2. ergab sich schon, daß die Planarkonvexität eines Bereiches ein besonderes Verhalten seines Randes gegenüber analytischen Ebenen nach sich zieht. Es geht durch jeden Randpunkt eine Stützebene.

Wird nun durch eine Gleichung

(1) $$\varphi(u, v, x, y) = 0$$

ein zweimal stetig differentiierbares Hyperflächenstück $\mathfrak{f}$ mit lauter gewöhnlichen Punkten[5]) charakterisiert, das zum Rande eines planarkonvexen Bereiches gehört, so genügt φ zweien voneinander unabhängigen Differentialungleichungen, von denen die eine uns als Levische Differentialungleichung bekannt ist, während wir die andere im folgenden aufzustellen haben.

Wir entwickeln — nötigenfalls nach einer ganzen linearen analytischen Transformation — in einer vierdimensionalen Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ des Punktes P von $\mathfrak{f}$ folgendermaßen:

(2) $$\varphi(u, v, x, y) \equiv x + Q_1(u, v, y) + R(u, v, y).$$

Q_1 ist eine quadratische Form ihrer drei Veränderlichen, R das Restglied. Diejenigen Glieder von Q, in denen y nicht vorkommt, seien

(3) $$a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2.$$

$\varphi < 0$ gebe die dem Bereich zugekehrte Seite von $\mathfrak{f}$ an. Wir benötigen jetzt den

Hilfssatz 1. *Jede analytische Ebene $\mathfrak{E}$ durch einen gewöhnlichen Punkt P eines zweimal stetig differentiierbaren Hyperflächenstückes $\mathfrak{f}$, die*

[5]) Siehe B.-Th.-Bericht, S. 21.

dort nicht mit der analytischen Tangente zusammenfällt, schneidet $\mathfrak{f}$ *in einer genügend kleinen Umgebung von* P *in einem doppelpunktfreien, dort differentiierbaren Kurvenstück.*

$\mathfrak{E}$ ist unter unseren Voraussetzungen angebbar durch

$$w = \alpha z.$$

Für die Punkte von $\mathfrak{f}$ auf $\mathfrak{E}$ — soweit sie innerhalb $\mathfrak{U}(P)$ liegen — gilt $\varphi(\Re(\alpha z), \Im(\alpha z), x, y) \equiv x +$ quadratischer Ausdruck in $x, y + \ldots = 0$.

Auf Grund dieses Hilfssatzes fällt die durch den obigen Punkt P auf $\mathfrak{f}$ gehende Stützebene an $\mathfrak{B}$ notwendig mit der analytischen Tangente, das ist hier $z = 0$, zusammen. Folglich muß

$$\varphi(u, v, 0, 0) \geqq 0$$

für alle Punkte $(w, 0)$ aus einer Umgebung von P sein. Also ist die quadratische Form (3) positiv definit.

$$a_{11} \geqq 0, \qquad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geqq 0.$$

Diesen Ungleichungen gleichberechtigt sind

$$(4) \qquad a_{11} + a_{22} \geqq 0, \qquad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geqq 0.$$

Wird umgekehrt vorausgesetzt, daß für die quadratische Form (3) gilt:

$$(5) \qquad a_{11} + a_{22} > 0, \qquad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0,$$

so folgt, daß in $\mathfrak{U}(P)$ für alle Punkte der analytischen Tangente $\varphi \geqq 0$ ist.

Nunmehr haben wir die Ungleichungen in invarianter Form zu schreiben.

Dazu benutzen wir:

1. Den Levischen Differentialausdruck[6])

$$L(\varphi) = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi_w & \varphi_z \\ \varphi_{\bar w} & \varphi_{w\bar w} & \varphi_{z\bar w} \\ \varphi_{\bar z} & \varphi_{w\bar z} & \varphi_{z\bar z} \end{vmatrix},$$

2.

$$M(\varphi) = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi_w & \varphi_z \\ \varphi_w & \varphi_{ww} & \varphi_{wz} \\ \varphi_z & \varphi_{wz} & \varphi_{zz} \end{vmatrix},$$

3. $$N(\varphi) = L^2(\varphi) - |M(\varphi)|^2.$$

Bei jeder Transformation $w = f(W, Z)$, $z = g(W, Z)$, $\frac{D(f, g)}{D(W, Z)} \neq 0$, die regulär in einer Umgebung von $\varphi = 0$ ist, gilt

$$L(\Phi) = L(\varphi)\left|\frac{D(f, g)}{D(W, Z)}\right|^2,$$

wenn $\Phi(U, V, X, Y)$ der durch die Transformation aus φ gewonnene Ausdruck ist[6]).

[6]) B.-Th.-Bericht, Kap. II, § 3.

Bei projektiven Transformationen gilt für $M(\varphi)$ eine ähnliche Transformationsformel. Zunächst bestätigt man nämlich durch elementare Rechnung, daß bei einer Abbildung

$$(6)\qquad \begin{aligned} w &= b_{11}W + b_{12}Z + b_{13},\\ z &= b_{21}W + b_{22}Z + b_{23}, \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix} \neq 0,$$

welche $\varphi(u, v, x, y) = 0$ in $\Phi(U, V, X, Y) = 0$ überführt,

$$M(\Phi) = M(\varphi)\,\Delta^2$$

ist.

Weiterhin gilt in bezug auf die Transformation

$$(7)\qquad w = \frac{1}{W},\quad z = \frac{Z}{W}$$

gleichfalls

$$M(\Phi) = M(\varphi)\,\Delta^2.$$

Nun aber läßt sich jede projektive Transformation

$$\begin{aligned} w &= P_1(W, Z),\\ z &= P_2(W, Z) \end{aligned}$$

aus Transformationen der Form (6) und (7) zusammensetzen.

Infolgedessen gilt in bezug auf jede projektive Transformation

$$M(\Phi) = M(\varphi)\,\Delta^2$$

und damit auch

$$N(\Phi) = N(\varphi)\cdot|\Delta|^2.$$

Das Vorzeichen von $N(\varphi)$ ist also invariant gegenüber projektiven Transformationen.

Weist φ die Normalform (2) auf, so ist im Normierungspunkte

$$\begin{aligned} L(\varphi) &= \tfrac{1}{8}(a_{11} + a_{22}),\\ M(\varphi) &= \tfrac{1}{8}(a_{11} - a_{22} - 2i\,a_{12}), \end{aligned}$$

also

$$N(\varphi) = \tfrac{1}{16}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2).$$

Wir greifen jetzt auf die Ungleichungen (4) und (5) zurück. Wenn folglich auch nur in einer Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ für die Punkte der analytischen Tangente in P an die zweimal stetig differentiierbare Hyperfläche $\varphi = 0$ gilt $\varphi \geqq 0$, so ist in P

$$L(\varphi) \geqq 0,\quad N(\varphi) \geqq 0.$$

Und umgekehrt, wenn

$$L(\varphi) > 0,\quad N(\varphi) > 0$$

im gewöhnlichen Punkte P der zweimal stetig differentiierbaren Hyperfläche $\mathfrak{f}$, so folgt, daß in einem $\mathfrak{U}(P)$ für alle Punkte der analytischen Tangente $\varphi \geqq 0$ ist.

Wenn nun die analytische Tangente in jedem Punkte von $\varphi = 0$ die Eigenschaft hat, daß in einer Umgebung des Berührungspunktes sie

ganz auf der Seite $\varphi \geqq 0$ verläuft, so sagen wir fernerhin: Die Hyperfläche $\varphi = 0$ ist *im kleinen planarkonvex* von der Seite $\varphi > 0$:

Jetzt können wir formulieren:

Satz 7. *Ist die zweimal stetig differentiierbare Hyperfläche $\varphi = 0$ im kleinen planarkonvex von der Seite $\varphi > 0$, so ist in jedem gewöhnlichen Punkte der Hyperfläche*

$$L(\varphi) \geqq 0, \quad N(\varphi) \geqq 0$$

Satz 8. *Gilt für jeden Punkt der zweimal stetig differentiierbaren Hyperfläche $\varphi = 0$:*

$$L(\varphi) > 0, \quad N(\varphi) > 0,$$

so ist $\varphi = 0$ planarkonvex im kleinen von der Seite $\varphi > 0$.

Wir sagen nun ganz entsprechend: Der Bereich $\mathfrak{B}$ ist **im kleinen planarkonvex**, wenn es durch jeden Randpunkt P von $\mathfrak{B}$ mindestens eine analytische Ebene gibt, die innerhalb einer genügend kleinen Umgebung von P nicht in $\mathfrak{B}$ eindringt.

Aus den Sätzen 2. und 7. folgt jetzt:

Satz 7a. *Gehört zur Begrenzung des planarkonvexen Bereiches $\mathfrak{B}$ die Hyperfläche $\mathfrak{f}$, die der Gleichung $\varphi = 0$ genügt, wobei φ auf $\mathfrak{f}$ zweimal stetig differentiierbar und $\varphi < 0$ $\mathfrak{B}$ zugewandt sei, so ist auf $\mathfrak{f}$*

$$L(\varphi) \geqq 0, \quad N(\varphi) \geqq 0.$$

Die Umkehrung dieses Satzes macht den Hauptsatz des folgenden Abschnittes aus.

§4.

Planarkonvexität im kleinen und großen.

Hauptsatz: *Der schlichte Bereich $\mathfrak{B}$ sei von einer überall zweimal stetig differentiierbaren Hyperfläche $\varphi(u, v, x, y) = 0$ mit lauter gewöhnlichen Stellen berandet. $\varphi < 0$ sei $\mathfrak{B}$ zugewandt. Ferner sei in jedem Punkte der Hyperfläche*

$$L(\varphi) > 0, \quad N(\varphi) > 0.$$

Dann schneidet jede analytische Ebene $\mathfrak{B}$ in höchstens einem Gebiete, und durch jeden Randpunkt von $\mathfrak{B}$ gibt es genau eine analytische Stützebene.

Insbesondere ist $\mathfrak{B}$ dann also planarkonvex (im großen).

Darüber hinaus beweisen wir:

Der schlichte Bereich $\mathfrak{B}$ sei von einer überall zweimal stetig differentiierbaren Hyperfläche mit lauter gewöhnlichen Stellen berandet. Durch jeden Randpunkt R gebe es eine analytische Ebene, die in einer Umgebung $\mathfrak{U}(R)$ nicht in $\mathfrak{B}$ eindringt. ($\mathfrak{B}$ sei „planarkonvex im kleinen".) Dann schneidet jede analytische Ebene in höchstens einem Gebiete, und durch jeden Randpunkt von $\mathfrak{B}$ gibt es genau eine analytische Stützebene.

Zum Beweise nehmen wir an, es gäbe eine Ebene $\mathfrak{E}_0$, die $\mathfrak{B}$ in zwei getrennten Bereichen $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ schneidet. P_1 liege in $\mathfrak{b}_1$, P_2 in $\mathfrak{b}_2$. Es gibt in $\mathfrak{B}$ ein Jordansches Kurvenstück $\mathfrak{J}$, das von P_1 nach P_2 läuft. $\mathfrak{J}$ habe die Darstellung

$$x(t), y(t), u(t), v(t) \quad 0 \leqq t \leqq 1.$$

Zu jedem Punkte von $\mathfrak{J}$ gibt es genau eine analytische Ebene $\mathfrak{E}(t)$, die durch ihn und P_2 läuft. Bei kleinem t schneidet $\mathfrak{E}(t)$ sicher den Bereich $\mathfrak{B}$ so, daß $P(t)$ und P_2 innerhalb $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{E}(t)$ nicht verbindbar sind. Anderseits sind bei genügend großem t sicher die Punkte $P(t)$ und P_2 in dieser Art verbindbar. Es gibt ein größtes t_0, so daß auf $\mathfrak{E}(t_0)$ letzteres noch nicht gilt. $\mathfrak{E}(t_0)$ schneidet mindestens einen Bereich $\mathfrak{b}_0$ mit $P(t_0)$ und einen andern Bereich $\mathfrak{b}_1$ mit P_2 heraus. Hätten $\mathfrak{b}_0$ und $\mathfrak{b}_1$ einen gemeinsamen Randpunkt P_3, so müßte wegen des Hilfssatzes 1. in § 3 die Ebene $\mathfrak{E}(t_0)$ die analytische Tangente in P_3 sein, was wiederum unserer Voraussetzung über die Planarkonvexität im kleinen widerspricht. Wir können folglich annehmen, daß $\mathfrak{b}_0$ oder $\mathfrak{b}_1$, etwa $\mathfrak{b}_1$, ein beschränkter Bereich ist. Dann gibt es einen Randpunkt R_0 von $\mathfrak{b}_1$, der Häufungspunkt von Punkten R_n auf $\mathfrak{E}(t_0)$ ist, die ihrerseits alle weder zum Innern noch zum Rande von $\mathfrak{b}_1$ gehören, wohl aber innere oder Randpunkte von $\mathfrak{B}$ sind.

Zum Beweise dieser letzten Aussage betrachten wir bei gegebenem noch so kleinen positiven ε auf $\mathfrak{E}(t_0)$ das ringartige Gebiet $\mathfrak{g}(\varepsilon)$, das aus der Gesamtheit der Punkte besteht, die von $\mathfrak{b}_1$ um weniger als ε und mehr als $\frac{\varepsilon}{2}$ entfernt sind. Die aus inneren Punkten von $\mathfrak{B}$ bestehenden Jordankurven, die jeweils auf $\mathfrak{E}(t)$, $t > t_0$, die Punkte $P(t)$ und P_2 verbinden, haben dann mindestens einen Häufungspunkt R_ε in $\mathfrak{g}(\varepsilon)$. Dieser ist deshalb innerer oder Randpunkt von $\mathfrak{B}$. Greifen wir für eine Folge von gegen Null konvergierenden ε solche Punkte R_ε heraus, so bekommen wir die oben angegebene Folge der R_n.

Wir unterscheiden nun verschiedene Fälle:

1. Unter den R_n befinden sich unendlich viele innere Punkte aus $\mathfrak{B}$. Wegen des Hilfssatzes in § 3 ist dann $\mathfrak{E}(t_0)$ Tangentialebene in R_0. $\mathfrak{B}$ könnte dann aber nicht in R_0, wie wir voraussetzten, planarkonvex im kleinen sein.

2. Die R_n sind fast alle Randpunkte von $\mathfrak{B}$, jedoch unendlich viele unter ihnen sind Randpunkte von Bereichen $\mathfrak{b}_n$, die durch $\mathfrak{E}(t_0)$ aus $\mathfrak{B}$ herausgeschnitten werden. Jetzt kommen wir wie unter 1. zum Widerspruch.

3. Fast alle R_n sind *auf* $\mathfrak{E}(t_0)$ höchstens Häufungspunkte von anderen Randpunkten, nicht aber Häufungspunkte von inneren Punkten von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{E}(t_0)$. In jedem solchen R_n ist $\mathfrak{E}(t_0)$ die analytische Tangentialebene.

Wir benutzen jetzt

Hilfssatz 2. *Ist die analytische Ebene $\mathfrak{E}_0$ Tangentialebene in den Randpunkten $Q_1, Q_2, \ldots$ des Bereiches $\mathfrak{B}$, konvergieren ferner die Q_i gegen den Randpunkt Q_0 von $\mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{E}_0$ auch analytische Tangentialebene in Q_0.*

Daraus folgt im Falle 3., daß $\mathfrak{E}(t_0)$ in R_0 die Tangentialebene ist. Das aber widerspricht der Planarkonvexität im kleinen.

Folglich schneidet unter den Voraussetzungen des Hauptsatzes jede analytische Ebene $\mathfrak{B}$ nur in einem Bereiche.

Gäbe es noch eine analytische Tangente $\mathfrak{T}$ im Punkte R_0 an $\mathfrak{B}$, die keine Stützebene ist, so greifen wir auf $\mathfrak{T}$ den inneren Punkt P_2 aus $\mathfrak{B}$ heraus. P_2 liegt in einem Schnittbereich $\mathfrak{b}_2$ auf $\mathfrak{T}$, während in einer Umgebung um R_0 auf $\mathfrak{T}$ kein innerer Punkt von $\mathfrak{B}$ liegt, so daß wir annehmen können, daß $\mathfrak{b}_2$ beschränkt ist. Nunmehr verbinden wir R_0 mit P_2 durch eine Jordankurve $P(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, $P(0) = R_0$, $P(1) = P_2$, die mit Ausnahme ihres Endpunktes R_0 ganz in $\mathfrak{B}$ liegt. Die analytischen Ebenen $\mathfrak{E}(t)$, die durch $P(t)$ und P_2 bestimmt werden, schneiden aus $\mathfrak{B}$ genau einen Bereich heraus. Wir schließen jetzt in bezug auf $\mathfrak{E}(0) = \mathfrak{T}$ genau so wie oben in bezug auf $\mathfrak{E}(t_0)$ und kommen zum Widerspruch. $\mathfrak{T}$ ist also doch Stützebene, w. z. b. w.

Folgerung. *Unter den Voraussetzungen des Hauptsatzes weist jede analytische Ebene Punkte auf, die außerhalb $\mathfrak{B}$ liegen.*

Läge eine analytische Ebene ganz im Innern von $\mathfrak{B}$, so müßte jede analytische Ebene, da sie mit jener einen gemeinsamen Punkt hat, auch innere Punkte haben. Das trifft sicher nicht für die Stützebene zu.

Würde eine Ebene nur innere und Randpunkte von $\mathfrak{B}$ aufweisen, so müßte sie unter unsern Voraussetzungen in diesen Randpunkten die Tangentialebene sein, was wiederum wegen der Planarkonvexität nicht möglich ist.

So bleibt nur der Fall, daß eine analytische Ebene $\mathfrak{E}_0$ vollständig aus Randpunkten besteht, noch übrig. Jede andere analytische Ebene hat mit $\mathfrak{E}_0$ einen gemeinsamen Punkt und muß dort in den Bereich eindringen, kann also keine Tangentialebene sein. Außerhalb $\mathfrak{E}_0$ können keine Randpunkte liegen. Der Rand bestände dann nicht mehr, wie wir voraussetzten, aus einer Hyperfläche.

Hieraus ergibt sich, daß jeder vollkommene Kreiskörper, der den Voraussetzungen des Hauptsatzes genügt, beschränkt ist. Doch gibt es natürlich schon vollkommene Reinhardtsche Körper, die planarkonvex und unbeschränkt sind, so den Zylinderbereich $|z| < 1$. Doch genügen diese Körper im Unendlichen nicht den Differentiierbarkeitsbedingungen.

§ 5.

Projektivebenen.

Unter **Projektivebenen** seien die projektiven Bilder der Hyperebenen $a_1 x + a_2 y + a_3 u + a_4 v + a_5 = 0$ verstanden. *Jede Projektivebene genügt einer Gleichung:*

$$(1) \qquad |aw + bz + c|^2 - |dw + ez + f|^2 = 0,$$

wobei $(a, b, c) \neq \lambda\, (d, e, f),\ \lambda \neq 0.$

Und umgekehrt, die Gesamtheit der Punkte, die einer solchen Gleichung genügt, bildet eine Projektivebene.

Zum Beweise beachten wir zuerst, daß die Hyperebene $x = 0$ die Darstellung

$$(2) \qquad |z + 1|^2 - |z - 1|^2 = 0$$

gestattet. Nun geht bei einer projektiven Transformation T eine Gleichung (1) wieder in eine solche über. Die Nebenbedingung bleibt dabei auch erfüllt, da bei jeder projektiven Transformation, insbesondere bei T^{-1}, eine etwaige Proportionalität von (a, b, c) und (d, e, f) erhalten bliebe. Also lassen sich alle projektiven Bilder von $x = 0$ und damit von jeder Hyperebene durch eine Gleichung (1) angeben.

Ist umgekehrt eine Punktmenge, die einer Gleichung (1) genügt, gegeben, so führt die projektive Transformation (1) S. 158, bei der die Koeffizienten den Bedingungen

$$(3) \qquad \begin{aligned} a_{21} + a_{31} &= a, & a_{21} - a_{31} &= d \\ a_{22} + a_{32} &= b, & a_{22} - a_{32} &= e \\ a_{23} + a_{33} &= c, & a_{23} - a_{33} &= f \end{aligned}$$

genügen, die Gleichung (1) in (2) über. Die Gleichungen (3) sind aber immer unter Wahrung der Nebenbedingung erfüllbar. Also stellt (1) immer eine Projektivebene dar.

Zur Untersuchung unendlicher Folgen von Projektivebenen benötigen wir noch eine Normierung der Gleichungen (1).

$$\varkappa^2 |aw + bz + c|^2 - \nu^2 |dw + ez + f|^2 = 0$$

mit positivem $\varkappa$ und ν soll eine normierte Darstellung einer Projektivebene heißen, wenn

$$\begin{aligned} |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 &= 1 \\ |d|^2 + |e|^2 + |f|^2 &= 1 \end{aligned}, \quad \varkappa^2 + \nu^2 = 1$$

und jeweils der erste von null verschiedene Koeffizient unter den Absolutzeichen positiv ist.

Man beachte, daß, wenn $(a, b, c) = (d, e, f)$ und a oder mindestens b ungleich null ist, für $\varkappa \neq \nu$ eine analytische Ebene, für $\varkappa = \nu$ der gesamte Raum dargestellt wird.

Konvergieren bei einer Folge von Projektivebenen $\mathfrak{P}_n$

(4) $$\varkappa_n^2 \,|a_n w + b_n z + c_n|^2 - \nu_n^2 \,|d_n w + e_n z + f_n|^2 = 0$$

die $\varkappa_n, \nu_n, a_n, \ldots$ gegen $\varkappa_0, \nu_0, a_0, \ldots$ und ist $\mathfrak{P}_0$

(5) $$\varkappa_0^2 \,|a_0 w + b_0 z + c_0|^2 - \nu_0^2 \,|d_0 w + e_0 z + f_0|^2 = 0$$

eine Projektiv- oder analytische Ebene, so konvergieren die $\mathfrak{P}_n$ (siehe Abschnitt 1) gegen $\mathfrak{P}_0$.

Wegen der Stetigkeit der linken Seite von (4) in den Koeffizienten muß das Grenzgebilde der $\mathfrak{P}_n$ auf $\mathfrak{P}_0$ liegen. Ist $\mathfrak{P}_0$ eine analytische Ebene, so wissen wir schon, daß $\mathfrak{P}_0$ das Grenzgebilde ist, weil jede Folge P_n auf $\mathfrak{P}_n$ eine Folge P_n auf analytischen Ebenen $\mathfrak{E}_n$ ist, die ihrerseits konvergente Teilfolgen aufweisen, welche alle mit $\mathfrak{P}_0$ zusammenfallen.

Ist $\mathfrak{P}_0$ eine Projektivebene, so können wir annehmen, daß $\mathfrak{P}_0$ die Hyperebene $x = 0$ ist. Die Gleichungen (4) für die $\mathfrak{P}_n$ lassen sich dann auch schreiben

(6) $$x + q\,(u, v, x, y;\ \varkappa_n a_n, \ldots, \nu_n f_n) = 0,$$

wo q quadratisch in den vier ersten Veränderlichen ist. Weiter ist

$$q\,(u, v, x, y; \varkappa_0 a_0, \ldots, \nu_0 f_0) \equiv 0.$$

Bei gegebenem u_0, v_0, y_0 und $\varepsilon > 0$ ist

$$|q\,(u_0, v_0, x, y_0;\ \varkappa_n a_n, \ldots, \nu_n f_n)| < \varepsilon$$

für $n > n_0, |x| < 1$, folglich die linke Seite von (6) für

$u = u_0,\ v = v_0,\ x = \varepsilon,\quad y = y_0$ und $n > n_0$ positiv

$u = u_0,\ v = v_0,\ x = -\varepsilon,\ y = y_0$ „ $n > n_0$ negativ

und damit

$$x_n + q\,(u_0, v_0, x_n, y_0; \varkappa_n a_n, \ldots, \nu_n f_n) = 0$$

für ein geeignetes x_n mit $|x_n| < \varepsilon$.

Die Folge der $P_n\,(u_0, v_0, x_n, y_0)$ liegt auf $\mathfrak{P}_n$ und konvergiert gegen den vorher willkürlich herausgegriffenen Punkt $(u_0, v_0, 0, y_0)$ auf $\mathfrak{P}_0$.

Entsprechendes gilt für die unendlich fernen Punkte auf $x = 0$. $\mathfrak{P}_0$ ist das Grenzgebilde der $\mathfrak{P}_n$.

Unter den Folgen von Projektivebenen $\mathfrak{P}_n$ mit konvergierenden Koeffizienten in der normierten Darstellung (4) sind jetzt nur noch jene zu untersuchen, bei denen (5) eine Identität in w und z ist. In diesem Falle gibt es für die $\mathfrak{P}_n$ folgende nicht normierte Darstellung:

(7) $$|l_0(w, z) + l_n(w, z)| - |l_0(w, z) + l_n^*(w, z)| = 0,$$

$l_0(w,z) = a_0 w + b_0 z + c_0 \neq 0$, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_0 \neq 0$ voraussetzen können. Es ist dann

$l_n(w,z)$ linear in w und z mit

$$\lim_{n=\infty} l_n(w,z) = \lim_{n=\infty} l_n^*(w,z) = 0 \text{ für alle } (w,z),$$

$$l_n(w,z) - l_n^*(w,z) = \eta^{(n)}(\alpha_1^{(n)} w + \alpha_2^{(n)} z + \alpha_3^{(n)}) \equiv \eta^{(n)} k_n(w,z),$$

$$|\alpha_1^{(n)}|^2 + |\alpha_2^{(n)}|^2 + |\alpha_3^{(n)}|^2 = 1; \quad \eta^{(n)} > 0.$$

Die Darstellung (7) für die $\mathfrak{P}_n$ läßt sich überführen in

$$\eta^{(n)} 2\,\Re(l_0 \bar{k}_n) + l_n \bar{l}_n - l_n^* \bar{l}_n^* = 0,$$

$$|l_0 + k_n|^2 - |l_0 - k_n|^2 + 2\,\Re(l_n \bar{k}_n) - \eta^{(n)} k_n \bar{k}_n = 0. \tag{8}$$

Für jede Teilfolge $\mathfrak{P}_{n_k}$ der $\mathfrak{P}_n$, für die die Folge der $k_n(w,z)$ konvergiert, bekommen wir ein $\mathfrak{P}_0$:

$$|l_0 + k_0|^2 - |l_0 - k_0|^2 = 0.$$

Da $k_0(w,z) \neq 0$, ist $\mathfrak{P}_0$ sicher eine Projektivebene. Wie oben folgt, daß die $\mathfrak{P}_{n_k}$ die Projektivebene $\mathfrak{P}_0$ als Grenzgebilde aufweisen.

Weil wir nun aus jeder Folge von Projektivebenen $\mathfrak{P}_n$ eine Teilfolge herausgreifen können, bei der in den normierten Darstellungen (4) die Koeffizienten konvergieren, haben wir bewiesen

Satz 9. *Jede Folge von Projektivebenen weist Teilfolgen auf, die gegen eine Projektivebene oder eine analytische Ebene konvergieren.*

Hieraus folgt weiter unmittelbar

Satz 9a. *Als Grenzgebilde von Folgen von Projektivebenen treten nur wieder Projektivebenen und analytische Ebenen auf.*

Weiter beachten wir:

Satz 10. *Hat die Projektiv- oder analytische Ebene $\mathfrak{P}$ keinen Punkt mit dem abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{B}$ gemein, so gibt es durch jeden Punkt P von $\mathfrak{P}$ Projektivebenen, die den abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}$ auch nicht schneiden.*

§ 6.

Planar- und Projektivkonvexität.

Die Konvexität in bezug auf Projektivebenen (P-Konvexität) fällt zumindestens bei schlichten Bereichen mit der Planarkonvexität zusammen.

Wir definieren:

Ein Bereich $\mathfrak{B}$ heißt P-konvex, wenn es zu jedem ganz in $\mathfrak{B}$ gelegenen Bereich $\mathfrak{B}_0$ einen Bereich $\mathfrak{B}^*$ gibt, $\mathfrak{B}_0 < \mathfrak{B}^* \ll \mathfrak{B}$, so daß durch jeden Punkt P in $\mathfrak{B}$, der außerhalb $\mathfrak{B}^*$ liegt, eine Projektivebene $\mathfrak{P}$ existiert, die nicht in $\mathfrak{B}_0$ hineinragt (genauer: von der Art, daß jeder Punkt Q auf $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{B}$, der auf $\mathfrak{P}$ mit P innerhalb $\mathfrak{B}$ verbindbar ist, außerhalb $\mathfrak{B}_0$ liegt).

Dann folgt unmittelbar:

Satz 11a. *Jeder P-konvexe Bereich ist planarkonvex.*

Das Umgekehrte scheint uns nur im Falle schlichter Bereiche leicht beweisbar. Dann ist es eine unmittelbare Folge von Satz 10.

Satz 11b. *Jeder schlichte planarkonvexe Bereich ist P-konvex.*

Wir können jetzt nicht analog wie beim Satze 2 über die Existenz von Projektivebenen als Stützgebilden in den Randpunkten schließen, weil eine Folge von Projektivebenen gegen eine analytische Ebene konvergieren kann.

Es liegt nun sehr nahe — besonders im Hinblick auf den wichtigen Begriff der $\mathfrak{K}$-Konvexität — die Konvexität mit Hilfe linearer Funktionen einzuführen.

Ein Bereich $\mathfrak{B}$ heißt *projektiv-konvex*, wenn es zu jedem ganz in $\mathfrak{B}$ gelegenen Bereich $\mathfrak{B}_0$ einen Bereich $\mathfrak{B}^*$ gibt, $\mathfrak{B}_0 \prec \mathfrak{B}^* \ll \mathfrak{B}$, so daß zu jedem Punkte P in $\mathfrak{B}$, aber außerhalb $\mathfrak{B}^*$, eine lineare, in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion

$$l(w, z) = \frac{a w + b z + c}{d w + e z + f}$$

existiert mit

$$|l(P)| > |l(\mathfrak{B}_0)|.$$

Satz 12a. *Jeder projektiv-konvexe Bereich $\mathfrak{B}$ ist P-konvex und damit erst recht planarkonvex.*

Zum Beweise hat man lediglich zu beachten, daß

$$|l(w, z)| = |l(P)|$$

eine Projektivebene ist.

Dagegen gilt nicht schlechtweg das Umgekehrte. Es trifft im allgemeinen nicht mehr bei nichtschlichten Bereichen zu. $\mathfrak{B}$ möge einen Randpunkt R enthalten, der einem inneren Punkte P überlagert ist. $R_1, R_2, \ldots$ mögen Punkte aus $\mathfrak{B}$ sein, die gegen R konvergieren. Wir wählen jetzt einen Teilbereich $\mathfrak{B}_0$ aus $\mathfrak{B}$, der P umfaßt. Dann sind R und die Punkte R_i, $i > i_0$, Punkten aus $\mathfrak{B}_0$ überlagert. Jede der zugelassenen linearen Funktionen kann dann in den Punkten R_i, $i > i_0$, keine andern Werte annehmen, als sie schon in $\mathfrak{B}_0$ aufweisen, so daß die Forderung der Projektivkonvexität in bezug auf $\mathfrak{B}_0$ und die R_i nicht erfüllt werden kann.

Der nichtschlichte Bereich $\mathfrak{B}$ ist dann und nur dann projektivkonvex, wenn es einen schlichten projektiv-konvexen Bereich $\tilde{\mathfrak{B}}$ gibt, so daß jedem Punkte von $\tilde{\mathfrak{B}}$ genau die gleiche endliche Anzahl von Punkten aus $\mathfrak{B}$ überlagert ist und umgekehrt jeder Punkt von $\mathfrak{B}$ einem Punkte von $\tilde{\mathfrak{B}}$ überlagert ist. Wir haben aber schon gesehen, daß auch andere nichtschlichte Bereiche planarkonvex sein können.

Es folgt dagegen wieder:

Satz 12b. *Jeder schlichte planarkonvexe Bereich $\mathfrak{B}$ ist projektiv-konvex.*

Wäre der Satz nicht richtig, so gäbe es mindestens einen Bereich $\mathfrak{B}_0 < \mathfrak{B}$ und dazu eine Folge von P_i aus $\mathfrak{B}$, die gegen einen Randpunkt P_0 von $\mathfrak{B}$ konvergierten und für die in bezug auf alle linearen in $\mathfrak{B}$ regulären Funktionen gilt:

(1) $$|l(P_i)| \leqq |l(\mathfrak{B}_0)|.$$

Nun aber gibt es wegen der Planarkonvexität und Schlichtheit von $\mathfrak{B}$ durch P_0 eine analytische Ebene $\alpha w + \beta z + \gamma = 0$, die *nicht* in $\mathfrak{B}_0$ eindringt. Dann gilt bei genügend kleinem $A > 0$ für

$$l_0(w, z) = \frac{A}{\alpha w + \beta z + \gamma}$$

(2) $$|l_0(\mathfrak{B}_0)| < 1; \qquad |l_0(P_i)| \to \infty.$$

(2) steht im Widerspruch zu (1), so daß der Satz jetzt bewiesen ist.

(Eingegangen am 19. 11. 1934.)

L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables.

Von

André Weil in Strasbourg (Straßburg).

Soit D un domaine univalent (*schlicht*) dans l'espace (x, y) de deux variables complexes, et soient $X_i\,(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ N fonctions holomorphes dans D. Donnons-nous, dans le plan de chaque variable X_i, un domaine borné D_i dont la frontière C_i se compose d'arcs analytiques en nombre fini; soit $\Delta_i = D_i + C_i$; et considérons, dans D, l'ensemble des points satisfaisant aux conditions:

$$\text{(I)} \qquad X_i \in \Delta_i.$$

Nous désignerons par Δ une composante connexe ou la somme de plusieurs composantes connexes de cet ensemble, Δ *étant supposé complètement intérieur à* D, c'est-à-dire borné et tel que ses points frontières soient tous intérieurs à D. Soit S_i l'ensemble des points de Δ où $X_i \in C_i$; ce sera en général une variété à trois dimensions, engendrée par un ou plusieurs morceaux de la „variété caractéristique" $X_i\,(x, y) = \xi$ quand ξ décrit certains arcs de C_i. La frontière du „polyèdre" Δ se compose de la réunion des „faces" S_i: elle peut être considérée comme la somme de morceaux, en nombre fini, dont chacun est partout localement défini par des équations analytiques et est borné par des variétés également analytiques; d'après un théorème de van der Waerden [1]), elle peut donc être triangulée de telle manière que les S_i et leurs intersections deux à deux, trois à trois, etc., apparaissent comme sommes d'éléments ou simplexes, et que chaque simplexe soit un morceau de variété analytique n'ayant aucun point singulier à son intérieur. σ étant alors un simplexe orienté à deux dimensions dans cette subdivision, et $\varphi\,(x, y)$ une fonction holomorphe sur σ, on sait définir l'intégrale double $\int\limits_\sigma \varphi\,(x, y)\,d\,x\,d\,y$ [2]);

---

[1]) B. L. van der Waerden, *Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie*, Anhang I (*Triangulierbarkeit der algebraischen Gebilde*), Math. Annalen **102** (1930), S. 360. Cf. aussi B. O. Koopman and A. B. Brown, *On the Covering of Analytic Loci by Complexes*, Trans. Amer. Math. Soc. **34** (1932), p. 231.

[2]) En effet, σ est limite d'une suite croissante de simplexes σ_ν intérieurs à σ, dont tous les points sont donc réguliers, et sur lesquels l'intégrale est définie. Montrons que $\int \varphi\,(x, y)\,d\,x\,d\,y$, prise sur $\sigma - \sigma_\nu$, tend vers 0: φ est bornée; de plus, si

si, de plus, $\varphi(x, y)$ est holomorphe sur un complexe à trois dimensions pris sur la frontière de Δ, l'intégrale $\int \varphi(x, y)\, dx\, dy$, étendue à la frontière de ce complexe, s'annule: c'est le théorème de Cauchy-Poincaré, qui généralise le théorème de Cauchy sur l'intégrale des fonctions holomorphes d'une variable le long d'un contour fermé réductible à zéro.

Nous supposerons de plus que *les S_i n'ont deux à deux en commun aucun élément à plus de deux dimensions:* il en sera ainsi, en particulier, si les X_i sont deux à deux indépendants; il suffirait d'ailleurs toujours, pour satisfaire à notre condition, de donner au besoin aux contours C_i des déplacements infiniment petits convenables. Nous désignerons par σ_{ij} la somme des éléments à deux dimensions de l'intersection de S_i et S_j, c'est-à-dire des éléments frontières communs à S_i et S_j. L'orientation directe du polyèdre Δ induit une orientation bien déterminée de S_i, et celle-ci induit à son tour une orientation des éléments de σ_{ij}; nous conviendrons d'orienter ainsi σ_{ij}, de sorte que l'on aura $\sigma_{ij} = -\sigma_{ji}$; et la frontière orientée de S_i sera $\sum_j \sigma_{ij}$. Si donc $\varphi(x, y)$ est holomorphe sur S_i, l'on aura:

$$\text{(II)} \qquad \sum_j \int_{\sigma_{ij}} \varphi(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

Mon objet est ici de démontrer une formule qui généralise, pour le polyèdre Δ, la formule de Cauchy:

$$f(x_0) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(x)\, dx}{x - x_0}.$$

Pour cela je ferai l'hypothèse suivante, dont je ne suis malheureusement pas arrivé à m affranchir:

Je supposerai qu'à chacune des fonctions $X_i(x, y)$ l'on puisse faire correspondre deux fonctions $P_i(x, y; x_0, y_0)$, $Q_i(x, y; x_0, y_0)$ holomorphes en x, y, x_0, y_0 quand $(x, y) \in D$, $(x_0, y_0) \in D$, de façon que l'on ait identiquement:

$$\text{(III)} \qquad X_i(x, y) - X_i(x_0, y_0) = (x - x_0) P_i + (y - y_0) Q_i.$$

Il en sera ainsi, en particulier, quand les X_i sont des polynomes ou des fractions rationnelles. On pourrait, d'ailleurs, élargir quelque peu l'hypothèse ci-dessus, mais je ne m'y arrêterai pas.

$x = x_1 + i x_2$, $y = y_1 + i y_2$. $|dx\,dy| \leqq |dx_1\,dy_1| + |dx_1\,dy_2| + |dx_2\,dy_1| + |dx_2\,dy_2|$; il suffit donc de montrer. par exemple, que $\int |dx_1\,dy_1|$, prise sur $\sigma - \sigma_\nu$, tend vers 0: or l'aire de la projection de $\sigma - \sigma_\nu$ sur le plan $x_2 = y_2 = 0$ tend vers 0; d'autre part, σ étant analytique et compact, recouvre sa projection sur ce plan au plus M fois, M étant un entier *fixe*. $\int \varphi(x, y)\, dx\, dy$, prise sur σ_ν, tend donc vers une limite bien déterminée quand σ_ν tend vers σ. Cette limite sera par définition l'intégrale sur σ.

Dans ces conditions, soit $f(x, y)$ une fonction holomorphe en tous les points de Δ; considérons la somme d'intégrales:

$$\text{(IV)} \qquad \mathcal{J} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{(i,j)} \int_{\sigma_{ij}} \frac{(P_i Q_j - P_j Q_i) f(x, y)\, dx\, dy}{[X_i(x, y) - X_i(x_0, y_0)][X_j(x, y) - X_j(x_0, y_0)]}$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons d'indices (i, j) deux à deux. Nous allons démontrer que l'on a[3]:

(Va) $\mathcal{J} = f(x_0, y_0)$ *si* (x_0, y_0) *est un point intérieur de* Δ;

(Vb) $\mathcal{J} = 0$ *si* (x_0, y_0) *est extérieur à* Δ.

Nous poserons $X_i = X_i(x, y)$; $X_i^0 = X_i(x_0, y_0)$; et:

$$\varphi_{ij}(x, y; x_0, y_0) = \frac{P_i Q_j - P_j Q_i}{(X_i - X_i^0)(X_j - X_j^0)}.$$

L'on vérifie facilement les *identités fondamentales:*

$$\text{(VI)} \qquad \varphi_{ij} + \varphi_{ji} = 0, \quad \varphi_{ij} + \varphi_{jk} + \varphi_{ki} = 0.$$

Traitons d'abord un cas particulier de (Vb): soit X_1^0 (par exemple) extérieur à Δ_1, et, pour $i \neq 1$, X_i^0 non situé sur C_i. Alors φ_{i1} est holomorphe sur S_i, car, sur S_i, $X_1 \in \Delta_1$, $X_i \in C_i$. D'après (VI) l'on a $\varphi_{ij} = \varphi_{i1} - \varphi_{j1}$, donc:

$$\begin{aligned}(2\pi i)^2 \mathcal{J} &= \sum_{(i,j)} \int_{\sigma_{ij}} (\varphi_{i1} - \varphi_{j1}) f\, dx\, dy \\ &= \sum_{i \neq 1} \sum_{j} \int_{\sigma_{ij}} \varphi_{i1} f\, dx\, dy \\ &= 0 \quad \text{d'après (II).}\end{aligned}$$

Soit maintenant le cas général. S'il s'agit de (Va), (x_0, y_0) est intérieur, $X_i^0 \in D_i$; s'il s'agit de (Vb), nous supposerons que X_i^0 ne soit pas sur C_i, de manière que les intégrales dans $\mathcal{J}$ n'aient aucun de leurs éléments infini; sinon on procéderait par continuité. Je dis que l'on peut toujours admettre que x et y figurent parmi les X_i: si, en effet, x n'y figurait pas, il suffirait de l'adjoindre en posant $X_{N+1} = x$, le domaine Δ_{N+1} correspondant étant pris assez grand pour contenir dans son intérieur toutes les valeurs prises par x dans Δ; la condition $x \in \Delta_{N+1}$ ne modifie alors en rien le domaine Δ, ni, par suite, la somme $\mathcal{J}$. De même pour y. Soient donc $X_1 = x$, $X_2 = y$; l'on prendra $P_1 = 1$, $Q_1 = 0$; $P_2 = 0$, et $Q_2 = 1$.

---

[3]) J'ai publié ce résultat dans ma note *Sur les séries de polynomes de deux variables complexes*, C. R. **194** (1932), p. 1304. Cf. dans la même direction S. Bergmann, *Über eine in gewissen Bereichen mit Maximumfläche gültige Integraldarstellung der Funktionen zweier komplexer Variabler I*, Math. Zeitschr. **39** (1934), S. 76.

Considérons maintenant les domaines Δ_1, Δ_2 comme variables, tous les autres restant fixes, et $\mathcal{J}$ comme fonction $\mathcal{J}(\Delta_1, \Delta_2)$ de ces domaines. Le théorème est évident si Δ_1 et Δ_2 sont des cercles infiniment petits Γ_1, Γ_2 tracés autour de x_0, y_0 respectivement: dans le cas (Va), parce que Δ se réduit alors au „dicylindre" $x \in \Gamma_1$, $y \in \Gamma_2$, et $\mathcal{J}$ à l'intégrale de Cauchy ordinaire;

$$\mathcal{J}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int \frac{f(x,y)\,dx\,dy}{(x-x_0)(y-y_0)}$$

prise sur les contours de Γ_1, Γ_2; dans le cas (Vb), parce qu'alors Δ, donc $\mathcal{J}$, se réduisent à zéro.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que $\mathcal{J}$ ne change pas quand on remplace Δ_1 par Γ_1, ou plus généralement par un domaine $\Delta_1' \subset \Delta_1$ contenant encore x_0 à son intérieur; car le même raisonnement vaudra pour Δ_2. Soit donc Δ_1 seul variable, et $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\Delta_1)$; soit $\Delta_1' \subset \Delta_1$, D_1' l'ensemble des points intérieurs de Δ_1', $x_0 \in D_1'$; et soit $\Delta_1'' = \Delta_1 - D_1'$ la fermeture de $\Delta_1 - \Delta_1'$. L'on voit immédiatement que l'on a:

$$\text{(VII)} \qquad \mathcal{J}(\Delta_1) - \mathcal{J}(\Delta_1') = \mathcal{J}(\Delta_1'').$$

(Plus généralement, $\mathcal{J}$, de par sa structure, est une *fonction additive de domaine*). Mais $X_1^0 = x_0$ est extérieur à Δ_1''; nous savons qu'alors $\mathcal{J}(\Delta_1'') = 0$, et le théorème est démontré.

Il subsiste, et se démontre de même, pour n variables. Voici l'énoncé complet:

Soient, dans un domaine D de l'espace $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, N fonctions holomorphes $X_1, X_2, \ldots, X_N$; et, dans le plan de X_i, un domaine fermé borné Δ_i, dont la frontière C_i se compose d'arcs analytiques en nombre fini. Soit Δ une composante connexe ou la somme de plusieurs composantes connexes de l'ensemble défini dans D par les conditions:

$$X_i(x) \in \Delta_i.$$

Supposons Δ complètement intérieur à D; et, S_i désignant l'ensemble des points frontières de Δ où $X_i \in C_i$, supposons que les S_i n'aient n à n en commun aucun élément à plus de n dimensions; soit $\sigma_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ la somme des éléments à n dimensions de l'intersection de $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_n}$, leur orientation étant définie par la suite des intersections

$$S_{i_1},\ S_{i_1} \times S_{i_2},\ \ldots\ S_{i_1} \times S_{i_2} \times \ldots \times S_{i_n} = \sigma_{i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

Supposons d'autre part que l'on puisse faire correspondre à chaque $X_i(x)$ n fonctions $P_{i\nu}(x; x_0)$, holomorphes quand $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ et $(x_0) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D$, et telles que l'on ait identiquement:

$$X_i(x) - X_i(x_0) = \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - x_\nu^0)\, P_{i\nu}(x; x_0).$$

Soit $\delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x; x_0)$ le déterminant formé avec les n lignes $(P_{i_1 \nu}, P_{i_2 \nu}, \ldots, P_{i_n \nu})$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Cela posé, si $f(x)$ désigne une fonction holomorphe en tous les points de Δ, la somme

$$\mathcal{I} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)}^{*} \int\limits_{\sigma_{i_1 i_2 \ldots i_n}} \frac{\delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x; x_0) f(x)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n}{[X_{i_1}(x) - X_{i_1}(x_0)][X_{i_2}(x) - X_{i_2}(x_0)] \ldots [X_{i_n}(x) - X_{i_n}(x_0)]}$$

est égale à $f(x_0)$ ou à 0, suivant que (x_0) est un point intérieur de Δ ou est extérieur à Δ.

Si l'on pose

$$\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \frac{\delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x; x_0)}{\prod\limits_{\nu} [X_{i_\nu}(x) - X_{i_\nu}(x_0)]},$$

la seconde identité (VI) doit être remplacée par la suivante:

$$\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_n} + \varphi_{i_2 i_3 \ldots i_{n+1}} + \varphi_{i_3 \ldots i_{n+1} i_1} + \cdots + \varphi_{i_{n+1} i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} = 0.$$

La condition imposée aux S_i sera sûrement vérifiée, par exemple, si les X_i ne sont liés n à n par aucune relation. D'autre part les $P_{i\nu}$ existeront certainement si les X_i sont des polynomes ou des fractions rationnelles ou bien limites uniformes de telles fonctions dans D; j'ai déjà observé ailleurs[4]) que l'on en déduit alors immédiatement la possibilité de développer, dans Δ, une fonction *arbitraire* $f(x)$ en série de polynomes ou de fractions rationnelles.

[4]) loc. cit. [3]).

(Eingegangen am 6. 12. 1934.)

Transformation der kubischen Thetafunktion.

Von

Wilhelm Maier in Lafayette, Ind. (U. S. A.).

Die analytische Zahlentheorie erfaßt arithmetische Probleme durch Aufstellung „analytischer" Invarianten. So wurde die Verteilung der Primzahlen verständlicher aus funktionentheoretischen Eigenschaften von $\int\limits_{0^+}^{\infty} \frac{dt\,t^{s-1}}{e^t-1}$; das Reziprozitätsgesetz der quadratischen Reste folgt aus der für $0 < J(y)$ geltenden Identität

$$(1)\qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{h}\, e^{\pi i y h^2} = \sqrt{\frac{i}{y}} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{k}\, e^{-\frac{\pi i k^2}{y}};$$

und die Spaltbarkeit einer natürlichen Zahl in die Summe zweier Quadratzahlen kann aufgefaßt werden als unmittelbare Folge der funktionalen Aussage, daß mit $0 < J(y)$:

$$\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{h}\, e^{\pi i y h^2}\right)^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{k}\, \frac{1}{\cos \pi y k}$$

besteht.

Das Interesse für entsprechende Sachverhalte bei unbestimmten Problemen höheren Grades wurde in den letzten Jahrzehnten durch grundlegende Arbeiten von Hilbert, Hardy, Ramanujan neu belebt. Die vorliegende Mitteilung gibt ein Mittel zur Behandlung kubischer Aufgaben der unbestimmten Arithmetik, indem die Exponenten einer Potenzreihe auf Kuben ganzer rationaler Zahlen eingeschränkt werden. Wie bei der Einführung elliptischer Funktionen, stellt sich auch im gegenwärtigen, schwierigeren Problemkreis die Einführung von mehr als einer komplexen Veränderlichen als zweckmäßig heraus.

Um (1) zu verallgemeinern, bilde man mit komplexem x unter den Einschränkungen

$$(2)\qquad 0 < J(y); \quad 0 \leq z^2$$

eine in x, y, z analytische Funktion. Der Ausdruck

$$(3)\qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{h}\, e^{2\pi i \left(xh + \frac{y}{2} h^2 + \frac{z}{3} h^3\right)} = \Theta \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \Theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

konvergiert gleichmäßig für jeden abgeschlossenen Bereich der oberen y-Halbebene, wenn der Parameter z reell bleibt, und der Summationsprozeß (3) gibt eine naheliegende Verallgemeinerung der elliptischen Θ-Reihe. Ihrer Exponenten wegen kann sie als „kubische" Θ-Funktion bezeichnet werden.

Wie die neu eingeführte Funktion durch Funktionalgleichungen bekannte Sachverhalte der Zahlentheorie zum Ausdruck bringt, zeigen einfache Beispiele. Beweist man etwa nach Euler auf Grund des Primzahlbegriffes, daß

$$g \equiv h \equiv k \equiv 0\ (1) \quad \text{und} \quad g^3 + h^3 + k^3 = 0$$

zur Folge hat:

$$g + h + k = 0,$$

und konstruiert das funktionale Äquivalent zu Fermats Aussage, indem g, h, k als Exponenten in $\Theta^3\binom{x}{y}$ gedeutet werden, so erhält man aus (3)

$$\frac{1}{3}\int_0^3 dz\, \Theta^3\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = -2 + 3\Theta\begin{Bmatrix} 0 \\ 2y \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{4}$$

Als einfachste Aufgabe einer funktionentheoretischen Untersuchung von $\Theta\binom{x}{y}$ greifen wir das Problem an, identisch in z ein Analogon zu (1) zu finden. Eine von (3) unabhängige Darstellung der Transzendenten $\Theta\binom{x}{y}$ entsteht in der Tat durch Summation über Zylinderfunktionen $H_{1/3}(v)$, wie sie von Hankel eingeführt wurden. Die gewünschte Zerlegung von $\Theta\binom{x}{y}$ in eine Reihe von Zylinderfunktionen beweisen wir mittels des Riemannschen Verfahrens, nicht einen fertigen Größenausdruck, wie etwa die Reihendarstellung (3), an die Spitze der Theorie einer analytischen Funktion zu setzen, sondern diesen im Interesse der Vergleichbarkeit verschiedener Darstellungen aufzulösen in ein System linearer Bedingungen, das zur Erklärung von $\Theta\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$ hinreicht. Durch Umordnung der Reihenfolge, in der jene Bedingungen benutzt werden, kann die axiomatisch eingeführte Funktion Θ dann auf verschiedene Art ausgedrückt werden. Der Linearität des definierenden Systems entspricht insbesondere der approximierende Prozeß einer Reihenbildung.

§ 1.

Definition durch lineare Bedingungen.

Die Bestimmung der für $|x| < \infty$; $J(y) > 0$ analytischen Funktion $\Theta\binom{x}{y}$ leisten wir nun durch Postulierung von vier in Θ linear homogenen, und einer normierenden Bedingung. Die Widerspruchsfreiheit dieser fünf Axiome wird sich ergeben, indem der obige Ausdruck (3) ihnen allen genügt. Die Einzigkeit jener Lösung andererseits folgt aus der Linearität des definierenden Systems in Θ zusammen mit der eindeutigen Approximierbarkeit analytischer Funktionen durch Potenzreihen. Die fünf Teile der Definition sind übrigens auch in vollem Umfang notwendig; doch können sie noch weiter aufgespalten werden, was aber hier nicht verfolgt werden soll. Die Erklärung von $\Theta\binom{x}{y}$ bewirke man nun in folgender Anordnung:

1. Für $J(x) < \infty$ und $0 < \Re(x) \leqq 1$ sei $\left|\Theta\binom{x}{y}\right| < \infty$ in wenigstens einem Größenpaar $J(y)$, z;

2. dort gelte die Periodizität $\Theta\binom{x}{y} = \Theta\binom{x+1}{y}$;

3. differentielle Bindung $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\Theta\binom{x}{y} = 4\pi i \dfrac{\partial}{\partial y}\Theta\binom{x}{y}$;

4. Argumentaddition $\Theta\binom{x}{y} = e^{2\pi i\left(z+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}\right)}\Theta\binom{x+y+z}{y+2z}$;

5. Normierung $\lim\limits_{J(y)\to\infty}\Theta\binom{0}{y} = 1.$

Die Bedingungen 1. bis 5. kennzeichnen dann $\Theta\binom{x}{y}$ und beschreiben ein Gebiet zulässiger y, z. Nämlich die in x und y als analytisch vorausgesetzte Funktion Θ läßt in der Darstellung

$$\Theta\binom{x}{y} = \frac{1}{2\pi i}\int_{x^+}\frac{dt\,\Theta\binom{t}{y}}{t-x} = \int_{x^+}\frac{dt\,\Theta\binom{t}{y}}{1-e^{2\pi i(t-x)}}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{h}\, e^{2\pi i h x}\int_0^1 dt\, e^{-2\pi i h t}\,\Theta\binom{t}{y}$$

wegen (1) eine Deformation von dt ins Komplexe zu, die vermöge (2) zur Größenschätzung

$$\overline{\lim_{|h| \to \infty}} \left| \int_0^1 dt\, e^{-2\pi i h t}\, \Theta\binom{t}{y} \right|^{\frac{1}{h}} = 0 \tag{6}$$

führt.

Setzt man diesen 0-strebigen Koeffizienten

$$\int_0^1 dt\, e^{-2\pi i h t}\, \Theta\binom{t}{y} = \alpha_h(y, z),$$

so gibt (3)

$$\alpha_h(y, z) = e^{\pi i h^2 y}\, b_h(z),$$

weshalb in der Halbebene $0 < J(y)$ die Beschränktheit der $|b_h(z)|$ für $|h| \to \infty$ schon die Konvergenzbedingung (6) sicherstellt. Setzt man

$$b_h(z) = e^{\frac{2\pi i h^3}{3} z}\, c_h(z),$$

so entsteht für

$$0 \leqq z^2$$

$$\Theta\binom{x + y + z}{y + 2z} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_h\, e^{2\pi i \left[h(x+y+z) + \frac{h^2}{2}(y+2z) + \frac{h^3}{3} z\right]}\, c_h(z)$$

$$= e^{-2\pi i \left(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3}\right)} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k\, e^{2\pi i \left(kx + \frac{k^2}{2} y + \frac{k^3}{3} z\right)}\, c_{k-1}(z),$$

und die obige Bedingung (4) erzwingt einerseits die Unabhängigkeit der noch eingehenden Reihenkoeffizienten vom Summationszeiger, so daß

$$c_h(z) = c(z)$$

gesetzt werden kann; andererseits schränkt (4) den Bereich zulässiger Argumente ein durch

$$0 < J(y); \qquad 0 \leqq z^2. \tag{7}$$

Die Anwendung von (5) endlich setzt $c(z) = 1$ fest, wodurch die in x ganze Funktion $\Theta\binom{x}{y}$ im Bereich (7) eindeutig erklärt ist.

§ 2.

Argumentaddition.

Die Argumente x, y der kubischen Θ-Funktion ändern sich linear durch die Bestimmung (1. 4). Daher liegt es nahe, den Aufbau von $\Theta\binom{x}{y}$ zu versuchen mittels einfacher Sonderlösungen der Bedingung (1. 4). Die Lösungsmannigfaltigkeit von

$$\tau\binom{x}{y} = e^{2\pi i \left(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3}\right)}\, \tau\binom{x + y + z}{y + 2z} \tag{1}$$

unterscheidet sich von einer bestimmten Lösung $\tau\binom{x}{y}$ in (1) durch Zusatzfaktoren, die unter Einwirkung jener Argumentaddition invariant bleiben. Somit interessieren die Funktionen $\varrho\binom{x}{y}$, welche durch

(2) $$\varrho\binom{x}{y} = \varrho\binom{x+y+z}{y+2z}$$

eingeschränkt sind. Mit jeder besonderen Funktion $\varrho\binom{x}{y} = v$ und beliebiger g erfüllt auch $g(v)$ die Invarianzforderung (2). Wegen (1. 1) beschränke man g auf ganze Transzendenten und suche Polynomlösungen $v\binom{x}{y}$ möglichst niedrigen Grades in x. Der in x lineare Ansatz

$$v = x \cdot a(y) + b(y)$$

gibt nach (2)

$$x[a(y) - a(y+2z)] = (y+z) \cdot a(y+2z) + b(y+2z) - b(y),$$

so daß

$$a(y+2z) = a(y)$$

periodisch ist und für b die inhomogene Differenzengleichung gilt

$$b(y+2z) - b(y) = (y+z) \cdot a(y).$$

Wählt man als einfachste Möglichkeit $a(y)$ von seinem Argument unabhängig, so kann a durch Normierung als beliebige Funktion von z festgelegt werden. Setzt man etwa $a = 4z$, so bleibt noch die Bestimmung von y zu leisten aus

$$b(y+2z) - b(y) + 4yz + 4z^2 = 0.$$

Als Polynomlösung dieser linearen Differenzengleichung findet sich

$$b(y) = -y^2,$$

was für v die ganze Funktion liefert

(3) $$v = 4zx - y^2.$$

Da jede in v ganze Funktion $g(v)$ auch in x ganz ist, so kennen wir alle in x ganzen Lösungen $\tau\binom{x}{y}$ von (1), wenn es gelingt, ein spezielles τ mit so addierbaren Argumenten ausfindig zu machen.

Nennt man dieses τ^*, und setzt

$$\frac{1}{2\pi i} \log \tau^* = \psi\binom{x}{y},$$

so gilt

(1') $$\psi\binom{x}{y} = x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} + \psi\binom{x+y+z}{y+2z},$$

und als einfachste ganze Lösung versuchen wir eine in x lineare zu beschaffen,

$$\psi = x \cdot \alpha(y) + \beta(y);$$

die Koeffizienten ergeben sich aus

$$\alpha(y+2z) - \alpha(y) = 1,$$

$$\beta(y+2z) - \beta(y) = \frac{2}{3}z + y + \frac{y^2}{2z},$$

und als Lösung von (1′) entsteht der Ausdruck

$$\psi\binom{x}{y} = -\frac{xy}{2z} + \frac{y^3}{12z^2},$$

was vermittels (3) die Schar von Lösungen für (1)

$$\tau\binom{x}{y} = e^{2\pi i\left[\frac{y^3}{12z^2} - \frac{xy}{2z}\right]} g(4zx - y^2) \tag{4}$$

liefert, gültig für beliebige x, y, aber $z \neq 0$. Wegen (1.7) wenden wir weiterhin (4) an nur im Bereich $z > 0$; bemerkenswert ist vielleicht, daß in 4 Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 die Forderung

$$\sigma\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = e^{2\pi i\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{4}\right)} \sigma\begin{Bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ x_3 + 3x_4 \end{Bmatrix},$$

eine naheliegende Verallgemeinerung von (1), für $x_4 \neq 0$ und ganze Funktionen g eines Argumentes befriedigt wird durch den Ausdruck

$$\sigma\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = e^{\frac{\pi i}{6x_4}(4x_1x_3 - x_2^2)} g[3x_2x_4 - x_3^2].$$

Der Beweis läuft entsprechend der obigen Entwicklung, liegt aber außerhalb unseres kubischen Θ-Problems.

Für $z = 0$ versagte unsere Lösung (4); aber dann fällt auch (1) zurück auf die Differenzengleichung der elliptischen Thetafunktion

$$\tau(x) = e^{2\pi i\left(x + \frac{y}{2}\right)} \tau(x+y),$$

welche die in x ganze Transzendente

$$e^{-\pi i\frac{x^2}{y}}$$

als Element der „quellenmäßigen" Darstellung von $\Theta(x)$ zuläßt.

Kehren wir zum Additionssatz (1.4) zurück, welcher an Stelle des Argumententripels x, y, z von $\Theta\binom{x}{y}$ gewisse lineare Verbindungen als neue Θ-Argumente einführte. Opfern wir diese Linearität und denken $x = x(y, z)$ abhängig von den beiden anderen Veränderlichen, so kann durch Wahl dieser Abhängigkeit erreicht werden, daß die obige Transformation sich vereinfacht zur homogenen Differenzengleichung. Setzt man in (1.4)

$$x(y) + y + z = x(y + 2z)$$

und deshalb

$$x = \frac{y^2}{4z},$$

so läßt

$$\Theta\begin{pmatrix}\frac{y^2}{4z}\\ y\end{pmatrix} = \eta(y)$$

wegen (1. 3) folgende Entwicklung zu:

$$\eta(y) = e^{-\frac{\pi i y^3}{12 z^2}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_h\, e^{\frac{\pi i}{12 z^2}(y+2hz)^3},$$

konvergent für

$$0 < J(y), \qquad 0 = J(z);$$

während

$$\eta(y+2z) = e^{\frac{\pi i}{12 z^2}[(y+2z)^3 - y^3]}\,\eta(y)$$

bleibt. Andererseits zerstört die Elimination von x zwei reelle Perioden, welche die innere Kennzeichnung von Θ ohne Zuziehung von Integralmittelwerten ermöglichte. Daher halten wir die unabhängige Veränderliche x und den ursprünglichen Ansatz für $\Theta\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ aufrecht und suchen die Lösungsschar (4) von (1. 4) zunächst der partiellen Differentialgleichung (1. 3) anzupassen.

§ 3.

Hankelsche Zylinderfunktionen.

Unterwirft man die Funktion $\tau\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ in (2. 4), die bei ganzen g als eine Lösung von (1. 1. 4) konstruiert wurde, wegen (1. 3) der Forderung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tau\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 4\pi i \frac{\partial}{\partial y}\tau\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},$$

so kann diese partielle Differentialgleichung zur näheren Bestimmung von

$$g(4zx - y^2) = g(v)$$

gebraucht werden. Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung von g sind identisch verknüpft durch

$$y g_x + 2z g_y = 0,$$

daher wird

$$\begin{aligned}\tau_{xx} - 4\pi i \tau_y &= e^{2\pi i\left[\frac{y^3}{12 z^2} - \frac{xy}{2z}\right]}\Big\{g_{xx} - \frac{2\pi i y}{z} g_x - \frac{\pi^2 y^2}{z^2} g \\ &\qquad - 4\pi i\Big[g_y + \frac{\pi i}{2 z^2}(y^2 - 2zx) g\Big]\Big\} \\ &= e^{2\pi i\left[\frac{y^3}{12 z^2} - \frac{xy}{2z}\right]}\Big\{g_{xx} - \frac{\pi^2}{z^2}(4zx - y^2) g - \frac{2\pi i}{z} y g_x - 4\pi i g_y\Big\} \\ &= e^{2\pi i\left[\frac{y^3}{12 z^2} - \frac{xy}{2z}\right]}\Big\{g_{xx} - \frac{\pi^2 v}{z^2} g\Big\}.\end{aligned}$$

Das postulierte Schwinden der linken Seite liefert eine homogene lineare Differentialgleichung für g, die durch Entfernen von $x = \frac{v+y^2}{4z}$ als gewöhnliche Differentialgleichung in v sich vereinfacht zu

$$(1) \qquad g_{vv} - \frac{\pi^2}{16 z^4} v g = 0.$$

Die volle Lösung von (1) erhält man durch Betrachtung des bestimmten Integrales

$$\int_{(-1)} d s \, \Gamma(-s) \Gamma\left(-s-\tfrac{1}{3}\right) v^{1+3s},$$

welches, längs $\Re(s) = -1$ erstreckt, eine in v ganze Funktion erklärt. Bleibt allgemeiner

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0$$

und setzt man

$$\int_{(-1)} d s \, \Gamma(-s) \Gamma\left(-s-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\left(\frac{1}{3}+2s\right)} v^{1+3s} = f(v),$$

so zeigt die Theorie der Γ-Funktion, daß

$$\frac{1}{v} f''(v) = q \int_{(-1)} d s \left(s+\frac{1}{3}\right) s \cdot \Gamma(-s) \Gamma\left(-s-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{3}+2s} v^{-2+3s}$$

$$= \frac{q \alpha^2}{4} \int_{(-2)} d \sigma \, \Gamma(-\sigma) \Gamma\left(-\sigma-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{3}+2\sigma} v^{1+3\sigma}$$

wird, wobei $f(v)$ die lineare Differentialgleichung zuläßt

$$f''(v) - \frac{q \alpha^2}{4} f(v) = 0,$$

die für

$$\alpha = \frac{\pi}{6 z^2}$$

auf (1) zurückfällt, weshalb

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{g}{f}\right) = 0$$

wird. Der folgende Ausdruck erfüllt also (1):

$$(2) \qquad g(v) = \frac{e^{-\frac{7 \pi i}{12}}}{2 \pi^2 \alpha} \int_{(-1)} d s \, \Gamma(-s) \Gamma\left(-s-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\pi}{12 z^2}\right)^{\frac{1}{3}+2s} v^{1+3s},$$

wenn α eine von v unabhängige Größe darstellt. Verlegt man ds in (2) nach links und beachtet die Kleinheit von $|\Gamma(s)|$ für $|J(s)| \to \infty$, so zeigt Cauchys Integralsatz für jedes $n > 2$

$$(3) \qquad \lim_{\Re(v) \to \infty} v^n g(v) = 0.$$

Bildet man andererseits die dreiwertige Funktion

$$v^{-\frac{1}{3}} g\left(v^{\frac{2}{3}}\right),$$

so genügt sie, in (1) eingetragen, der Differentialgleichung zweiter Ordnung für Zylinderfunktionen vom Argument v und Parameter $\frac{1}{3}$. Eine jede solche Zylinderfunktion kann erhalten werden durch lineare Kombination der Besselschen $J_{\pm\frac{1}{3}}(v)$. Die Grenzbedingung (3) bestimmt diese Kombination als Hankelsche Zylinderfunktion erster Art, welche üblicherweise für $|\arg(v)| < \frac{\pi}{2}$ durch

$$(2') \qquad i\,\pi^{\frac{3}{2}} H_{\frac{1}{3}}(v) = \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \int_{1+}^{i\infty} d\tau\,(\tau^2 - 1)^{-\frac{1}{6}} e^{iv\tau}$$

erklärt wird. Bei solcher Bezeichnung entsteht dann

$$(4) \qquad g(v) = \frac{1}{\alpha} v^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}\left(\frac{\pi i}{6 z^2} v^{\frac{3}{2}}\right),$$

und aus (2) oder (2') kann $g(v)$ im Streifen $\left\{\begin{array}{l} |J(v)| < b \\ |\Re(v)| \to \infty \end{array}\right.$ beurteilt werden. Die Sattelpunktsmethode zeigt für $|J(v)| < b$

$$(3') \qquad \lim_{\Re(v)\to\infty} e^{\left(v^{\frac{4}{3}}\right)} g(v) = 0$$

und

$$(3'') \qquad \lim_{\Re(v)\to-\infty} g(v) = 0.$$

Beide Schätzungen sind vermöge (2.4) einzutragen in unsere Elementarlösung $\tau\binom{x}{y}$ von (2.1).

§ 4.

Periode und Normierung.

Den Bedingungen (1.4.3.1) genügt wegen (2.4) und (3.4) die in x ganze Funktion

$$(1) \qquad \tau\binom{x}{y} = \frac{1}{\alpha} e^{2\pi i\left[\frac{y^3}{12 z^2} - \frac{x y}{2 z}\right]} (4 z x - y^2)^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}\left[\frac{\pi i}{6 z^2}(4 z x - y^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Unsere Voraussetzung $z > 0$ erlaubt die Beurteilung des Wachstums von $\tau\binom{x}{y}$ in jedem horizontalen Streifen der x-Ebene. Das in beiden Streifenenden verschiedene Verhalten von g zeigt wegen (3.3'.3'') für festes $J(x)$, y, z das Vorhandensein des Grenzwertes

$$\lim_{\Re(x)\to\infty} e^{\left(x^{\frac{6}{4}}\right)} \tau\binom{x}{y} = 0,$$

und wegen

$$0 < J(y)$$

bewirkt der Exponentialfaktor in (1) sogar

$$\lim_{|\Re(x)| \to \infty} e^{x|^{\frac{3}{4}}} \tau\binom{x}{y} = 0 \tag{2}$$

in beiden Streifenenden. Daher stellt für beliebiges x, $J(y) > 0$ und $z > 0$ der Ausdruck

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} {}_k\, \tau\binom{x+k}{y} = \Theta^*\binom{x}{y} \tag{3}$$

als ganze Transzendente von x eine Lösung von (1. 1. 2. 3. 4) dar. Durch Verfügung über die nur von z abhängige Größe α in (3. 2) gelingt nunmehr die Identifizierung von Θ^* mit der kubischen Thetareihe von § 1, wenn (1. 5) erfüllt ist, d. h. für

$$\lim_{J(y) \to \infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_k\, \tau\binom{k}{y} = 1.$$

Das Grenzverhalten von $H_{\frac{1}{3}}(v)$ für $J(v) \to \infty$ wird nach (3. 2') in erster Näherung gegeben durch

$$H_{\frac{1}{3}}(v) = e^{-\frac{5\pi i}{12}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{iv}}{\sqrt{v}} [1 + O(v^{-1})].$$

Somit gibt $z > 0 \equiv k(1)$; $\Re(y) = 0$ und $J(y) \to \infty$ eine Größenschätzung

$$\frac{\pi}{2z\sqrt{3}} e^{\frac{2\pi i}{3}} (4zk - y^2)^{\frac{3}{4}} H_{\frac{1}{3}}\left[\frac{\pi i}{6z^2}(4zk - y^2)^{\frac{3}{2}}\right] = e^{-\frac{\pi}{6z^2}(4zk-y^2)^{\frac{3}{2}}} \{1 + O(y^{-3})\}.$$

Im Exponenten rechter Hand gilt aber längs $\Re(y) = 0 < J(y)$

$$(-y^2 + 4kz)^{\frac{3}{2}} = i y^3\left[1 - \frac{6kz}{y^2} + \frac{12k^2z^2}{y^4} + O(y^{-6})\right]$$

$$= i y^3 - 6ikzy + 12i\frac{k^2z^2}{y} + O(y^{-3}),$$

woraus

$$e^{-\frac{\pi}{6z^2}(4kz-y^2)^{\frac{3}{2}}} \{1 + O(y^{-3})\} = e^{-\frac{\pi i y^3}{6z^2} + \frac{\pi i k y}{z} - \frac{2\pi i k^2}{y}} [1 + O(y^{-3})]$$

folgt, und

$$\frac{\alpha\pi e^{\frac{2\pi i}{3}}}{z\sqrt{6}} \tau\binom{k}{y} = \sqrt{\frac{-2}{iy}}\, e^{\pi i k^2\left(\frac{-2}{y}\right)} [1 + O(y^{-2})].$$

Die lineare Transformation der geraden elliptischen Transzendenten $\Theta\begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{y} \\ 0 \end{Bmatrix}$ liefert durch Summation über k für $l = 1, 2, \ldots$

$$\frac{\alpha\pi e^{\frac{2\pi i}{3}}}{z\sqrt{6}} \sum_{-l}^{l} {}_k \lim_{J(y) \to \infty} \tau\binom{k}{y} = \frac{\alpha\pi e^{\frac{2\pi i}{3}}}{z\sqrt{6}} \lim_{J(y) \to \infty} \sum_{-l}^{l} {}_k\, \tau\binom{k}{y} = 1 + O(l^{-1}),$$

was mit $\alpha \pi e^{\frac{2\pi i}{3}} = z\sqrt{6}$ zu $\Theta^*\binom{x}{y} = \Theta\binom{x}{y}$ führt. Trägt man den so bestimmten Wert von α in (1.) ein, so folgt

$$(1') \qquad \tau\binom{x}{y} = \frac{\pi e^{\frac{2\pi i}{3}\left[\frac{y^3}{4z^2} - \frac{3xy}{2z} + 1\right]}}{z\sqrt{6}} (4zx - y^2)^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}\left[\frac{\pi i}{6z^2}(4zx - y^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Da nur *eine* analytische Lösung des Systems (2. 1. 2. 3. 4. 5) bestehen kann, so wird die aus (1') gebildete periodische Funktion

$$(4) \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k\, \tau\binom{x+k}{y} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_h\, e^{2\pi i\left(xh + \frac{y}{2}h^2 + \frac{z}{3}h^3\right)}$$

für alle

$$z > 0 \quad \text{und } J(y) > 0.$$

Eine Probe für die Richtigkeit der eben gefundenen Darstellung (4. 1') kann gegeben werden mittels Fouriers Umkehrformel, die aus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(t)\, e^{-2\pi i t u} = g(u)$$

auf

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du\, g(u)\, e^{2\pi i u t} = f(t)$$

schließt.

Wegen

$$(5) \qquad 1 = \int_0^1 dx\, \Theta\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \tau\binom{x}{y}$$

und der für jedes x bestehenden Integraldarstellung

$$\frac{\pi i}{3} e^{\frac{\pi i}{6}} x^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}\left\{2i\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} dv\, e^{iv^3 + ixv}$$

ist die Umkehrung des bedingt konvergenten Integrales zu leisten:

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}} t^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}\left(\frac{4\pi i}{3} t^{\frac{3}{2}}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} du\, e^{\frac{2\pi i}{3}(u^3 - 1) + 2\pi i t u} \quad \text{für } J(t) = 0.$$

Will man die eingehenden Konvergenzschwierigkeiten umgehen, so betrachte man direkt das Integral

$$e^{-\frac{2\pi i}{3}u^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, t^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}\left(\frac{4\pi i}{3} t^{\frac{3}{2}}\right)$$

und stelle durch Verlagerung von dt und Anwendung der Sattelpunktsmethode seinen Wert als konstant fest.

Bestimmte Integrale des Typs $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\,u\,e^{2\pi i(tu+u^3)}$ müssen ausgewertet werden im Zusammenhang mit gewissen optischen Problemen und sind schon lange bekannt [1]). Andererseits kann die näherungsweise Bestimmung Hankelscher Funktionen $H_s(t)$ für $s \to \infty$ und $t \to \infty$ reduziert werden auf das Grenzverhalten in einer Veränderlichen von $H_{\frac{1}{3}}(t)$ für $t \to \infty$ [2]). Neben dem elementaren Fall halbzahligen Zeigers in $H_{\frac{1}{2}}(v)$ scheint also $H_{\frac{1}{3}}(v)$ unter den $H_s(v)$ auch noch eine Art Vorzugsstellung zu verdienen.

§ 5.
Elementarer Grenzfall.

Die über k erstreckte Reihe (4. 4) aus Zylinderfunktionen konnte in ihrem Konvergenzverhalten geprüft werden durch das asymptotische Wachstum Hankelscher Funktionen $H_{\frac{1}{3}}(v)$ in der abgeschlossenen Halbebene $0 \leqq J(v)$. Als konvergenzverstärkenden Prozeß ziehen wir jetzt die Verkleinerung von z in Betracht, und schränken übrigens zunächst x ein durch

(1) $$-1 < 2x < 1,$$

woraus die Positivität von $x+1$ folgt, während $x-1 < 0$ bleibt. Um die Funktionswerte mit Argumenten $x - \frac{y^2}{4z}$ ihrem Betrag nach schroff zu scheiden, lasse man weiter y mit z klein werden. Für

(1′) $$0 < J(\eta) \qquad \text{und} \qquad 0 < \varepsilon < \tfrac{1}{2}$$

wähle man nämlich

(2) $$y = \eta\, z^{\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

dann wird

$$\frac{\tau\binom{x+1}{y}}{\tau\binom{x}{y}} = e^{-\frac{\pi i y}{z}} \frac{\{4z(x+1)-y^2\}^{\frac{1}{2}}}{\{4zx-y^2\}^{\frac{1}{2}}} \frac{H_{\frac{1}{3}}\left[\frac{\pi i}{6z^2}\{4z(x+1)-y^2\}^{\frac{3}{2}}\right]}{H_{\frac{1}{3}}\left[\frac{\pi i}{6z^2}(4zx-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]} \quad \text{für } z < 0:$$

$$= e^{-\pi i \eta z^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} - \frac{\pi}{6z^2} 8 z^{\frac{3}{2}} \left\{\left(x+1-\frac{\eta^2}{4}z^{2\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(x-\frac{\eta^2}{4}z^{2\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}} O(1)$$

$$= e^{-\pi i z^{-\frac{1}{2}}\left(\eta z^{\varepsilon} - \frac{4i}{3}\right)} O(1)$$

$$= O\left\{e^{-\left(z^{-\frac{1}{2}}\right)}\right\},$$

---

[1]) Airy, Intensity of light in the neighbourhood of a Caustic, Trans. Cambridge Philos. Soc. 6 (1838).

[2]) Watson, Theory of Bessel Functions, Cambridge 1922, S. 190 u. 249.

strebt also zugleich mit z gegen Null. Bildet man andererseits, vom nämlichen Intervall in x ausgehend, die Größenordnung von $\tau\binom{x-1}{y}$, so erscheint diesmal als Leitglied der asymptotischen Formel nicht die Zylinderfunktion, sondern der Exponentialfaktor, und es entsteht die schwächere Aussage

$$\text{(2')} \qquad \frac{\tau\binom{x-1}{y}}{\tau\binom{x}{y}} = O\left\{e^{-(z^{\varepsilon}-\frac{1}{2})}\right\}.$$

In der Summe $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}_k\, \tau\binom{x+k}{y}$ ist daher bei unseren Annahmen der „Sattelpunkt“ $k = 0$ Träger einer Näherung für $\Theta\binom{x}{y}$, entsprechend dem seit Riemann bei bestimmten Integralen gebräuchlichen Verfahren.

Macht man entsprechend zu (2) auch x mit z klein, so kann (2') noch etwas verschärft werden. Um $(4zx - y^2)^{\frac{3}{2}}$ von zweiter Dimension in z zu machen, so daß die Hankelsche Funktion in (4. 1') ein von z freies Argument enthält, wählen wir nun in (2) $\varepsilon = \frac{1}{6}$, d. h.

$$y = \eta z^{\frac{2}{3}};$$

und mit beliebigem ξ sei dementsprechend

$$x = \xi z^{\frac{1}{3}},$$

also wegen (4. 1')

$$\text{(3)} \qquad z^{\frac{1}{3}}\tau\binom{x}{y} = \pi e^{\frac{2\pi i}{3}} b^{-\frac{1}{2}} e^{\pi i\left(\frac{\eta^3}{6}-\xi\eta\right)} (4\xi - \eta^2)^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}\left[\frac{\pi i}{6}(4\xi - \eta^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

An Stelle von (2') tritt hier

$$\frac{\tau\binom{x-1}{y}}{\tau\binom{x}{y}} = O(z^{\frac{1}{3}}),$$

und somit folgt aus (4. 4)

$$\lim_{u\to 0}\left\{u \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k\, e^{2\pi i\left(\xi h u + \eta\frac{h^2u^2}{2} + \frac{h^3u^3}{3}\right)}\right\} = \lim_{z\to 0} z^{\frac{1}{3}}\tau\binom{x}{y}$$

$$= \pi e^{\frac{2\pi i}{3}} b^{-\frac{1}{2}} e^{\pi i\left(\frac{\eta^3}{6}-\xi\eta\right)} (4\xi - \eta^2)^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}\left[\frac{\pi i}{6}(4\xi - \eta^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Die Hankelsche Zylinderfunktion $H_{\frac{1}{3}}(v)$ kann daher durch Grenzübergang erzeugt werden aus der kubischen Θ-Funktion.

Daß umgekehrt bei Annäherung an die Singularität $J(y) \to 0$; $z \to 0$ der Funktion $\Theta\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$ durch $H_{\frac{1}{3}}(v)$ Näherungswerte geliefert werden, ist von Interesse, weil eine Extrapolation folgender Art statthat:

$$\Theta\begin{Bmatrix} x\,n \\ 2\,y\,n^2 \\ 3\,z\,n^3 \end{Bmatrix} = \sum_{0}^{n-1}{}_{\alpha,\beta,\gamma}\, c_{\alpha,\beta,\gamma}\,\Theta\begin{Bmatrix} x + \frac{\alpha}{n^3} \\ 2\,y + \frac{\beta}{n^3} \\ 3\,z + \frac{\gamma}{n^3} \end{Bmatrix},$$

wobei $n = 1, 2, \ldots$, und die Vorzahlen c rational aufgebaut sind aus Einheitswurzeln der Ordnung n^3. Für den einfachen Fall $n = 2$ der elliptischen Thetareihe $\Theta\begin{Bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{Bmatrix}$ entspricht dem die bekannte Beziehung

$$(2 + 2\,i)\,\Theta\begin{Bmatrix} 2\,x \\ 8\,y \\ 0 \end{Bmatrix} = \sum_{0}^{1}{}_{\alpha,\beta}\, i^{\beta}\,\Theta\begin{Bmatrix} x + \frac{\alpha}{4} \\ 2\,y + \frac{\beta}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

(Eingegangen am 14. 7. 1934.)

Über die stetigen konvexen und die bikonvexen Funktionen.

Von

Georg Aumann in Princeton, N. J. (U. S. A.).

1. Einleitung. Ist $\xi = \varphi(x)$ eine eindeutige stetige wachsende Funktion im Intervall $a < x < b$ und $x = f(\xi)$ die (ebenfalls eindeutige stetige wachsende) Umkehrfunktion im Bildintervall $\alpha < \xi < \beta$, so nennen wir

$$f\left(\frac{\varphi(x_1) + \cdots + \varphi(x_m)}{m}\right) = M_f^m(x_1, \ldots, x_m)$$

das *f-Mittel der m Zahlen* $x_1, \ldots, x_m$, $a < x_\mu < b$, $\mu = 1, \ldots, m$. Ist die im Intervall $0 \leqq s \leqq 1$ eindeutige Funktion $X(s)$ integrierbar und $a < X(s) < b$, so heißt

$$f\left(\int_0^1 \varphi(X(s))\, ds\right) = M_f^s(X)$$

das *f-Mittel der Funktion X*.

Bezeichnet nun $\eta = \chi(x)$ ebenfalls eine eindeutige stetige wachsende Funktion im Intervall $a < x < b$ und $x = g(\eta)$ ihre Umkehrung im Intervall $\alpha' < \eta < \beta'$, so kann man neben den f-Mitteln auch die g-Mittel betrachten. Wir wollen ein Funktionenpaar f, g (wobei die Ordnung wesentlich ist) ein *Jensensches Paar* nennen, wenn

$$\text{(J)} \qquad M_f^s(X(s)) \leqq M_g^s(X(s))$$

für jede beliebige integrierbare Funktion $X(s)$ mit $a < X(s) < b$ besteht. Weiter nennen wir f, g ein *Minkowskisches Paar*, wenn

$$\text{(M)} \qquad M_f^s(M_g^t(X(s, t))) \leqq M_g^t(M_f^s(X(s, t)))$$

gilt für jede beliebige im Quadrat $0 \leqq s, t \leqq 1$ integrierbare Funktion $X(s, t)$ mit $a < X(s, t) < b$. Die Frage nach Jensenschen bzw. Minkowskischen Funktionenpaaren ist der Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen. Jedoch fehlte bisher (auch nach dem Erscheinen der „Inequalities“ von Hardy-Littlewood-Pólya [1])) eine völlig befriedigende Antwort auf die Frage nach allen möglichen Paaren; eine solche soll hier gegeben werden.

[1]) Cambridge 1934.

Bei der Suche nach den Jensenschen Paaren wird man auf die stetigen wachsenden *konvexen* Funktionen geführt; die Frage nach den Minkowskischen Paaren erweist sich als gleichwertig mit der Frage nach den *bikonvexen* Funktionen; so nennen wir eine im Intervall $a < x < b$ stetig wachsende Funktion $\xi = \Phi(x)$ mit der Umkehrung $x = F(\xi)$, wenn für beliebige x_{ij}, $i, j = 1, 2$ mit $a < x_{ij} < b$ die Ungleichung

$$\text{(B)} \quad F\left(\frac{\Phi\left(\frac{x_{11}+x_{12}}{2}\right)+\Phi\left(\frac{x_{21}+x_{22}}{2}\right)}{2}\right) \leqq \frac{F\left(\frac{\Phi(x_{11})+\Phi(x_{21})}{2}\right)+F\left(\frac{\Phi(x_{12})+\Phi(x_{22})}{2}\right)}{2}$$

besteht. Über die zweimal differenzierbaren konvexen und bikonvexen Funktionen ist bisher bekannt:

1. *Die im Intervall $a < x < b$ zweimal differenzierbare Funktion $\Phi(x)$ ist dann und nur dann konvex, wenn $\Phi''(x) \geqq 0$ für $a < x < b$.*

2. *Die im Intervall $a < x < b$ zweimal stetig differenzierbare wachsende nicht lineare Funktion $\Phi(x)$ ist dann und nur dann bikonvex, wenn $\frac{\Phi'(x)}{\Phi''(x)}$ für $a < x < b$ positiv und konkav ist*[2]).

Dem füge ich hier hinzu:

3. *Jede (wachsende) stetige konvexe Funktion ist Limes einer Folge von (wachsenden) zweimal stetig differenzierbaren, ja sogar analytischen konvexen Funktionen.*

4. *Jede bikonvexe Funktion ist zweimal stetig differenzierbar und Limes einer Folge von analytischen bikonvexen Funktionen.*

Durch diese vier Aussagen ist eine vollständige Übersicht über die stetigen konvexen und die bikonvexen Funktionen und damit über die Gesamtheit aller Jensenschen und Minkowskischen Funktionenpaare, und somit auch über die zugehörigen Ungleichungen erreicht.

2. Jensensche Paare. Aus (J) folgt durch Spezialisieren von $X(s)$

$$\text{(J}^2\text{)} \qquad M_f^2(x_1, x_2) \leqq M_g^2(x_1, x_2)$$

für beliebige x_1, x_2. Aber auch das Umgekehrte gilt; man weist nämlich leicht nach, daß aus (J²) die Ungleichung

$$\text{(J}^m\text{)} \qquad M_f^m(x_1, \ldots, x_m) \leqq M_g^m(x_1, \ldots, x_m)$$

folgt für beliebige $x_1, \ldots, x_m$. Zu diesem Zweck führt man, einer von Cauchy stammenden Methode folgend, die zwei Induktionen

$$\{(\text{J}^2), (\text{J}^m)\} \to (\text{J}^{2m}),$$
$$(\text{J}^m) \to (\text{J}^{m-1})$$

---

[2]) „Inequalities", S. 88, Satz 106, I.

durch, wobei die funktionalen Beziehungen zwischen den M_f (M_g) für verschiedene Argumentezahl und ihre Monotonieeigenschaften zu benutzen sind[3]). Von (J^m) schließt man dann auf (J) durch den Grenzübergang $m \to \infty$.

Setzt man $\xi_\mu = \varphi(x_\mu)$, $\mu = 1, 2$, und $\chi(f(\xi)) = F(\xi)$, nimmt von (J^2) beiderseits den χ-Wert, so erhält man

$$\text{(K)} \qquad F\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right) \leqq \frac{F(\xi_1)+F(\xi_2)}{2},$$

d. h. $F(\xi)$ ist konvex. Umgekehrt folgt aus (K) die Ungleichung (J^2) und damit (J). Wir haben somit den

Satz 1. *Das Paar stetiger wachsender Funktionen* $f(\xi)$, $g(\eta)$ *bildet dann und nur dann ein Jensensches Paar, wenn die durch* $f(\xi) = g(F(\xi))$ *erklärte Funktion* $F(\xi)$ *im ganzen Definitionsintervall von* $f(\xi)$ *konvex ist.*

3. Stetige wachsende konvexe Funktionen. Ohne Beweis erwähne ich den die wachsenden zweimal differenzierbaren konvexen Funktionen charakterisierenden

Satz 2. *Die im Intervall* $a < x < b$ *wachsende zweimal differenzierbare Funktion* $\varphi(x)$ *ist dann und nur dann konvex, wenn* $\varphi'(x) > 0$ *und* $\varphi''(x) \geqq 0$ *ist für* $a < x < b$.

Wir beweisen nun den

Satz 3. *Jede im Intervall* $a < x < b$ *(wachsende) stetige konvexe Funktion* $\varphi(x)$ *ist Limes einer Folge von im Intervall* $a < x < b$ *(wachsenden) zweimal stetig differenzierbaren, ja sogar analytischen konvexen Funktionen.*

Beweis. Sei $x_1, x_2, x_3, \ldots$ eine Folge von Zahlen, die im Intervall $a < x < b$ überall dicht liegen. Durch jeden Punkt $(x_\nu, \varphi(x_\nu))$ der Kurve $\xi = \varphi(x)$ kann man eine Stützgerade legen[4]), d. h. eine Gerade

$$\xi = \alpha_\nu x + \beta_\nu \quad (\alpha_\nu > 0, \text{ falls } \varphi(x) \text{ wachsend}),$$

so daß $\varphi(x_\nu) = \alpha_\nu x_\nu + \beta_\nu$, und $\varphi(x) \geqq \alpha_\nu x + \beta_\nu$ für $a < x < b$ gilt. Die Funktionen

$$\Phi_n(x) = \operatorname{Max}(\alpha_1 x + \beta_1, \ldots, \alpha_n x + \beta_n),$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$, haben offenbar den Limes $\varphi(x)$. Nun ersetzen wir Φ_n durch eine (wachsende) zweimal differenzierbare konvexe Funktion $\varphi_n(x)$,

---

[3]) Man vergleiche z. B.: Pólya-Szegö, Aufgaben und Lehrsätze der Analysis I (1925), S. 50—51.

[4]) Siehe etwa „Inequalities", S. 94, Satz 112.

die sich um weniger als $\frac{1}{n}$ von Φ_n unterscheidet. Wir betrachten den analytischen Zweig $\xi = \varphi_n(x)$ der Kurve

$$\prod_{\nu=1}^{n} (\xi - \alpha_\nu x - \beta_\nu) = \varepsilon > 0,$$

der oberhalb der Kurve $\xi = \Phi_n(x)$ verläuft. Es gilt

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\xi' - \alpha_\nu}{\xi - \alpha_\nu x - \beta_\nu} = 0$$

(also $\xi' > 0$, wenn $\varphi(x)$ wachsend) und

$$\xi'' \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\xi - \alpha_\nu x - \beta_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\xi' - \alpha_\nu}{\xi - \alpha_\nu x - \beta_\nu}\right)^2,$$

also $\xi'' > 0$. Man kann $\varepsilon = \varepsilon(n)$ so klein wählen, daß

$$0 < \varphi_n(x) - \Phi_n(x) < \frac{1}{n}$$

sogar für alle reellen x, insbesondere also im Intervall $a < x < b$ gilt. Damit ist der Satz 3 bewiesen.

Die Sätze 1, 2, 3 erlauben alle möglichen Jensenschen Funktionenpaare zu bilden.

4. Minkowskische Paare. Aus (M) folgt durch Spezialisierung von $X(s, t)$ die Ungleichung

$$(\mathrm{M}^{2,2}) \quad M_f^2(M_g^2(x_{11}, x_{12}), M_g^2(x_{21}, x_{22})) \leqq M_g^2(M_f^2(x_{11}, x_{21}), M_f^2(x_{12}, x_{22}))$$

für beliebige x_{ij}, $i, j = 1, 2$, $a < x_{ij} < b$. Ähnlich wie in 2 beweist man, daß aus $(\mathrm{M}^{2,2})$ allgemein

$$(\mathrm{M}^{m,n}) \quad M_f^m(M_g^n(x_{11}, \ldots, x_{1n}), \ldots, M_g^n(x_{m1}, \ldots, x_{mn}))$$
$$\leqq M_g^n(M_f^m(x_{11}, \ldots, x_{m1}), \ldots, M_f^m(x_{1n}, \ldots, x_{mn}))$$

folgt für beliebige $x_{\mu\nu}$, $\mu = 1, \ldots, m$, $\nu = 1, \ldots, n$, $a < x_{\mu\nu} < b$, indem man die vier Induktionen

$$\{(\mathrm{M}^{2,n}), (\mathrm{M}^{m,n})\} \rightarrow (\mathrm{M}^{2m,n}),$$
$$(\mathrm{M}^{m,n}) \rightarrow (\mathrm{M}^{m-1,n}),$$
$$\{(\mathrm{M}^{m,2}), (\mathrm{M}^{m,n})\} \rightarrow (\mathrm{M}^{m,2n}),$$
$$(\mathrm{M}^{m,n}) \rightarrow (\mathrm{M}^{m,n-1})$$

ausführt. Aus $(\mathrm{M}^{m,n})$ ergibt sich dann (M) durch Grenzübergang. Setzt man $\chi(x_{ij}) = y_{ij}$ $(x_{ij} = g(y_{ij}))$ und $y = \chi(f(\xi)) = F(\xi)$ mit der

Umkehrung $\xi = \varphi(g(y)) = \Phi(y)$, $\alpha < \xi < \beta$, $\alpha' < y < \beta'$, so wird aus ($M^{2,2}$):

$$\text{(B)}\quad F\left(\frac{\Phi\left(\frac{y_{11}+y_{12}}{2}\right)+\Phi\left(\frac{y_{21}+y_{22}}{2}\right)}{2}\right)$$
$$\leqq \frac{F\left(\frac{\Phi(y_{11})+\Phi(y_{21})}{2}\right)+F\left(\frac{\Phi(y_{12})+\Phi(y_{22})}{2}\right)}{2}$$

für beliebige y_{ij}, $i, j = 1, 2$, $\alpha' < y_{ij} < \beta'$. Umgekehrt folgt aus (B) wieder ($M^{2,2}$) und damit (M). Wir definieren:

Die im Intervall $\alpha' < y < \beta'$ stetig wachsende Funktion $\xi = \Phi(y)$ heißt *bikonvex*, wenn (B) für beliebige y_{ij} mit $\alpha' < y_{ij} < \beta'$ statthat.

Wir haben demnach den

Satz 4. *Das Paar $f(\xi)$, $g(\eta)$ wachsender stetiger Funktionen ist dann und nur dann ein Minkowskisches Paar, wenn die durch $g(\eta) = f(\Phi(\eta))$ definierte Funktion $\Phi(\eta)$ im Definitionsintervall von $g(\eta)$ bikonvex ist.*

Die Bezeichnung „bikonvex" wird gerechtfertigt durch die Tatsache, daß jede bikonvexe Funktion konvex ist. Dies ergibt sich unmittelbar aus (B), wenn man darin $y_{21} = y_{12}$, $y_{22} = y_{11}$ setzt.

5. Bikonvexe Funktionen. Wir beweisen den wichtigen

Satz 5. *Jede bikonvexe Funktion ist zweimal stetig differenzierbar.*

Den Beweis führen wir in drei Schritten.

1. Wir zeigen zunächst, daß die bikonvexe Funktion $\Phi(y)$ einmal differenzierbar ist. Wie wir bereits wissen, ist $\Phi(y)$ stetig und konvex. Nun besitzt jede stetige konvexe Funktion eine links- und eine rechtsseitige Ableitung[5]).

Angenommen, an der Stelle y_0 stimmen die links- und rechtsseitige Ableitung nicht überein. Zur Vereinfachung dürfen wir annehmen, daß $y_0 = 0$, $\Phi(y_0) = 0$ ist; andernfalls betrachte man die ebenfalls bikonvexe Funktion $\Phi(y_0 + y) - \Phi(y_0)$. Nach Annahme ist also

$$\lim_{y \to +0} \frac{\Phi(y)}{y} = p, \qquad \lim_{y \to -0} \frac{\Phi(y)}{y} = q, \qquad 0 < q < p.$$

Wir wählen nun zwei Zahlen p', q' in solcher Weise, daß

$$0 < p < p', \qquad 0 < q' < q$$

und

$$\left(\frac{q}{p}\right)^2 < \frac{q'}{p'}.$$

[5]) „Inequalities", S. 91, Satz 111.

Man kann nun ein $\varrho > 0$ finden, so daß

$$p y \leqq \Phi(y) \leqq p' y \quad \text{für} \quad 0 < y < \varrho,$$
$$q y \leqq \Phi(y) \leqq q' y \quad \text{für} \quad -\varrho < y < 0,$$

und auch für die Umkehrfunktion

$$\frac{\xi}{p'} \leqq F(\xi) \leqq \frac{\xi}{p} \quad \text{für} \quad 0 < \xi < \varrho,$$
$$\frac{\xi}{q'} \leqq F(\xi) \leqq \frac{\xi}{q} \quad \text{für} \quad -\varrho < \xi < 0.$$

Nun setzen wir $y_{11} = -p\tau$, $y_{12} = y_{21} = 0$, $y_{22} = q\tau$ und wählen die Zahl $\tau > 0$ so klein, daß wir im folgenden die vorausgehenden Ungleichungen anwenden können. Diese Werte setzen wir nun in (B) ein und erhalten:

$$L = F\left(\frac{\Phi\left(\frac{-p\tau}{2}\right) + \Phi\left(\frac{q\tau}{2}\right)}{2}\right) \leqq \frac{F\left(\frac{\Phi(-p\tau)}{2}\right) + F\left(\frac{\Phi(q\tau)}{2}\right)}{2} = R;$$

andererseits folgt:

$$L \geqq F\left(\frac{-\frac{p\tau}{2}q + \frac{q\tau}{2}p}{2}\right) = 0,$$
$$R \leqq \frac{1}{2}\left\{\frac{\Phi(-p\tau)}{2}\frac{1}{q} + \frac{\Phi(q\tau)}{2}\frac{1}{p}\right\} \leqq \frac{1}{2}\left\{\frac{-p\tau}{2}\frac{q'}{q} + \frac{q\tau}{2}\frac{p'}{p}\right\}$$
$$= \frac{\tau}{4pq}(-q'p^2 + p'q^2) < 0,$$

daher $L > R$, im Widerspruch mit oben. Die Annahme, $\Phi(y)$ wäre nicht differenzierbar, ist also falsch.

2. Als wachsende konvexe differenzierbare Funktion ist $\Phi(y)$ stetig differenzierbar, $\Phi'(y)$ eine stetige positive nicht fallende Funktion. Die Umkehrfunktion $y = F(\xi)$ von $\xi = \Phi(y)$ hat dann eine stetige positive nicht wachsende Ableitung $F'(\xi)$. Von $F'(\xi)$ können wir nun noch mehr behaupten.

Setzt man $F\left(\frac{\Phi(y_1) + \Phi(y_2)}{2}\right) = L(y_1, y_2)$, so lautet (B)

$$L\left(\frac{y_{11} + y_{12}}{2}, \frac{y_{21} + y_{22}}{2}\right) \leqq \frac{L(y_{11}, y_{21}) + L(y_{12}, y_{22})}{2},$$

d. h. $L(y_1, y_2)$ ist eine konvexe Funktion. Insbesondere ist dann die Funktion $L(x_0 + \lambda t, y_0 + \mu t)$ konvex bezüglich t; daher ist

$$\frac{d}{dt} L = F'\left(\frac{\Phi(x_0 + \lambda t) + \Phi(y_0 + \mu t)}{2}\right) \cdot \left(\frac{\lambda \Phi'(x_0 + \lambda t)}{2} + \frac{\mu \Phi'(y_0 + \mu t)}{2}\right)$$

stetig und nicht fallend in t. Wir beschränken uns auf den Fall, daß $\lambda > 0$, $\mu \geqq 0$, und setzen

(5, 1) $$\Phi(x_0 + \lambda t) = u(t), \quad \Phi(y_0 + \mu t) = v(t);$$

dann ist

$$F'\left(\frac{u+v}{2}\right)\left(\frac{\lambda}{F'(u)}+\frac{\mu}{F'(v)}\right) \tag{5, 2}$$

eine stetige nicht fallende Funktion von t. Aus (5, 1) folgt

$$H(u, v) \equiv -x_0\mu + y_0\lambda + \mu F(u) - \lambda F(v) = 0. \tag{5, 3}$$

Wir können dann sagen, daß auf der Kurve (5, 3) die Funktion (5, 2) mit wachsendem u nicht fällt. Also ist für $u_1 < u_2$ mit $\frac{1}{F'(u)} = \Omega(u)$ (Ω ist positiv, stetig und nicht fallend)

$$\frac{\lambda\,\Omega(u_1) + \mu\,\Omega(v_1)}{\Omega\left(\frac{u_1+v_1}{2}\right)} \leqq \frac{\lambda\,\Omega(u_2) + \mu\,\Omega(v_2)}{\Omega\left(\frac{u_2+v_2}{2}\right)},$$

oder

$$\frac{\Omega\left(\frac{u_2+v_2}{2}\right)}{\Omega\left(\frac{u_1+v_1}{2}\right)} \leqq \frac{\lambda\,\Omega(u_2) + \mu\,\Omega(v_2)}{\lambda\,\Omega(u_1) + \mu\,\Omega(v_1)}, \tag{5, 4}$$

wobei v_1, v_2 aus der Gleichung (5, 3) zu den zugehörigen u zu berechnen sind.

Für $\mu = 0$ ist $v_1 = v_2 = v$ und nach (5, 4)

$$\frac{\Omega\left(\frac{u_2+v}{2}\right)}{\Omega\left(\frac{u_1+v}{2}\right)} \leqq \frac{\Omega(u_2)}{\Omega(u_1)},$$

oder

$$\frac{\Omega\left(\frac{u_2+v}{2}\right) - \Omega\left(\frac{u_1+v}{2}\right)}{\frac{u_2+v}{2} - \frac{u_1+v}{2}} \leqq \frac{\Omega(u_2) - \Omega(u_1)}{u_2 - u_1} \cdot \frac{2\,\Omega\left(\frac{u_1+v}{2}\right)}{\Omega(u_1)}. \tag{5, 5}$$

Angenommen, für ein bestimmtes u_1 und für jedes u_2 mit $0 < u_2 - u_1 < \varepsilon$ sei

$$\frac{\Omega(u_2) - \Omega(u_1)}{u_2 - u_1} < K, \tag{5, 6}$$

K eine Konstante. Aus (5, 5) und (5, 6) folgt

$$\frac{\Omega(u'+\delta) - \Omega(u')}{\delta} \leqq 2K\,\frac{\underset{\alpha \leq v < \beta}{\operatorname{Max}}\ \Omega\left(\frac{u_1+v}{2}\right)}{\Omega(u_1)},$$

für beliebiges δ mit $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$ und u' mit

$$\frac{u_1+\alpha}{2} < u' < \frac{u_1+\beta}{2}$$

Durch Wiederholung dieser Schlußweise[6]) ergibt sich, daß zu jedem Punkt u des Intervalls $\alpha < u < \beta$ ein $\varepsilon(u)$ angegeben werden kann, so daß

$$\frac{\Omega(u+\delta)-\Omega(u)}{\delta} \leqq K(u), \tag{5, 7}$$

sobald $0 < \delta < \varepsilon(u)$. Für ein gewisses u_1 ist aber obige Annahme sicher zutreffend. Würden nämlich für jeden Punkt in jeder noch so kleinen Umgebung die Differenzenquotienten beliebig große Werte annehmen, dann wäre die Funktion $\Omega(u)$ in keinem Punkt des Intervalls $\alpha < u < \beta$ beschränkt, was aber unmöglich ist. Unser Ergebnis ist somit, daß jede rechtsseitige Derivierte $D_+ \Omega(u)$ von $\Omega(u)$ beschränkt ist.

3. Aus (5, 4) folgt für $\mu > 0$ (also $v_1 < v_2$)

$$\frac{\Omega\left(\frac{u_2+v_2}{2}\right)-\Omega\left(\frac{u_1+v_1}{2}\right)}{\frac{u_2+v_2-(u_1+v_1)}{2}\,\Omega\left(\frac{u_1+v_1}{2}\right)\cdot 2} \tag{5, 8}$$

$$\leqq \frac{\lambda(u_2-u_1)\frac{\Omega(u_2)-\Omega(u_1)}{u_2-u_1}+\mu(v_2-v_1)\frac{\Omega(v_2)-\Omega(v_1)}{v_2-v_1}}{(u_2-u_1+v_2-v_1)(\lambda\,\Omega(u_1)+\mu\,\Omega(v_1))}.$$

Nun liefert in (5, 3) der Mittelwertsatz

$$0 = \mu(u_2-u_1)F'(\tilde{u}) - \lambda(v_2-v_1)F'(\tilde{v}),$$

oder

$$(u_2-u_1):(v_2-v_1) = \lambda\,\Omega(\tilde{u}):\mu\,\Omega(\tilde{v}),$$

wobei $u_1 < \tilde{u} < u_2$, $v_1 < \tilde{v} < v_2$ gilt. Dies in (5, 8) eingesetzt, ergibt

$$\frac{\Omega\left(\frac{u_2+v_2}{2}\right)-\Omega\left(\frac{u_1+v_1}{2}\right)}{\left(\frac{u_2+v_2}{2}-\frac{u_1+v_1}{2}\right)\Omega\left(\frac{u_1+v_1}{2}\right)} \tag{5, 9}$$

$$\leqq 2\,\frac{\lambda^2\,\Omega(\tilde{u})\frac{\Omega(u_2)-\Omega(u_1)}{u_2-u_1}+\mu^2\,\Omega(\tilde{v})\frac{\Omega(v_2)-\Omega(v_1)}{v_2-v_1}}{(\lambda\,\Omega(\tilde{u})+\mu\,\Omega(\tilde{v}))(\lambda\,\Omega(u_1)+\mu\,\Omega(v_1))}.$$

Wir halten nun u_1, v_1 fest und machen den Grenzübergang $u_2 = x_\nu \to u_1$ und damit $v_2 = y_\nu \to v_1$. Da $\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\mu}{\Omega(u)}$, $\frac{\partial H}{\partial v} = -\frac{\lambda}{\Omega(v)}$, also sicher $\frac{\partial H}{\partial u} : \frac{\partial H}{\partial v} \neq 1:1$, so schneidet die Kurve $H(u, v) = 0$, auf der wir uns beim Grenzübergang bewegen, die Gerade $u + v = u_1 + v_1$ unter einem von Null verschiedenen Winkel. Wir haben daher die Freiheit,

---

[6]) Falls $\alpha = -\infty$ oder $\beta = +\infty$ ist, hat man diese Überlegung dahin abzuändern, daß man v nicht das ganze Intervall, sondern nur ein genügend großes beschränktes Teilintervall des Definitionsintervalls von $F(\xi)$ durchlaufen läßt.

beim Grenzprozeß die Folge $\left\{\frac{x_\nu + y_\nu}{2}\right\}$ nach Gutdünken zu wählen. Wir wollen nun $\frac{u_2 + v_2}{2}$ so gegen $\frac{u_1 + v_1}{2}$ konvergieren lassen, daß

$$\frac{\Omega\left(\frac{x_\nu + y_\nu}{2}\right) - \Omega\left(\frac{u_1 + v_1}{2}\right)}{\frac{x_\nu + y_\nu}{2} - \frac{u_1 + v_1}{2}}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

gerade gegen die obere rechte Derivierte $\overline{D}_+ \Omega\left(\frac{u_1 + v_1}{2}\right)$ konvergiert. Durch eine Teilfolgenauswahl können wir zusätzlich erreichen, daß auch die Quotienten

$$\frac{\Omega(x_\nu) - \Omega(u_1)}{x_\nu - u_1}, \quad \frac{\Omega(y_\nu) - \Omega(v_1)}{y_\nu - v_1}$$

konvergieren, etwa nach $D_+ \Omega(u_1)$ und $D_+ \Omega(v_1)$. Aus (5, 9) folgt somit

$$(5,10) \qquad \frac{\overline{D}_+ \Omega\left(\frac{u_1 + v_1}{2}\right)}{2\,\Omega\left(\frac{u_1 + v_1}{2}\right)} \leqq \frac{\lambda^2 \Omega(u_1) D_+ \Omega(u_1) + \mu^2 \Omega(v_1) D_+ \Omega(v_1)}{(\lambda \Omega(u_1) + \mu \Omega(v_1))^2}$$

$$\leqq \frac{\lambda^2 \Omega(u_1) \overline{D}_+ \Omega(u_1) + \mu^2 \Omega(v_1) \overline{D}_+ \Omega(v_1)}{(\lambda \Omega(u_1) + \mu \Omega(v_1))^2}$$

Hier dürfen wir nun z. B. $\lambda = \frac{1}{\Omega(u_1)}$, $\mu = \frac{1}{\Omega(v_1)}$ setzen und bekommen mit der Abkürzung $\frac{\overline{D}_+ \Omega(u)}{\Omega(u)} = \Psi(u)$

$$\Psi\left(\frac{u_1 + v_1}{2}\right) \leqq \frac{\Psi(u_1) + \Psi(v_1)}{2},$$

d. h. die Funktion $\Psi(u)$ ist konvex im Intervall $\alpha < u < \beta$. Da sie in jedem abgeschlossenen Teilintervall beschränkt ist, so ist sie nach einem bekannten Satz[7]) stetig. Die rechte obere Derivierte $\overline{D}_+ \Omega(u)$ ist also im ganzen Intervall stetig, und daher[8]) ist $\Omega(u)$ stetig differenzierbar. Dasselbe gilt dann auch von $F'(u)$, womit der Beweis von Satz 5 zu Ende ist.

6. Der Beweis von Satz 5 hat nebenbei noch eine notwendige Bedingung für die Bikonvexität von $\Phi(y)$ geliefert: Für jede bikonvexe Funktion $\Phi(y)$ ist

$$\frac{\Omega'}{\Omega} = -\frac{F''(\xi)}{F'(\xi)}$$

eine nicht negative stetige konvexe Funktion. Diese Bedingung ist z. B. erfüllt, wenn $-\frac{F''}{F'} \equiv 0$ ist, d. h. wenn $y = F(\xi)$ und damit $\xi = \Phi(y)$

[7]) l. c. [5]).

[8]) C. Carathéodory, Reelle Funktionen (1927), S. 534.

lineare Funktionen sind. Für solche Funktionen ist aber die Ungleichung (B) mit dem Gleichheitszeichen erfüllt. Von diesen trivialen bikonvexen Funktionen abgesehen, ist aber die oben angegebene Bedingung nicht hinreichend. Wir können aber aus (5, 10) eine hinreichende Bedingung herausbekommen, allerdings nur unter der Annahme, daß $\Psi'(u) \neq 0$ ist (was aber, wie wir noch sehen werden, eine wesentliche Bedingung ist). Wir wollen nämlich in (5, 10) λ und μ so wählen, daß (5, 10) möglichst scharf wird, d. h. also so, daß die rechte Seite von (5, 10) ein Minimum wird. Dies ist der Fall für

$$\lambda : \mu = \frac{1}{\Psi'(u_1)} : \frac{1}{\Psi'(v_1)}.$$

Setzt man diese Werte in (5, 10) ein, dann ergibt sich für die Funktion $\Psi'(u)$ die Ungleichung

$$\Psi'\left(\frac{u_1+v_1}{2}\right) \leqq \frac{2\,\Psi'(u_1)\,\Psi'(v_1)}{\Psi'(u_1)+\Psi'(v_1)}, \tag{5, 11}$$

die offenbar schärfer ist als die in 5 gewonnene Ungleichung, da das harmonische Mittel kleiner ist als das arithmetische. Anders geschrieben besagt (5, 11), daß die Funktion $\frac{1}{\Psi'(u)}$ *konkav* ist. Dies ist nun auch tatsächlich die entscheidende Bedingung, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 6. *Die stetige wachsende, nicht lineare Funktion $\xi = \Phi(y)$ mit der Umkehrfunktion $y = F(\xi)$ $(\alpha' < y < \beta'$, $\alpha < \xi < \beta)$ ist dann und nur dann bikonvex, wenn sie zweimal differenzierbar und*

$$-\frac{F'(\xi)}{F''(\xi)}$$

im Intervall $\alpha < \xi < \beta$ eine stetige positive konkave Funktion ist.

Beweis. Nach 5, 2. und Satz 5 ist die Funktion $L(y_1, y_2) = M_F^{\frac{1}{2}}(y_1, y_2)$ symmetrisch, konvex und zweimal stetig differenzierbar, wenn $\Phi(y)$ bikonvex ist. Offenbar gilt auch das Umgekehrte. Nun ist $L(y_1, y_2)$ konvex dann und nur dann[9]), wenn

(I) $\quad L_{11} \geqq 0$ und $L_{22} \geqq 0, \qquad$ (II) $\quad L_{11}L_{22} - L_{12}^2 \geqq 0$

ist, wobei die unteren Indizes an L die betreffenden partiellen Ableitungen bedeuten. Mit der Bezeichnung

$$\Phi(y_\nu) = \xi_\nu, \qquad \nu = 1, 2; \qquad \tfrac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) = \xi_3$$

ist

$$L_\nu = F'(\xi_3)\,\Phi'(y_\nu)\,\frac{1}{2} = \frac{F'(\xi_3)}{2F'(\xi_\nu)};$$

$F'(\xi)$ ist nämlich nach 5 positiv. Weiter haben wir

$$L_{12} = \frac{F''(\xi_3)}{4\,F'(\xi_1)\,F'(\xi_2)}$$

---

[9]) „Inequalities", S. 80, Satz 99.

und
$$L_{\nu\nu} = \frac{F''(\xi_3)}{4F'^2(\xi_\nu)} - \frac{F'(\xi_3)F''(\xi_\nu)}{2F'^3(\xi_\nu)}.$$

Setzt man wieder $-\frac{F''(\xi)}{F'(\xi)} = \Psi(\xi)$, so besagen (I)

$$\Psi\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right) \leqq 2\,\Psi(\xi_1) \tag{6,1}$$

und (II)

$$\frac{F'^2(\xi_3)}{16F'^2(\xi_1)F'^2(\xi_2)}\{(\Psi(\xi_3) - 2\,\Psi(\xi_1))(\Psi(\xi_3) - 2\,\Psi(\xi_2)) - \Psi^2(\xi_3)\} \geqq 0$$

oder

$$-\Psi\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right)\{\Psi(\xi_1) + \Psi(\xi_2)\} + 2\,\Psi(\xi_1)\,\Psi(\xi_2) \geqq 0. \tag{6,2}$$

Das Bestehen von (6, 1), (6, 2) für beliebiges ξ_1, ξ_2 in $\alpha < \xi < \beta$ ist sonach notwendig und hinreichend für die Bikonvexität von $\Phi(y)$. Aus (6, 1) folgt unmittelbar, daß $\Psi(\xi) \geqq 0$ ist, und weiter durch eine ähnliche Schlußweise wie die in 5, 2., daß $\Psi(\xi)$ im ganzen Intervall verschwindet, wenn es dies für eine einzige Stelle tut. Ist aber $\Psi(\xi)$ identisch Null, so sind $F(\xi)$ und $\Phi(y)$ linear, was uns hier nicht interessiert. Also haben wir

$$\Psi(\xi) > 0. \tag{6,3}$$

Dann nimmt aber (6, 2) die Form

$$\frac{1}{\Psi\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right)} \geqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Psi(\xi_1)} + \frac{1}{\Psi(\xi_2)}\right) \tag{6,4}$$

an, woraus sofort $\frac{1}{\Psi\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right)} \geqq \frac{1}{2\,\Psi(\xi_1)}$, d. h. (6, 1) folgt. Damit haben wir als notwendige und hinreichende Bedingungen die Ungleichungen (6, 3) und (6, 4). Die letztere ist gerade die Ungleichung (5, 11); sie besagt, daß $\frac{1}{\Psi(\xi)}$ eine konkave Funktion ist. Damit ist Satz 6 bewiesen.

Bemerkung. Die Funktion $\frac{F'(\xi)}{F''(\xi)}$ ist negativ stetig und konvex; man kann sie also nach Satz 3 durch analytische konvexe, und wie man durch eine kleine Abänderung der Approximation, die in 3 beschrieben wurde, erreichen kann, negative Funktionen approximieren. Aus Satz 6 folgt dann, daß die betreffenden, $\Phi(y)$ approximierenden analytischen Funktionen bikonvex sind. Wir haben somit das Ergebnis:

Jede bikonvexe Funktion ist Limes einer Folge von analytischen bikonvexen Funktionen.

Damit haben wir auch alle bikonvexen Funktionen in der Hand.

7. Schluß. Hinsichtlich Beispiele sei auf die reichhaltigen „Inequalities" verwiesen. Bezüglich der bikonvexen Funktionen scheint mir

die Tatsache bemerkenswert, daß gerade die Grenzfälle von positiven konkaven Funktionen, nämlich die positiven konstanten und linearen Funktionen, auf diejenigen bikonvexen Funktionen führen, die in den klassischen Ungleichungen von Schwarz und Minkowski auftreten:

1. $-\frac{F'(\xi)}{F''(\xi)} = 1$ ergibt durch Integration (von unwesentlichen Konstanten ist abgesehen): $y = -e^{-\xi}$, $\Phi(y) = -\log(-y)$, $y < 0$, und als zugehörige Ungleichung (M) in einfachster Form:

$$\int_0^1 e^{\int_0^1 \log X(s,t)\,ds}\,dt \leqq e^{\int_0^1 \log\left(\int_0^1 X(s,t)\,dt\right)ds}$$

für beliebiges $X(s,t) > 0$, die sogenannte verallgemeinerte Schwarzsche Ungleichung.

2. $-\frac{F'}{F''} = \alpha\xi$, $\alpha > 1$, $\xi > 0$, liefert $\left(1 - \frac{1}{\alpha} = \beta,\ 0 < \beta < 1\right)$:

$$y = \xi^{\beta}, \quad \Phi(y) = y^{\frac{1}{\beta}}, \quad y > 0,$$

und für $X(s,t) > 0$

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 X^{\beta}\,dt\Big)^{\frac{1}{\beta}} ds \leqq \Big(\int_0^1 \Big(\int_0^1 X\,ds\Big)^{\beta} dt\Big)^{\frac{1}{\beta}},$$

die sogenannte verallgemeinerte Minkowskische Ungleichung.

(Eingegangen am 6. 1. 1935.)

Primzahlen reell-quadratischer Zahlkörper in Winkelräumen.

Von

Hans Rademacher in Philadelphia, Pa. (U.S.A.)

Mit Hilfe der von ihm eingeführten Zetafunktionen mit Größencharakteren hat Herr Hecke für beliebige algebraische Zahlkörper einen Satz bewiesen[1]), den ich für reell-quadratische Zahlkörper spezialisiert folgendermaßen aussprechen will:

Es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal des Körpers, $\eta_\mathfrak{a} > 1$ die totalpositive Grundeinheit mod $\mathfrak{a}$, μ sei eine Körperzahl, μ' ihre Konjugierte und es werde

$$(1) \qquad w_\mathfrak{a}(\mu) = \frac{1}{2 \log \eta_\mathfrak{a}} \log \left| \frac{\mu}{\mu'} \right|$$

gesetzt. Ist ferner ϱ eine feste ganze Körperzahl, so gilt für die Anzahl $\pi_\mathfrak{a}(x; v)$ der mod $\mathfrak{a}$ nicht-assoziierten Primzahlen ϖ, die den Bedingungen

$$(2) \qquad \varpi > 0, \quad \varpi \equiv \varrho \pmod{\mathfrak{a}}, \quad N(\varpi) \leqq x, \quad w(\varpi) - [w(\varpi)] < v \leqq 1$$

genügen,

$$(3) \qquad \pi_\mathfrak{a}(x; v) \sim \frac{v}{h_0(\mathfrak{a})} \frac{x}{\log x},$$

wo $h_0(\mathfrak{a})$ die Anzahl der Idealklassen mod $\mathfrak{a}$ im engsten Sinne ist.

Für den Beweis dieses Satzes benutzt Herr Hecke das Weylsche Gleichverteilungskriterium, das aber seiner Natur nach nichts über den Fehler in der asymptotischen Gleichung (3) aussagt. Demgegenüber ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, eine Abschätzung jenes Fehlers zu geben, die wir in dem folgenden Hauptsatz aussprechen:

Hauptsatz: Es gibt zwei nur von dem Körper und von dem Modul $\mathfrak{a}$ abhängende Konstanten C und c, so daß für $x \geqq 2$ unter den soeben eingeführten Bezeichnungen

$$(4) \qquad \left| \pi_\mathfrak{a}(x; v) - \frac{v}{h_0(\mathfrak{a})} \operatorname{Li} x \right| \leqq C\, x e^{-c\sqrt{\log x}}$$

gilt.

In § 1 bestimmen wir einen nullstellenfreien Streifen für $\zeta(s, \chi \lambda^m)$ und $\sigma < 1$, dessen Breite aber von dem Größencharakter λ^m abhängen

[1]) E. Hecke, Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen II, Math. Zeitschr. 6 (1920), S. 11—51, insbesondere S. 38, Formel (52).

wird, und eine Abschätzung von $\frac{\zeta'}{\zeta}(s, \chi\lambda^m)$ in diesem Streifen, § 2 führt zu einer auch an sich bemerkenswerten Abschätzung von Summen von Größencharakteren über Primzahlen, in § 3 wird von einer Fourierreihe Gebrauch gemacht, § 4 endlich enthält den Beweis des Hauptsatzes.

Was die Bezeichnungsweise angeht, so schien mir wegen der vielen auftretenden Variablen der Gebrauch des O-Symbols nicht immer zweckmäßig. Es seien vielmehr im folgenden unter B Funktionen verstanden (nicht immer dieselben), die *beschränkt sind und deren Schranken nur vom Körper und vom Ideal* $\mathfrak{a}$ *abhängen*. C und c sind positive Konstanten (nicht immer dieselben), die auch nur vom Körper und vom Ideal $\mathfrak{a}$ abhängen. Wir können nach dieser Festsetzung also schreiben

$$|B| \leqq C.$$

§ 1.

Ein nullstellenfreier Streifen für die Heckeschen Funktionen.

Es sei

(5) $$\lambda^m(\hat{\mu}) = e^{2\pi i w_{\mathfrak{a}}(\hat{\mu}) m}$$

ein Größencharakter für die idealen Zahlen $\hat{\mu}$ des Bereiches $\mathfrak{Z}$, zu dem nach Heckes Vorgang der Körper erweitert sei[2]). Mit $\chi(\hat{\mu})$ werden im folgenden stets Gruppencharaktere für die Gruppe der Idealklassen mod $\mathfrak{a}$ im engsten Sinne bezeichnet; diese Gruppe habe die Ordnung $h_0(\mathfrak{a})$. Ist h die Idealklassenzahl im gewöhnlichen Sinne und $\eta > 1$ die Grundeinheit des Körpers, so sei

$$\eta_{\mathfrak{a}} = \eta^{q_{\mathfrak{a}}}.$$

Jede Einheit ε des Körpers läßt sich dann darstellen als

$$\varepsilon = \pm \eta^l \eta_{\mathfrak{a}}^n$$

mit $0 \leqq l < q_{\mathfrak{a}}$, n beliebig ganz rational. Es gibt also $2q_{\mathfrak{a}}$ mod $\mathfrak{a}$ nichtassoziierter Einheiten, infolgedessen ist

(6) $$h_0(\mathfrak{a}) = \frac{2^2 h\, \varphi(\mathfrak{a})}{2 q_{\mathfrak{a}}} = \frac{2 h\, \varphi(\mathfrak{a})}{q_{\mathfrak{a}}}.$$

Ist $\chi(\hat{\mu})$ ein solcher Gruppencharakter, daß

(7) $$\chi(\varepsilon)\lambda^m(\varepsilon) = 1$$

für *sämtliche* Einheiten ε, so heiße $\chi\lambda^m$ ein *Größencharakter für Ideale*. Nicht jedes χ ergibt mit λ^m einen solchen. Für solche χ, für die (7) nicht gilt, ergibt sich jedoch

(8) $$\sum_{(\varepsilon)_{\mathfrak{a}}} \chi(\varepsilon)\lambda^m(\varepsilon) = 0,$$

[2]) l. c. [1]) § 2.

wo über alle mod $\mathfrak{a}$ nicht-assoziierten Einheiten zu summieren ist[3]). Durch die Zusammenziehung in der Schreibweise $\chi\lambda^m(\hat{\mu})$ werde stets ein Größencharakter für Ideale angedeutet, während wir $\chi(\hat{\mu})\lambda^m(\hat{\mu})$ schreiben wollen, wenn $\chi(\hat{\mu})$ ein beliebiger Charakter der Idealklassengruppe mod $\mathfrak{a}$ ist.

Mit dem Größencharakter für Ideale $\chi\lambda^m(\hat{\mu})$ wird nun die Heckesche Zetafunktion

$$\zeta(s,\chi\lambda^m) = \sum_{(\hat{\mu})} \frac{\chi\lambda^m(\hat{\mu})}{|N(\hat{\mu})|^s}$$
$$= \prod_{(\hat{\varpi})} \frac{1}{1-\chi\lambda^m(\hat{\varpi})\,|N(\hat{\varpi})|^{-s}}$$

gebildet, wo $\hat{\mu}$ alle nicht-assoziierten idealen ganzen Zahlen von $\mathfrak{Z}$, $\hat{\varpi}$ alle nicht-assoziierten idealen Primzahlen von $\mathfrak{Z}$ durchläuft. Es sei noch $\chi_0(\hat{\mu})$ der Hauptcharakter mod $\mathfrak{a}$. Dann gilt

Satz 1. Für $\sigma > 1$ ist

$$(9)\qquad -3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma,\chi_0) - 4\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it,\chi\lambda^m) - \Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it,\chi^2\lambda^{2m}) \geqq 0.$$

Zum Beweise bilde man

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi_0) = -\sum_{(\hat{\varpi})} \log|N(\hat{\varpi})| \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\chi_0(\hat{\varpi})}{|N(\hat{\varpi})|^s}\right)^l$$

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi\lambda^m) = -\sum_{(\hat{\varpi})} \log|N(\hat{\varpi})| \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\chi\lambda^m(\hat{\varpi})}{|N(\hat{\varpi})|^s}\right)^l$$

und entsprechend $\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi^2\lambda^{2m})$ und wende darauf die bekannte Schlußweise von de la Vallée-Poussin an[4]).

Satz 2. Für $m \neq 0$ und $-\frac{1}{2} \leqq \Re(s) \leqq 4$ gilt mit geeignetem C

$$(10)\qquad |\zeta(s,\chi\lambda^m)| < C\,\tau(t,m),$$

wo

$$(11)\qquad \tau(t,m) = (1+|t|)^2\,(1+|m|)^2$$

ist.

Beweis: Mit einer geringen Abänderung eines früher von mir bewiesenen Satzes[5]) gilt unter den obigen Bedingungen zunächst

$$|\zeta(s,\chi\lambda^m)| \leqq C\left(1+\left|t+\frac{\pi m}{\log\eta_{\mathfrak{a}}}\right|\right)\left(1+\left|t-\frac{\pi m}{\log\eta_{\mathfrak{a}}}\right|\right).$$

---

[3]) H. Rademacher, Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper I, Hamburger Abhandlungen **3** (1924), S. 120, Hilfssatz 4.

[4]) Siehe z. B. E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie **2** (1927), S. 14, Satz 372.

[5]) Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper III, Math. Zeitschr. **27** (1927), S. 362, Hilfssatz 15.

Die Abänderung besteht erstens in der Einbeziehung eines dortigen vom Modul $\mathfrak{a}$ abhängenden Faktors in die Konstante C, zweitens in der Unterdrückung von Exponenten auf der rechten Seite, die, wie sich aus dem dortigen Beweise ersehen läßt, nur für den Hauptcharakter $\chi\lambda^m = \chi_0$, also nur für $m = 0$ nötig sind. Da ferner

$$\left(1+\left|t+\frac{\pi m}{\log \eta_{\mathfrak{a}}}\right|\right)\left(1+\left|t-\frac{\pi m}{\log \eta_{\mathfrak{a}}}\right|\right) \leqq \left(1+|t|+\frac{\pi |m|}{\log \eta_{\mathfrak{a}}}\right)^2 < C\,(1+|t|)^2\,(1+|m|)^2$$

ist, so ist Satz 2 bewiesen.

Satz 3. Für $1 < \Re(s) = \sigma \leqq 4$, $m \neq 0$ ist

$$\left|\frac{1}{\zeta(s, \chi\lambda^m)}\right| < \frac{C}{\sigma - 1}.$$

Beweis: Es ist

$$\frac{1}{\zeta(s,\chi\lambda^m)} = \prod_{(\hat{\mathfrak{w}})}\left(1-\chi\lambda^m(\hat{\mathfrak{w}})\,|N(\hat{\mathfrak{w}})|^{-s}\right) = \sum_{(\hat{\nu})}\mu(\hat{\nu})\,\frac{\chi\lambda^m(\hat{\nu})}{|N(\hat{\nu})|^s},$$

wo $\mu(\hat{\nu})$ die Möbiussche Funktion ist. Also

$$\left|\frac{1}{\zeta(s,\chi\lambda^m)}\right| < \sum_{(\hat{\nu})}\frac{1}{|N(\hat{\nu})|^s} < \frac{C}{\sigma-1},$$

welch letzteres man z. B. gleichfalls meinem soeben zitierten Hilfssatz entnehmen kann.

Satz 4. Für $1 < \sigma_0 < 2$ und $m \neq 0$ gilt

$$-\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0+i\gamma,\ \chi\lambda^m) < \log\left(\frac{C}{\sigma-1}\,\tau(\gamma,m)\right). \tag{12}$$

Gibt es aber zu γ ein β, $\sigma_0 - 1 < \beta < \sigma_0$, so daß $\beta + i\gamma$ Nullstelle von $\zeta(s, \chi\lambda^m)$ ist, so gilt sogar

$$-\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0+i\gamma,\ \chi\lambda^m) < \log\left(\frac{C}{\sigma_0-1}\,\tau(\gamma,m)\right)+\left(1-\frac{(\beta-\sigma_0)^2}{4}\right)\frac{1}{\beta-\sigma_0}. \tag{13}$$

Zum Beweise berufen wir uns auf einen Satz von Landau[6]). Für seine Anwendung brauchen wir nur zu bemerken:

---

[6]) Vorlesungen über Zahlentheorie 2, S. 15, Satz 374.

Zusatz bei der Korrektur (12. 1. 1935): Soeben bemerke ich, daß ich versehentlich unkorrekt zitiert habe. Der Wortlaut des Landauschen Satzes liefert nicht genau die im Text auftretenden (übrigens unwesentlichen) numerischen Konstanten, sondern in (12) eine doppelt so große rechte Seite. Man kann aber unter den Landauschen Voraussetzungen l. c. auch leicht die folgenden für unseren Satz benötigten Ungleichungen beweisen:

Es ist

$$-\Re\frac{f'}{f}(s_0) < \frac{2M}{r},$$

1. $\zeta(s, \chi\lambda^m)$ ist regulär in $|s - \sigma_0 - i\gamma| \leqq 2$,

2. $\zeta(\sigma_0 + i\gamma, \chi\lambda^m) \neq 0$,

3. $\left|\frac{\zeta(s, \chi\lambda^m)}{\zeta(\sigma_0 + i\gamma, \chi\lambda^m)}\right| < C(3 + |\gamma|)^2 (1 + |m|)^2 \frac{1}{\sigma_0 - 1}$

für $|s - \sigma_0 - i\gamma| \leqq 2$, was aus Satz 2 und Satz 3 folgt,

4. $\zeta(s, \chi\lambda^m) \neq 0$ für $\Re(s) > \sigma_0 > 1$.

Dann ergibt der erwähnte Landausche Satz die Ungleichungen (12) und (13).

Satz 5. Es gibt eine nur vom Modul $\mathfrak{a}$ (dagegen nicht von m) abhängende positive Zahl E, so daß $\zeta(s, \chi\lambda^m)$ nullstellenfrei ist für

$$\sigma \geqq 1 - \frac{1}{1000 \log \tau(t, m)}, \qquad |t| \geqq E$$

und

$$\sigma \geqq 1 \frac{1}{1000 \log \tau(E, m)}, \qquad |t| \geqq E.$$

E darf offenbar > 1 angenommen werden.

Beweis: Nach Satz 4 ist, wenn $\beta + i\gamma$ eine Nullstelle von $\zeta(s, \chi\lambda^m)$ ist,

$$-\Re \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0 + i\gamma, \chi\lambda^m) < \log \frac{\tau(\gamma, m)}{\sigma_0 - 1} + C + \left(1 - \frac{(\beta - \sigma_0)^2}{4}\right) \frac{1}{\beta - \sigma_0},$$

und da $\tau(2\gamma, 2m) \leqq 16\,\tau(\gamma, m)$, so ist

$$-\Re \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0 + 2i\gamma, \chi^2 \lambda^{2m}) < \log \frac{\tau(\gamma, m)}{\sigma_0 - 1} + C.$$

Ferner ist für hinreichend kleines $\sigma_0 - 1 > 0$

$$(14) \qquad -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0, \chi_0) < \frac{1{,}1}{\sigma_0 - 1},$$

da $\zeta(s, \chi_0)$ einen Pol erster Ordnung für $s = 1$ besitzt. Dies in (9), Satz 1, eingesetzt, ergibt

$$0 < \frac{3{,}3}{\sigma_0 - 1} + 5 \log \frac{\tau(\gamma, m)}{\sigma_0 - 1} + C_1 + 4\left(1 - \frac{(\beta - \sigma_0)^2}{4}\right) \frac{1}{\beta - \sigma_0}.$$

---

und falls es eine Wurzel ϱ auf dem Radius zwischen $s_0 - r$ (exkl.) und s_0 (exkl.) gibt, ist sogar

$$-\Re \frac{f'}{f}(s_0) < \frac{2M}{r} - \left(1 - \left(\frac{s_0 - \varrho}{r}\right)^2\right) \frac{1}{s_0 - \varrho}.$$

Die einzige Abänderung im Landauschen Beweis besteht darin, statt der von Landau dort eingeführten Hilfsfunktion $g(s)$ die folgende zu betrachten:

$$g_1(s) = f(s) \prod_{\varrho} \frac{r - \frac{s\bar{\varrho}}{r}}{\varrho - s},$$

wo ϱ alle etwaigen Wurzeln der Funktion $f(s)$ im Kreise $|s| < r$ durchläuft. Dann ist $|g_1(s)| = |f(s)|$ für $|s| = r$, und $\log g(s)$ ist regulär in $|s| \leqq r_1$ für jedes $r_1 < r$ usw.

Wir ziehen nur Nullstellen $\beta + i\gamma$ in Betracht mit

$$\sigma_0 - \beta \leqq \tfrac{1}{6} \tag{15}$$

und haben dann

$$\frac{3{,}96}{\sigma_0 - \beta} < \frac{3{,}3}{\sigma_0 - 1} + 5 \log \frac{\tau(\gamma, m)}{\sigma_0 - 1} + C_1. \tag{16}$$

Es werde nun

$$\sigma_0 = 1 + \frac{1}{100 \log \tau(\gamma, m)}$$

gesetzt, dann ist

$$\sigma_0 - 1 = \frac{1}{100 \log \tau(\gamma, m)} > \frac{1}{100\ \tau(\gamma, m)}, \tag{17}$$

also nach (16)

$$\frac{3{,}96}{\sigma_0 - \beta} < 330 \log \tau(\gamma, m) + 10 \log \tau(\gamma, m) + 5 \log 100 + C_1,$$

$$\sigma_0 - \beta = 1 - \beta - (1 - \sigma_0) > \frac{3{,}96}{340 \log \tau(\gamma, m) + 5 \log 100 + C_1}$$

und wegen (17)

$$1 - \beta > -\frac{3{,}96}{396 \log \tau(\gamma, m)} + \frac{3{,}96}{340 \log \tau(\gamma, m) + C_1 + 5 \log 100}.$$

Wegen

$$\tau(\gamma, m) > \gamma^2 \tag{18}$$

gibt es ein positives D, das von m unabhängig ist, so daß für $|\gamma| \geqq D$

$$340 \log \tau(\gamma, m) + C_1 + 5 \log 100 \leqq 360 \log \tau(\gamma, m), \tag{19}$$

also für $|\gamma| \geqq D$

$$1 - \beta > \frac{3{,}96}{\log \tau(\gamma, m)} \left(-\frac{1}{396} + \frac{1}{360} \right) = \frac{1}{1000 \log \tau(\gamma, m)}. \tag{20}$$

Für $|\gamma| < D$ schließen wir aus (16)

$$\sigma_0 - \beta > \frac{3{,}96}{\dfrac{3{,}3}{\sigma_0 - 1} + 5 \log \tau(\gamma, m) - 5 \log(\sigma_0 - 1) + C_1}$$

$$= \frac{3{,}96\,(\sigma_0 - 1)}{3{,}3 + 5(\sigma_0 - 1) \log \tau(\gamma, m) - 5(\sigma_0 - 1) \log(\sigma_0 - 1) + C_1(\sigma_0 - 1)},$$

und da wegen (19)

$$C_1 < 20 \log \tau(D, m)$$

ist, haben wir

$$\sigma_0 - \beta > \frac{3{,}96\,(\sigma_0 - 1)}{3{,}3 + 25(\sigma_0 - 1) \log \tau(D, m) - 5(\sigma_0 - 1) \log(\sigma_0 - 1)}.$$

Für hinreichend kleines $\delta = \sigma_0 - 1 > 0$ haben wir

$$-\delta \log \delta = -(\sigma_0 - 1) \log(\sigma_0 - 1) < 0{,}01,$$

also

$$1 - \beta > -(\sigma_0 - 1) + \frac{3{,}96\,(\sigma_0 - 1)}{3{,}35 + 25(\sigma_0 - 1) \log \tau(D, m)}$$

und für

$$\sigma_0 - 1 = \mathrm{Min}\left(\delta, \frac{1}{100 \log \tau(D, m)}\right) \tag{21}$$

$$1 - \beta > -(\sigma_0 - 1) + \frac{3{,}96(\sigma_0 - 1)}{3{,}35 + 0{,}25} = \frac{\sigma_0 - 1}{10}$$

und somit

$$1 - \beta > \mathrm{Min}\left(\frac{\delta}{10}, \frac{1}{1000 \log \tau(D, m)}\right).$$

Es werde nun die Zahl $E \geqq D$ so groß genommen, daß für

$$\sigma_0 - 1 \leqq \frac{1}{100 \log \tau(E, 1)} \tag{22}$$

stets (14) gilt. Außerdem erfülle E die Bedingung

$$\delta > \frac{1}{100 \log \tau(E, 1)},$$

so daß wegen (21)

$$\sigma_0 - 1 > \frac{1}{100 \log \tau(E, m)}$$

ist. Dann haben wir also

$$\begin{aligned} 1 - \beta &> \frac{1}{1000 \log \tau(\gamma, m)} && \text{für } |\gamma| \geqq E, \\ 1 - \beta &> \frac{1}{1000 \log \tau(E, m)} && \text{für } |\gamma| \leqq E, \end{aligned} \tag{23}$$

vorausgesetzt, daß (15) gilt. Die andere Möglichkeit $\sigma_0 - \beta > \frac{1}{5}$ oder $1 - \beta > \frac{1}{5} - (\sigma_0 - 1)$ hat wegen (22) erst recht (23) zur Folge. Wir schließen also aus (23): Ist $\beta + i\gamma$ eine Nullstelle von $\zeta(s, \chi\lambda^m)$, so ist

$$\begin{aligned} \beta &< 1 - \frac{1}{1000 \log \tau(\gamma, m)} && \text{für } |\gamma| \geqq E, \\ \beta &< 1 - \frac{1}{1000 \log \tau(E, m)} && \text{für } |\gamma| \leqq E. \end{aligned}$$

Dies ist aber Satz 5.

Satz 6. In dem Streifen

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{3000 \log \tau(t, m)} &\leqq \sigma \leqq 3 && \text{für } |t| \geqq E, \\ 1 - \frac{1}{3000 \log \tau(E, m)} &\leqq \sigma \leqq 3 && \text{für } |t| \leqq E \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s, \chi\lambda^m)\right| &\leqq C \log^2 \tau(t, m) && \text{für } |t| \geqq E \\ &\leqq C \log^3 \tau(E, m) && \text{für } |t| \leqq E. \end{aligned}$$

Beweis: Es werde $s_0 = 2 + it_0$ gesetzt. Der Kreis $\mathfrak{K}$ mit

$$|s - s_0| \leqq R$$

mit

$$R = 1 + \frac{1}{2000 \log \tau(t_0, m)} \qquad |t| \geqq E$$

bzw.

$$R = 1 + \frac{1}{2000 \log \tau(E, m)} \qquad |t| \leqq E$$

liegt ganz in dem nullstellenfreien Streifen des Satzes 5. Denn in $\mathfrak{K}$ ist $|t - t_0| \leqq R < 2$, also

$$\begin{aligned} \log \tau(t, m) &\leqq \log\left((3 + |t_0|)^2 (1 + |m|)^2\right) \\ &\leqq \log\left(9 (1 + |t_0|)^2 (1 + |m|)^2\right) \\ &= \log \tau(t_0, m) + \log 9 \\ &< 2 \log \tau(t_0, m), \end{aligned}$$

wegen $\tau(t_0, m) \geqq \tau(E, m) \geqq \tau(1, 1) = 16$.

Um einen Hilfssatz von Carathéodory und Landau[7]) auf die Funktion $\log \zeta(s, \chi\lambda^m)$ anwenden zu können, stellen wir fest:

$$\begin{aligned} |\log \zeta(s_0, \chi\lambda^m)| &= \left| \sum_{(\hat{\mathfrak{w}}, l)} \frac{1}{l} \left(\frac{\chi\lambda^m(\hat{\mathfrak{w}})}{|N(\hat{\mathfrak{w}})|^{s_0}} \right)^l \right| \\ &\leqq \sum_{(\hat{\mathfrak{w}}, l)} \frac{1}{l} \frac{1}{|N(\hat{\mathfrak{w}})|^{2l}} = C_2. \end{aligned}$$

Ferner ist in $\mathfrak{K}$ nach (10)

$$\begin{aligned} \Re \log \zeta(s, \chi\lambda^m) = \log |\zeta(s, \chi\lambda^m)| &< C + \log \tau(t, m) \\ &< C_3 + \log \tau(t_0, m). \end{aligned}$$

Dann gilt in dem Kreise $|s - s_0| \leqq r$ mit

$$r = 1 + \frac{1}{3000 \log \tau(t_0, m)} \qquad \text{für } |t_0| \geqq E,$$

bzw.

$$r = 1 + \frac{1}{3000 \log \tau(E, m)} \qquad \text{für } |t_0| \leqq E:$$

$$\left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s, \chi\lambda^m) \right| \leqq \frac{3 \log^2 \tau(t_0, m)}{\left(\frac{1}{2000} - \frac{1}{3000}\right)^2} (C_2 + C_3 + \log \tau(t_0, m)), \; |t_0| \geqq E,$$

bzw.

$$\leqq \frac{3 \log^2 \tau(E, m)}{\left(\frac{1}{2000} - \frac{1}{3000}\right)^2} (C_2 + C_3 + \log \tau(E, m)), \; |t_0| \leqq E,$$

woraus Satz 6 sofort folgt.

§ 2.

Über Primzahlen erstreckte Summen von Charakteren.

Satz 7. Für $m \neq 0$ und $x > 0$ ist

$$\left| \int_{2 - i\infty}^{2 + i\infty} \frac{x^s}{s^2} \frac{\zeta'}{\zeta}(s, \chi\lambda^m)\, ds \right| \leqq C \log^3 (1 + |m|) \cdot x \cdot e^{-c \frac{\log x}{\log(1 + |m|) + \sqrt{\log x}}}.$$

[7]) Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie 1, S. 192—194, Satz 225.

Beweis: Der Integrationsweg von $2-i\infty$ bis $2+i\infty$ kann nach links verschoben werden bis zu dem Weg $\mathfrak{W}$, der durch

$$\sigma = 1 - \frac{1}{3000\log\tau(t,m)}, \qquad t \leqq -E,$$

$$\sigma = 1 - \frac{1}{3000\log\tau(E,m)}, \qquad -E \leqq t \leqq E,$$

$$\sigma = 1 - \frac{1}{3000\log\tau(t,m)}, \qquad t \geqq E$$

beschrieben wird, da zwischen beiden Wegen $\zeta(s,\chi\lambda^m)$ nullstellen- und polfrei ist.

Dann ist nach Satz 6

$$\left|\int_{\mathfrak{W}} \frac{x^s}{s^2}\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi\lambda^m)\,ds\right| \leqq C\int_0^E \frac{x^{1-\frac{1}{3000\log\tau(E,m)}}}{1+t^2}\log^3\tau(E,m)\,dt \tag{24}$$

$$+\,C\left\{\int_E^T + \int_T^\infty\right\}\frac{x^{1-\frac{1}{3000\log\tau(t,m)}}}{1+t^2}\log^3\tau(t,m)\,dt$$

mit einem noch zu bestimmenden $T \geqq E$. Folglich

$$\left|\int_{\mathfrak{W}}\right| \leqq C\log^3\tau(E,m)\,x^{1-\frac{1}{3000\log\tau(E,m)}}\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}$$

$$+\,C x^{1-\frac{1}{3000\log\tau(T,m)}}\int_E^\infty\frac{\log^3\tau(t,m)}{1+t^2}\,dt$$

$$+\,C x\int_T^\infty\frac{\log^3\tau(t,m)}{1+t^2}\,d\,t.$$

Nach der Definition (12) von $\tau(t,m)$ ist

$$\log\tau(t,m) = 2\log(1+|t|) + 2\log(1+|m|)$$

und daher für $m \neq 0$

$$\left|\int_{\mathfrak{W}}\right| \leqq C\log^3(1+|m|)\,x^{1-\frac{c}{\log(1+E)+\log(1+|m|)}}$$

$$+\,C x^{1-\frac{c}{\log(1+T)+\log(1+|m|)}}\int_1^\infty\frac{\log^3(1+t)+\log^3(1+|m|)}{1+t^2}\,dt$$

$$+\,C x\int_T^\infty\frac{\log^3(1+t)+\log^3(1+|m|)}{1+t^2}\,d\,t,$$

$$(25)\qquad \left|\int\limits_{\mathfrak{W}}\right| \leqq C\log^3(1+|m|)\cdot x\cdot e^{-c\frac{\log x}{\log(1+E)+\log(1+|m|)}}$$
$$+\,C\log^3(1+|m|)\cdot x\cdot e^{-c\frac{\log x}{\log(1+T)+\log(1+|m|)}}$$
$$+\,C\log^3(1+|m|)\cdot x\cdot(1+T)^{-1+\varepsilon}.$$

Um die Größenordnung der letzten beiden Glieder zur Übereinstimmung zu bringen, setzen wir, sofern es sich mit der Bedingung $T\geqq E$ verträgt,

$$\frac{\log x}{\log(1+T)+\log(1+|m|)}=\log(1+T),$$

also

$$(26)\qquad \log(1+T)=-\tfrac12\log(1+|m|)+\sqrt{\tfrac14\log^2(1+|m|)+\log x},$$

aber nur wenn die rechte Seite dieser Gleichung $\geqq\log(1+E)$ ausfällt. Ist dies nicht der Fall, so sei $T=E$ gesetzt, d. h. das Integral von E bis T in (24) fällt weg und damit auch das zweite Glied rechts in (25). Wenn wir dieses zweite Glied nun dennoch in jedem der beiden Fälle mitnehmen und darin (26) eintragen, so bleibt die Ungleichung (25) ausnahmslos richtig, also

$$\left|\int\limits_{\mathfrak{W}}\right| \leqq C\log^3(1+|m|)\cdot x\cdot e^{-c\frac{\log x}{\log(1+E)+\log(1+|m|)}}$$
$$+\,C\log^3(1+|m|)\cdot x\cdot e^{-c\frac{\log x}{\frac12\log(1+|m|)+\sqrt{\frac14\log^2(1+|m|)+\log x}}}$$
$$+\,C\log^3(1+|m|)\cdot x\cdot e^{-(1-\varepsilon)\left(-\frac12\log(1+|m|)+\sqrt{\frac14\log^2(1+|m|)+\log x}\right)}.$$

Im Exponenten des dritten Summanden können wir schreiben:

$$-\tfrac12\log(1+|m|)+\sqrt{\tfrac14\log^2(1+|m|)+\log x}$$
$$=\frac{\log x}{\frac12\log(1+|m|)+\sqrt{\frac14\log^2(1+|m|)+\log x}}.$$

Nun ist

$$\tfrac12\log(1+|m|)+\sqrt{\tfrac14\log^2(1+|m|)+\log x}$$
$$\leqq\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt5}{2}\sqrt{\log x} & \text{für}\quad \log(1+|m|)\leqq\sqrt{\log x}\\[2ex] \dfrac{1+\sqrt5}{2}\log(1+|m|) & \text{für}\quad \log(1+|m|)\geqq\sqrt{\log x},\end{cases}$$

also

$$\tfrac12\log(1+|m|)+\sqrt{\tfrac14\log^2(1+|m|)+\log x}\leqq\frac{1+\sqrt5}{2}\left(\sqrt{\log x}+\log(1+|m|)\right).$$

Daher haben wir

$$\left|\int\limits_{\mathfrak{W}}\right| \leqq C\log^3(1+|m|)\cdot x\cdot e^{-c\frac{\log x}{\log(1+E)+\log(1+|m|)}}$$
$$+\,C\log^3(1+|m|)\cdot x\cdot e^{-c\frac{\log x}{\sqrt{\log x}+\log(1+|m|)}}.$$

Indem wir noch bemerken, daß hier das erste Glied der rechten Seite von kleinerer Größenordnung als das zweite ist, so haben wir mit geeignetem C Satz 7 bewiesen,

Satz 8. Es ist für $m \neq 0$

$$\sum_{\substack{(\dot{\varpi}) \\ |N(\dot{\varpi})| \leqq x}} \chi \lambda^m(\dot{\varpi}) = B \log^3(1+|m|) \cdot x \cdot e^{-c \frac{\log x}{\log(1+|m|) + \sqrt{\log x}}},$$

worin $(\dot{\varpi})$ unter dem Summenzeichen andeuten soll, daß nur nichtassoziierte ideale Primzahlen durchlaufen werden sollen.

Beweis: Es ist

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^s}{s^2} \frac{\zeta'}{\zeta}(s, \chi \lambda^m) \, ds$$

$$= \sum_{(\dot{\varpi})} \log |N(\dot{\varpi})| \sum_{l=1}^{\infty} (\chi \lambda^m(\dot{\varpi}))^l \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{|N(\dot{\varpi})|^l}\right)^s}{s^2} \, ds.$$

Dies ist nach einem bekannten Hilfssatz[6]) gleich

$$\sum_{\substack{(\dot{\varpi}),\, l \\ |N(\dot{\varpi})|^l \leqq x}} \log |N(\dot{\varpi})| (\chi \lambda^m(\dot{\varpi}))^l \log \frac{x}{|N(\dot{\varpi})|^l}.$$

Die Summe zerspalten wir in die für $l = 1$ und für $l \geqq 2$. Für diese gilt

$$\left| \sum_{\substack{(\dot{\varpi}) \\ l \geqq 2 \\ N(\dot{\varpi})^l| \leqq x}} \right| \leqq \sum_{\substack{|N(\dot{\varpi})| \leqq \sqrt{x} \\ 2^l \leqq x}} \log |N(\dot{\varpi})| \log x$$

$$< C \log^2 x \sum_{|N(\dot{\varpi})| \leqq \sqrt{x}} \log |N(\dot{\varpi})| < C \sqrt{x} \log^3 x.$$

Hieraus und aus Satz 7 schließen wir

$$(27) \quad \sum_{\substack{(\dot{\varpi}) \\ |N(\dot{\varpi})| \leqq x}} \log |N(\dot{\varpi})| \chi \lambda^m(\dot{\varpi}) \log \frac{x}{|N(\dot{\varpi})|}$$

$$= B \log^3(1+|m|) \cdot x \cdot e^{-c \frac{\log x}{\log(1+|m|) + \sqrt{\log x}}}.$$

---

[6]) Landau, Vorlesungen 2, Satz 377.

Von dieser Formel gelangt man zu der des Satzes in der üblichen Weise: Es sei $0 < \delta = \delta(x) < 1$. Dann ist einerseits wegen (27)

$$\sum_{\substack{(\dot{\varpi}) \\ |N(\dot{\varpi})| \leqq (1+\delta)x}} \log|N(\dot{\varpi})|\,\chi\lambda^m(\dot{\varpi})\log\frac{x(1+\delta)}{|N(\dot{\varpi})|} - \sum_{\substack{(\dot{\varpi}) \\ |N(\dot{\varpi})| \leqq x}} \log|N(\dot{\varpi})|\,\chi\lambda^m(\dot{\varpi})\log\frac{x}{|N(\dot{\varpi})|} = B\log^3(1+|m|)\cdot x\cdot e^{-c\frac{\log x}{\log(1+|m|)+\sqrt{\log x}}}, \tag{28}$$

andererseits ist die linke Seite gleich

$$\sum_{\substack{(\dot{\varpi}) \\ x<|N(\dot{\varpi})| \leqq (1+\delta)x}} \log|N(\dot{\varpi})|\,\chi\lambda^m(\dot{\varpi})\log\frac{x}{|N(\dot{\varpi})|} + \log(1+\delta)\sum_{|N(\dot{\varpi})| \leqq (1+\delta)x} \log|N(\dot{\varpi})|\,\chi\lambda^m(\dot{\varpi}). \tag{29}$$

Hierin ist

$$\left|\sum_{x<|N(\dot{\varpi})| \leqq (1+\delta)x} \log|N(\dot{\varpi})|\,\chi\lambda^m(\dot{\varpi})\log\frac{x}{|N(\dot{\varpi})|}\right| \leqq \log(1+\delta)\sum_{x<|N(\dot{\varpi})| \leqq (1+\delta)x} \log|N(\dot{\varpi})| \leqq C\log(1+\delta)(\delta x + xe^{-c\sqrt{\log x}})$$

und ebenso

$$\left|\log(1+\delta)\sum_{x<|N(\dot{\varpi})| \leqq (1+\delta)x} \log|N(\dot{\varpi})|\,\chi\lambda^m(\dot{\varpi})\right| \leqq C\log(1+\delta)(\delta x + xe^{-c\sqrt{\log x}}).$$

Daher also wegen (28) und (29)

$$\sum_{|N(\dot{\varpi})| \leqq x} \log|N(\dot{\varpi})|\,\chi\lambda^m(\dot{\varpi}) = B\log^3(1+|m|)\frac{x}{\log(1+\delta)}\cdot e^{-c\frac{\log x}{\log(1+|m|)+\sqrt{\log x}}} + B\cdot\delta x + B\cdot xe^{-c\sqrt{\log x}}.$$

Setzen wir

$$g(x) = \sum_{\substack{(\dot{\varpi}) \\ |N(\dot{\varpi})| \leqq x}} \log|N(\dot{\varpi})|\,\chi\lambda^m(\dot{\varpi}) \tag{30}$$

und

$$\delta(x) = e^{-\frac{c}{2}\frac{\log x}{\log(1+|m|)+\sqrt{\log x}}},$$

so haben wir

$$g(x) = B\cdot\log^3(1+|m|)\cdot x\cdot e^{-\frac{c}{2}\frac{\log x}{\log(1+|m|)+\sqrt{\log x}}}. \tag{31}$$

Nun ist nach (30) für $x \geqq 2$

$$\sum_{\substack{(\dot{\varpi}) \\ |N(\dot{\varpi})| \leqq x}} \chi \lambda^m (\dot{\varpi}) \Big| = \Big| \sum_{j=2}^{[x]} \frac{g(j) - g(j-1)}{\log j} \Big|$$

$$\leqq \Big| \sum_{j=2}^{[x]} g(j) \Big(\frac{1}{\log j} - \frac{1}{\log (j+1)} \Big) \Big| + \Big| \frac{g([x])}{\log ([x]+1)} \Big|$$

$$< \operatorname*{Max}_{2 \leqq j \leqq x} |g(j)| \sum_{j=2}^{\infty} \Big(\frac{1}{\log j} - \frac{1}{\log (j+1)} \Big) + |g(x)|,$$

woraus nach (31) der Satz 8 mit c in neuer Bedeutung folgt.

Während es sich in dem soeben bewiesenen Satz um eine Summe über solche idealen Primzahlen handelt, die nicht-assoziiert schlechthin sind, soll im nächsten Satze über Primzahlen, die mod $\mathfrak{a}$ nicht-assoziiert sind, summiert werden. Es darf auch χ ein beliebiger Charakter der Idealklassengruppe mod $\mathfrak{a}$ im engsten Sinne sein, $\chi(\dot{\mu})\ \lambda^m(\dot{\mu})$ braucht also kein Größencharakter für Ideale (vgl. § 1) zu sein. In diesem Sinne gilt:

Satz 9. Für $m \neq 0$ ist

$$\sum_{\substack{(\dot{\varpi})_{\mathfrak{a}} \\ |N(\dot{\varpi})| \leqq x}} \chi(\dot{\varpi}) \lambda^m (\dot{\varpi}) = B \log^3 (1 + |m|) \cdot x \cdot e^{-c \frac{\log x}{\log(1+|m|) + \sqrt{\log x}}}.$$

Beweis: ε durchlaufe ein System von mod $\mathfrak{a}$ nicht-assoziierten Einheiten. Dann ist

$$\sum_{\substack{(\dot{\varpi})_{\mathfrak{a}} \\ |N(\dot{\varpi})| \leqq x}} \chi(\dot{\varpi}) \lambda^m (\dot{\varpi}) = \sum_{\substack{(\dot{\varpi}) \\ |N(\dot{\varpi})| \leqq x}} \chi(\dot{\varpi}) \lambda^m (\dot{\varpi}) \sum_{(\varepsilon)_{\mathfrak{a}}} \chi(\varepsilon) \lambda^m (\varepsilon).$$

Ist nun $\chi(\dot{\mu}) \lambda^m(\dot{\mu})$ ein Größencharakter für Ideale, so ist nach (7) die Summe des zweiten Faktors gleich $2\, q_{\mathfrak{a}}$, und auf den ersten Faktor wenden wir Satz 8 an. Ist jedoch $\chi(\dot{\mu}) \lambda^m(\dot{\mu})$ kein Größencharakter für Ideale, so ist nach (8) die Summe des zweiten Faktors gleich null, und damit verschwindet die ganze Summe. In beiden Fällen ist Satz 9 bewiesen.

Satz 10. Es sei ϱ eine feste ganze totalpositive Körperzahl. In der folgenden Summe soll über solche mod $\mathfrak{a}$ nicht-assoziierten Primzahlen ϖ summiert werden, die die Eigenschaften haben:

$$\varpi > 0, \qquad \varpi \equiv \varrho \pmod{\mathfrak{a}}, \qquad N(\dot{\varpi}) \leqq x.$$

Dann ist für $m \neq 0$

$$\sum_{\varpi} \lambda^m (\varpi) = B \cdot \log^3 (1 + |m|) \cdot x \cdot e^{-c \frac{\log x}{\log(1+|m|) + \sqrt{\log x}}}.$$

Beweis: Satz 9 in Verbindung mit

$$\sum_{\chi} \overline{\chi}(\varrho) \sum_{\substack{(\dot{\varpi})_{\mathfrak{a}} \\ |N(\dot{\varpi})| \leqq x}} \chi(\dot{\varpi}) \lambda^m(\dot{\varpi}) = \sum_{\substack{(\dot{\varpi})_{\mathfrak{a}} \\ |N(\dot{\varpi})| \leqq x}} \lambda^m(\dot{\varpi}) \sum_{\chi} \overline{\chi}(\varrho) \chi(\dot{\varpi})$$

$$= h_0(\mathfrak{a}) \sum_{\substack{(\varpi)_{\mathfrak{a}} \\ \varpi \succ 0,\ \varpi \equiv \varrho \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{a}) \\ N(\varpi) \leqq x}} \lambda^m(\varpi).$$

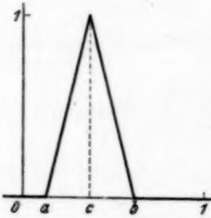
§ 3.

Anwendung einer Fourierschen Reihe.

Es sei $0 \leqq a < b \leqq 1$. Unter $f(y;\, a,\, b)$ werde folgende Funktion verstanden:

$$f(y; a, b) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq y \leqq a, \\ 2\dfrac{y-a}{b-a} & \text{für } a \leqq y \leqq \dfrac{a+b}{2}, \\ 2\dfrac{b-y}{b-a} & \text{für } \dfrac{a+b}{2} \leqq y \leqq b, \\ 0 & \text{für } b \leqq y \leqq 1; \end{cases} \tag{32}$$

ferner sei $f(y;\, a,\, b)$ über das Intervall (0, 1) hinaus periodisch mit der Periode 1 fortgesetzt.



Diese Funktion hat, wie man leicht nachrechnet, folgende Fourierentwicklung:

$$f(y;\, a,\, b) = \frac{d}{2} + \frac{2}{d\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi m (y-c)}{m^2}$$

$$- \frac{1}{d\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi m (y-a)}{m^2} - \frac{1}{d\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi m (y-b)}{m^2}$$

mit

$$d = b - a, \qquad c = \frac{a+b}{2}.$$

Man kann sie auch in die Form

$$f(y; a, b) = \frac{d}{2} + \frac{1}{d\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{m^2} e^{2\pi i m(y-c)}$$

$$- \frac{1}{2d\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{m^2} e^{2\pi i m(y-a)} - \frac{1}{2d\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{m^2} e^{2\pi i m(y-b)}$$

setzen, da alle diese Reihen absolut konvergieren.

Wir setzen jetzt

$$y = w_{\mathfrak{a}}(\varpi) = \frac{1}{2\log \eta_{\mathfrak{a}}} \log \left| \frac{\varpi}{\varpi'} \right|$$

(siehe (1)) und summieren über ϖ:

$$(33)\quad \sum_{\substack{(\varpi)_{\mathfrak{a}} \\ \varpi > 0,\ \varpi \equiv \varrho \,(\mathrm{mod}\ \mathfrak{a}) \\ N(\varpi) \leqq x}} f(w_{\mathfrak{a}}(\varpi); a, b)$$

$$= \frac{d}{2}\sum_{\varpi} 1 + \frac{1}{d\pi^2}\sum_{\varpi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{m^2} e^{2\pi i m (w_{\mathfrak{a}}(\varpi) - c)}$$

$$- \frac{1}{2d\pi^2}\sum_{\varpi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{m^2} e^{2\pi i m (w_{\mathfrak{a}}(\varpi) - a)}$$

$$- \frac{1}{2d\pi^2}\sum_{\varpi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{m^2} e^{2\pi i m (w_{\mathfrak{a}}(\varpi) - b)},$$

wobei die Summationsbedingungen der ϖ, nämlich

$$(\varpi)_{\mathfrak{a}}, \quad \varpi > 0, \quad \varpi \equiv \varrho \,(\mathrm{mod}\ \mathfrak{a}), \quad N(\varpi) \leqq x$$

bei allen Summen über ϖ hier und in diesem ganzen Paragraphen dieselben sind.

Nun ist nach Hecke [9])

$$\sum_{\varpi} 1 = \frac{1}{h_0(\mathfrak{a})}\int_2^x \frac{du}{\log u} + B \cdot x e^{-c\sqrt{\log x}}.$$

Ferner tragen wir (5) in (33) ein und haben dann

$$(34)\quad \sum_{\varpi} f(w_{\mathfrak{a}}(\varpi); a, b)$$

$$= \frac{d}{2h_0(\mathfrak{a})}\int_2^x \frac{du}{\log u} + B \cdot x e^{-c\sqrt{\log x}}$$

$$+ \frac{1}{2d\pi^2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{m^2}\left(2e^{-2\pi i m c} - e^{-2\pi i m a} - e^{-2\pi i m b}\right)\sum_{(\varpi)} \lambda^m(\varpi).$$

Ziehen wir nun Satz 10 heran, so wird der dritte Ausdruck auf der rechten Seite von (34) gleich

$$B \cdot \frac{1}{d}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log^3(1+m)}{m^2}\, x e^{-c\frac{\log x}{\log(1+m) + \sqrt{\log x}}}$$

$$= B \cdot \frac{x}{d}\sum_{m=1}^{[e^{\sqrt{\log x}} - 1]} \frac{1}{m^{3/2}} e^{-c\frac{\log x}{2\sqrt{\log x}}} + B \cdot \frac{x}{d}\sum_{[e^{\sqrt{\log x}}]}^{\infty} \frac{1}{m^{3/2}}$$

$$= B \cdot \frac{x}{d} e^{-\frac{c}{2}\sqrt{\log x}} + B \cdot \frac{x}{d} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\log x}}$$

$$= B \cdot \frac{x}{d} e^{-c'\sqrt{\log x}}.$$

---

9) l. c. 1) S. 36, Formel (50).

Tragen wir dies in (34) ein, so haben wir, mit c in neuer Bedeutung, den

Satz 11. Ist $f(y; a, b)$ die in (32) definierte Funktion, $d = b - a$, und $h_0(\mathfrak{a})$ die Idealklassenzahl mod $\mathfrak{a}$ im engsten Sinne, so gilt

$$\sum_{\substack{(\varpi)_{\mathfrak{a}} \\ \varpi > 0,\ \varpi \equiv \varrho \pmod{\mathfrak{a}} \\ N(\varpi) \leqq x}} f(w_{\mathfrak{a}}(\varpi); a, b) = \frac{d}{2\, h_0(\mathfrak{a})} \int_2^x \frac{du}{\log u} + B \cdot \frac{x}{d}\, e^{-c\sqrt{\log x}}.$$

§ 4.

Beweis des Hauptsatzes.

Satz 12. Die Anzahl $N(x; a, b)$ der ganzen Körperzahlen μ mit

$$\mu > 0, \qquad 0 \leqq a \leqq w_{\mathfrak{a}}(\mu) \leqq b \leqq 1, \qquad N(\mu) \leqq x$$

ist

$$N(x; a, b) = B \cdot \sqrt{x} + B \cdot (b - a)\, x. \tag{35}$$

Beweis: Es handelt sich um eine Gitterpunktsabzählung. Die ganzen Körperzahlen μ sollen als Punkte mit den Koordinaten μ, μ' in ein rechtwinkliges zz'-System eingetragen werden. Sie bilden dann ein gewisses Punktgitter. Die zu zählenden Gitterpunkte liegen wegen (1) in dem Hyperbeisektor $\mathfrak{H}$

$$\eta_{\mathfrak{a}}^{2a} \leqq \frac{z}{z'} \leqq \eta_{\mathfrak{a}}^{2b}, \qquad zz' \leqq x, \qquad 0 \leqq z, \qquad 0 \leqq z'.$$

Die beiden, diesen Sektor begrenzenden Strahlen gehen vom Nullpunkt zu den Punkten

$$z_1 = \sqrt{x}\, \eta_{\mathfrak{a}}^{a}, \quad z_1' = \sqrt{x}\, \eta_{\mathfrak{a}}^{-a} \quad \text{und} \quad z_2 = \sqrt{x}\, \eta_{\mathfrak{a}}^{b}, \quad z_2' = \sqrt{x}\, \eta_{\mathfrak{a}}^{-b}, \tag{36}$$

die beide auf der begrenzenden Hyperbel $zz' = x$ liegen. Der Inhalt $J(\mathfrak{H})$ dieses Hyperbelsektors $\mathfrak{H}$ berechnet sich zu

$$J(\mathfrak{H}) = (b - a)\, x \log \eta_{\mathfrak{a}} \tag{37}$$

Nun werde jedem Gitterpunkt μ in $\mathfrak{H}$ ein Fundamentalparallelogramm des Gitters zugeordnet, dessen eine Ecke μ bilde. Diese zu den Gitterpunkten homolog gelegenen Parallelogramme bedecken vielleicht nicht ganz $\mathfrak{H}$. Sie ragen über $\mathfrak{H}$ hinaus und mögen außerhalb $\mathfrak{H}$ noch den Streifen $\mathfrak{S}$ bedecken. Wird $\mathfrak{S}$ auf die z-Achse projiziert, so reicht die Projektion über die Strecke 0 bis z_2 höchstens an jeder Seite um eine Länge C hinaus, die nur vom gewählten Fundamentalparallelogramm, nicht aber von x und a und b abhängt. Die Ordinaten haben in der

z'-Richtung mit $\mathfrak{S}$ auch höchstens eine Strecke C gemeinsam, so daß der Inhalt $J(\mathfrak{S})$ von $\mathfrak{S}$ höchstens

(38) $$C(z_2+2C)=B(\sqrt{x}+1)$$

wird. Die Zahl der Gitterpunkte ist proportional dem Flächeninhalt des von den Parallelogrammen überdeckten Gebietes, also wegen (37) und (38)

$$C(b-a)\,x\log\eta_a+B(\sqrt{x}+1).$$

Da in (36) $x\geqq 1$ angenommen werden kann, ist damit Satz 12 bewiesen.

Wir kommen nunmehr auf die Funktion $f(y;a,b)$ des § 3 zurück und bilden mittels ihrer die neue Funktion

(39) $$F\left(y;\frac{d}{2},\frac{kd}{2}\right)=\sum_{j=1}^{k} f\left(y;(j-1)\frac{d}{2},(j+1)\frac{d}{2}\right),$$

wobei wir $\frac{kd}{2}\leqq 1$ annehmen. F hat gleichfalls die Periode 1. Da jedes f nur auf einer Strecke der Länge d (Endpunkte ausgeschlossen) von Null verschieden ist und die Funktionen f in der Summe rechts in (39) um je $\frac{d}{2}$ gegeneinander verschoben sind, so sind für jeden bestimmten Wert von y höchstens zwei Summanden und für $\frac{d}{2}<y<\frac{kd}{2}$ auch genau zwei Summanden in (39) von Null verschieden. Es sei etwa $j\frac{d}{2}<y\leqq(j+1)\frac{d}{2}$ Dann ist nach (32)

$$f\left(y;(j-1)\frac{d}{2},(j+1)\frac{d}{2}\right)=\frac{2}{d}\left((j+1)\frac{d}{2}-y\right),$$

$$f\left(y;j\frac{d}{2},(j+2)\frac{d}{2}\right)=\frac{2}{d}\left(y-j\frac{d}{2}\right),$$

also

$$f\left(y;(j-1)\frac{d}{2},(j+1)\frac{d}{2}\right)+f\left(y;j\frac{d}{2},(j+2)\frac{d}{2}\right)=1$$

und daher

(40) $$F\left(y;\frac{d}{2},\frac{kd}{2}\right)=1\quad\text{für}\quad\frac{d}{2}\leqq y\leqq\frac{kd}{2}.$$

Ferner ist

(41) $$0\leqq F\left(y;\frac{d}{2},\frac{kd}{2}\right)\leqq 1$$

außerhalb des Intervalls $\left(\frac{d}{2},\frac{kd}{2}\right)$ und speziell

(42) $$F\left(y;\frac{d}{2},\frac{kd}{2}\right)=0\quad\text{für}\quad(k+1)\frac{d}{2}\leqq y\leqq 1,$$

wofern überhaupt $(k+1)\frac{d}{2} \leqq 1$ ist. (Wir haben nur $k\frac{d}{2} \leqq 1$ verlangt und lassen somit ein Übergreifen des ersten und letzten Summanden in (39) zu, bestimmen daher auch (41) nicht näher.)

Für $k = 0$ ist die Summe in (39) leer, daher sei

$$F\left(y;\ \frac{d}{2},\ 0\right) = 0$$

gesetzt. Die Formel (40) verliert dann ihren Sinn, (41) gilt sinngemäß im ganzen Intervall von 0 bis 1, und (42) behält seine Gültigkeit ohne weiteres.

Es sei nun v eine positive, reelle Zahl $0 < v \leqq 1$. Wir setzen

$$k = \left[\frac{2v}{d}\right] \tag{43}$$

und vergleichen mit $F\left(y;\ \frac{d}{2},\ \frac{kd}{2}\right)$ für dieses k die Funktion

$$G(y;\ 0,\ v) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leqq y < v \\ 0 & \text{für } v \leqq y < 1. \end{cases} \tag{44}$$

Auch $G(y;\ 0,\ v)$ sei periodisch in y mit der Periode 1 fortgesetzt.

Da

$$k\frac{d}{2} = \left[\frac{2v}{d}\right]\frac{d}{2} \leqq \frac{2v}{d}\,\frac{d}{2} = v < \left[\frac{2v}{d}+1\right]\frac{d}{2} = (k+1)\frac{d}{2}$$

ist, so haben wir

$$G(y;\ 0,\ v) - F\left(y;\ \frac{d}{2},\ \frac{kd}{2}\right) = 0 \tag{45}$$

für

$$\frac{d}{2} \leqq y \leqq \frac{kd}{2} \quad \text{und} \quad (k+1)\frac{d}{2} \leqq y \leqq 1, \tag{45a}$$

und

$$\left|G(y;\ 0,\ v) - F\left(y;\ \frac{d}{2},\ \frac{kd}{2}\right)\right| \leqq 1 \tag{46}$$

für

$$0 \leqq y \leqq \frac{d}{2} \quad \text{und} \quad k\frac{d}{2} \leqq y \leqq (k+1)\frac{d}{2} \tag{46a}$$

(wobei diese beiden Intervalle möglicherweise mod 1 ein gemeinsames Stück haben können).

Wir setzen nun überall $y = w_{\mathfrak{a}}(\varpi)$ und bilden

$$\sum_{\substack{(\varpi)_{\mathfrak{a}} \\ \varpi > 0,\ \varpi \equiv \rho\,(\mathrm{mod}\ \mathfrak{a}) \\ N(\varpi) \leqq x}} G\left(w_{\mathfrak{a}}(\varpi);\ 0,\ v\right) = \sum_{\varpi} F + \sum_{\varpi} (G - F). \tag{47}$$

Hierin ist

$$\left|\sum_{\varpi} (G-F)\right| \leqq \sum_{\substack{(\mu)_{\mathfrak{a}} \\ \mu > 0 \\ N(\mu) \leqq x}} |G - F|. \tag{48}$$

Man kann nun, wie aus der Definition (1) sofort hervorgeht, jede Körperzahl μ durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz von $\eta_{\mathfrak{a}}$ in eine solche mod $\mathfrak{a}$ assoziierte Zahl überführen, die die Eigenschaft $0 \leqq w_{\mathfrak{a}}(\mu) < 1$ besitzt, und umgekehrt können nicht zwei mod $\mathfrak{a}$ assoziierte Zahlen beide diese Ungleichung erfüllen. In (48) können wir daher rechts statt $(\mu)_{\mathfrak{a}}$ auch $0 \leqq w_{\mathfrak{a}}(\mu) < 1$ in der Summationsbedingung schreiben und schließen dann weiter mit Hilfe von (45) und (46)

$$\Big|\sum_{\varpi}(G-F)\Big| \leqq \sum_{\substack{\mu > 0 \\ 0 \leqq w_{\mathfrak{a}}(\mu) < 1 \\ N(\mu) \leqq x}} |G-F|$$

$$\leqq \sum_{\substack{\mu > 0 \\ 0 \leqq w_{\mathfrak{a}}(\mu) \leqq \frac{d}{2} \\ N(\mu) \leqq x}} 1 + \sum_{\substack{\mu > 0 \\ k\frac{d}{2} \leqq w_{\mathfrak{a}}(\mu) \leqq (k+1)\frac{d}{2} \\ N(\mu) \leqq x}} 1$$

$$= N\left(x;\ 0,\ \frac{d}{2}\right) + N\left(x;\ k\frac{d}{2},\ (k+1)\frac{d}{2}\right).$$

Nach Satz 12 ist also

$$\sum_{\varpi}(G-F) = B\cdot\sqrt{x} + B\cdot d\cdot x. \tag{49}$$

Wir haben daher nach der Definition (39) von F und nach (47) und (49)

$$\sum_{\substack{(\varpi)_{\mathfrak{a}} \\ \varpi > 0,\ \varpi \equiv \varrho \pmod{\mathfrak{a}} \\ N(\varpi) \leqq x}} G\left(w_{\mathfrak{a}}(\varpi);\ 0,\ v\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{\varpi} f\left(w_{\mathfrak{a}}(\varpi);\ (j-1)\frac{d}{2},\ (j+1)\frac{d}{2}\right) + B\cdot\sqrt{x} + B\cdot d\cdot x,$$

und dies ist nach Satz 11

$$= \frac{k\,d}{2\,h_0(\mathfrak{a})}\int_2^x \frac{du}{\log u} + B\cdot k\frac{x}{d}e^{-c\sqrt{\log x}} + B\cdot\sqrt{x} + B\cdot d\cdot x$$

und wegen (43)

$$= \frac{v}{h_0(\mathfrak{a})}\int_2^x \frac{du}{\log u} + B\cdot d\cdot\int_2^x \frac{du}{\log u} + B\cdot\frac{v\,x}{d^2}e^{-c\sqrt{\log x}} + B\cdot\sqrt{x} + B\cdot d\cdot x,$$

wobei der zweite Summand in den letzten aufgenommen werden kann.

Setzen wir

$$d = v^{\frac{1}{3}}e^{-\frac{c}{3}\sqrt{\log x}},$$

so haben wir

$$(50)\qquad \sum_{\substack{(\varpi)_{\mathfrak{a}} \\ \varpi \succ 0,\ \varpi \equiv \varrho \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{a}) \\ N(\varpi) \leqq x}} G(w_{\mathfrak{a}}(\varpi);\ 0, v)$$

$$= \frac{v}{h_0(\mathfrak{a})} \int_2^x \frac{du}{\log u} + B \cdot v^{\frac{1}{3}} \cdot x e^{-\frac{c}{3}\sqrt{\log x}} + B \cdot \sqrt{x}.$$

Nach der Definition (44) von $G(y;\ 0, v)$ und wegen $0 < v \leqq 1$ ist durch (50) der Hauptsatz bewiesen. Die Formel (50) besagt sogar noch etwas mehr, denn für kleines v gibt sie ein wie $v^{\frac{1}{3}}$ gegen 0 gehendes, aber in x stärkeres Restglied und ein in x schwächeres, das dafür aber nicht mit v klein wird.

Niehagen (Mecklenburg), den 27. Juli 1934.

(Eingegangen am 4. 8. 1934.)

Die konvergenzfreien linearen Räume abzählbarer Stufe.

Von

Gottfried Köthe in Münster (Westf.).

Einleitung.

Ein linearer Koordinatenraum heißt *konvergenzfrei* [1]), wenn er mit $\mathfrak{x} = (\ldots, x_\alpha, \ldots)$ jede Stelle $\mathfrak{x}'$ enthält, die aus $\mathfrak{x}$ durch Ersetzen der von Null verschiedenen Koordinaten durch irgendwelche komplexe Zahlen entsteht. Jedes $\mathfrak{x}$ hat abzählbar viele Koordinaten, die in irgendeiner, aber für alle $\mathfrak{x}$ gleichen, linearen Anordnung gegeben sind. Seit langem bekannt sind der Raum φ aller finiten Stellen $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0,0, \ldots)$, d. h. der Raum der Stellen mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Koordinaten, und der Raum ω aller Stellen $(x_1, x_2, \ldots)$ mit beliebigen Koordinaten. Erst vor kurzem wurde ein weiterer konvergenzfreier linearer Raum, der halbfinite Raum ψ [2]) entdeckt. ψ besteht aus allen Stellen

$$\mathfrak{x} = (\ldots, 0,0, x_{-k}, x_{-k+1}, \ldots, x_{-1}; x_1, x_2, \ldots)$$

mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Koordinaten mit negativem Index.

Eine systematische Aufstellung weiterer konvergenzfreier linearer Räume ist aus verschiedenen Gründen von Interesse: Die Zugehörigkeit einer Stelle $\mathfrak{x}$ zum Hilbertschen Raum hängt davon ab, ob $\Sigma |x_i|^2$ konvergiert oder nicht, also von dem im Körper der komplexen Zahlen definierten Limesbegriff. Die Bedingung dafür, daß eine Stelle $\mathfrak{x}$ zu einem konvergenzfreien Raum gehört, ist dagegen rein algebraischer Natur. Zum Studium der algebraischen Grundtatsachen einer Theorie der Gleichungen mit unendlich vielen Veränderlichen werden also die konvergenzfreien Räume besonders geeignet sein. Dazu kommt, daß eine abgeschlossene Auflösungstheorie bisher nur für die Räume φ, ω, ψ vor-

[1]) Vgl. G. Köthe und O. Toeplitz, Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen, Journal f. d. reine u. angew. Math. **171** (1934), S. 193—226, im folgenden zitiert als K.-T. Die vorliegende Arbeit ist ein von mir bearbeiteter Teil unserer gemeinsamen Untersuchungen zur Theorie der Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Fragestellung und manche Einzelheiten sind aus gemeinsamen Besprechungen hervorgegangen.

[2]) Vgl. G. Köthe und O. Toeplitz, Theorie der halbfiniten unendlichen Matrizen, Journal f. d. reine u. angew. Math. **165** (1931), S. 116—127.

liegt, ein weiterer Fortschritt ist also am ehesten in den konvergenzfreien Räumen zu erwarten.

Schließlich läßt sich, wie ich an anderer Stelle zeigen werde, von den konvergenzfreien Räumen aus eine Theorie gewisser unendlicher hyperkomplexer Systeme aufstellen, die weitgehende Analogien zu der bekannten Theorie der gewöhnlichen hyperkomplexen Systeme aufweist.

Auf meine Anregung hin hat nun Herr F. Menn in seiner Dissertation[3]) sich mit der Konstruktion weiterer konvergenzfreier Räume beschäftigt. Durch eine geeignet definierte Addition und Multiplikation leitet er aus φ und ω unendlich viele neue Räume ab und untersucht, wann sie ineinander permutierbar bzw. homöomorph sind. Er kommt so zu abzählbar vielen untereinander verschiedenen konvergenzfreien Räumen, den sogenannten Räumen endlicher Stufe.

Durch eine geeignete Verallgemeinerung der Mennschen Multiplikation können wir nun diese Konstruktion fortsetzen (§ 1) und gelangen so zu den Räumen abzählbarer Stufe. In den §§ 2 und 3 wird untersucht, wann zwei solche Räume ineinander permutiert werden können. Es werden Normalformen gewonnen, zu jeder Zahl α der ersten und zweiten Zahlklasse gehören zwei einfache und eine zusammengesetzte Normalform, α heißt die Stufe der Normalform. Aus den Mennschen Räumen erhält man so die Normalformen n-ter Stufe, wobei n alle natürlichen Zahlen durchläuft.

Im 2. Kapitel wird wie bei Menn gezeigt, daß die Normalformen sogar untereinander nicht homöomorph sind; damit ist dann die Existenz von $\aleph_1$ in diesem Sinne verschiedenen konvergenzfreien Räumen bewiesen. Darüber hinaus werden alle linearen vollkommenen Räume bestimmt, die zu einem Raum abzählbarer Stufe homöomorph sind. Dieses mit der Auflösungstheorie der Gleichungen eng verwandte Problem der Aufstellung aller zu einem linearen Raum homöomorphen Räume ist bisher nur für φ, ω[4]), ψ[5]) und den Hilbertschen Raum[6]) gelöst worden. In § 5 wird nun gezeigt, daß in Verallgemeinerung der speziellen Resultate für φ, ω, ψ gilt: Jeder zu einem konvergenzfreien Raum $\varkappa$ abzählbarer Stufe homöomorphe Raum entsteht aus $\varkappa$ durch Permutation der Koordinaten. Nach den Resultaten von A. Weber[7]) ist damit gleichzeitig das Problem der Isomorphie zweier unendlicher konvergenzfreier Matrizenringe abzähl-

[3]) Die konvergenzfreien linearen Räume endlicher Stufe und die dazugehörigen Matrizenringe, Münster 1933, im folgenden zitiert als M.

[4]) Vgl. K.-T., § 8, Satz 9, und A. Weber, Isomorphismus maximaler Matrizenringe, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 171 (1934), S. 227—242, §§ 3 und 4.

[5]) Vgl. A. Weber, l. c., § 5.

[6]) Vgl. K.-T., § 12, Satz 8.

[7]) Siehe Anm. [4]).

barer Stufe gelöst. In § 6 wird schließlich gezeigt, daß, wenn die Kontinuumshypothese zutrifft, es konvergenzfreie vollkommene Räume gibt, die nicht durch unsere Konstruktionsmethoden geliefert werden[7a]).

Kapitel I.

Das Permutationsproblem.

§ 1.

Definition und einfachste Eigenschaften der konvergenzfreien Räume abzählbarer Stufe.

Definition 1. *λ und μ seien zwei konvergenzfreie Räume, bestehend aus den Stellen $\mathfrak{x} = (\ldots, x_\alpha, \ldots)$ bzw. $\mathfrak{y} = (\ldots, y_\beta, \ldots)$. Als die* **Summe** *$\lambda + \mu$ bezeichnen wir den konvergenzfreien Raum aller Stellen*

$$\mathfrak{z} = (\ldots, x_\alpha, \ldots; \ldots, y_\beta, \ldots),$$

wobei die x_α die Koordinaten irgendeiner Stelle $\mathfrak{x}$ aus λ und die y_β die Koordinaten irgendeiner Stelle $\mathfrak{y}$ aus μ sind[8]).

$\lambda + \mu$ besteht also aus allen Paaren $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, $\mathfrak{x}$ aus λ, $\mathfrak{y}$ aus μ.

Definition 2. *Es sei λ ein konvergenzfreier Raum, bestehend aus den Stellen $\mathfrak{x} = (\ldots, x_\alpha, \ldots)$. Jedem α sei ferner ein konvergenzfreier Raum μ_α zugeordnet, $\mathfrak{y}_\alpha$ sei irgendeine Stelle daraus. Die Gesamtheit der Stellen*

$$\mathfrak{z} = (\ldots, \mathfrak{y}_\alpha, \ldots),$$

die man erhält, indem man in den Stellen $\mathfrak{x}$ jedes $x_\alpha \neq 0$ durch ein beliebiges $\mathfrak{y}_\alpha$ aus μ_α, jedes $x_\alpha = 0$ durch die Nullstelle $\mathfrak{o} = (\ldots, 0, \ldots)$ aus μ_α ersetzt, bildet einen konvergenzfreien Raum, den wir mit $\lambda(\ldots, \mu_\alpha, \ldots)$ bezeichnen.

Wir sagen auch kurz: $\lambda(\ldots, \mu_\alpha, \ldots)$ entsteht durch **Einsetzung** der μ_α in λ.

Definition 3. *Sind alle μ_α gleich μ, so bezeichnen wir $\lambda(\ldots, \mu_\alpha, \ldots)$ mit $\lambda\mu$ und nennen $\lambda\mu$ das* **Produkt** *von λ und μ*[9]).

Satz 1. *Es ist $(\lambda + \mu)^* = \lambda^* + \mu^*$. Mit λ und μ ist also auch $\lambda + \mu$ vollkommen.*

Beweis. Unter dem dualen Raum λ^* eines Raumes λ versteht man[10]) die Gesamtheit der Stellen $\mathfrak{u}$, für die das skalare Produkt

---

[7a]) Anm. bei der Korrektur (25. I. 35). Es ist mir inzwischen gelungen, ein solches Beispiel ohne Zuhilfenahme der Kontinuumshypothese zu bilden. Ich werde in anderem Zusammenhange darauf zurückkommen.

[8]) Vgl. M., § 1, Definition 1.

[9]) Vgl. M., § 1, Definition 2.

[10]) Dies ist bis auf die triviale Verallgemeinerung auf beliebig geordnete Räume mit abzählbar vielen Koordinaten genau die Definition von K.-T., § 2.

$\mathfrak{u}\mathfrak{x} = \sum_{\alpha} u_\alpha x_\alpha$ für alle $\mathfrak{x}$ aus λ absolut konvergiert; die $u_\alpha x_\alpha$ sind dabei irgendwie in eine Folge $u_i x_i$, $i = 1, 2, \ldots$ zu ordnen, der Wert $\mathfrak{u}\mathfrak{x}$ der Summe ist wegen der absoluten Konvergenz stets derselbe. Für konvergenzfreie Räume besteht, wie leicht zu sehen, jedes skalare Produkt $\sum_{\alpha} u_\alpha x_\alpha$ nur aus endlich vielen Summanden $u_\alpha x_\alpha \neq 0$.

λ heißt vollkommen, wenn $\lambda^{**} = (\lambda^*)^* = \lambda$ ist.

Die Beziehung $(\lambda + \mu)^* = \lambda^* + \mu^*$ folgt nun ohne weiteres aus der Definition 1. —

Es sei daran erinnert, daß $\varphi^* = \omega$, $\omega^* = \varphi$ ist, φ und ω sind also vollkommene Räume. Auch ψ ist vollkommen, ψ^* ist der Raum aller Stellen, die nur endlich viele von Null verschiedene Koordinaten mit positivem Index haben.

Satz 2. *Es ist* $\lambda(\ldots, \mu_\alpha, \ldots)^* = \lambda^*(\ldots, \mu_\alpha^*, \ldots)$, *wenn alle* $\mu_\alpha \geqq \varphi$ *sind. Sind die Räume* λ, μ_α *alle vollkommen, so ist also auch* $\lambda(\ldots, \mu_\alpha, \ldots)$ *vollkommen.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{u} = (\ldots, \mathfrak{u}_\alpha, \ldots)$ eine Stelle aus $\lambda(\ldots, \mu_\alpha, \ldots)^*$. Multiplizieren wir $\mathfrak{u}$ skalar mit allen Stellen $(\ldots, \mathfrak{o}, \ldots, \mathfrak{y}_\alpha, \ldots, \mathfrak{o}, \ldots)$, $\mathfrak{y}_\alpha$ beliebig aus μ_α, so erhalten wir $\mathfrak{u}_\alpha \mathfrak{y}_\alpha$. Dieses skalare Produkt muß für alle $\mathfrak{y}_\alpha$ aus μ_α existieren, d. h. $\mathfrak{u}_\alpha$ ist eine Stelle aus μ_α^*. Die Indizes α_δ mögen eine W-Menge für λ [11]) bilden, die α_δ-ten Koordinaten der Stellen aus λ können also unabhängig voneinander beliebige komplexe Zahlen durchlaufen. Auch in den Stellen von $\lambda(\ldots, \mu_\alpha, \ldots)$ kann ich also für die $\mathfrak{y}_{\alpha_\delta}$ unabhängig voneinander beliebige Stellen aus den μ_{α_δ} wählen, z. B. $\mathfrak{y}_{\alpha_\delta}$ gleich einer Stelle setzen, in der alle Koordinaten bis auf eine beliebige verschwinden (diese Stellen liegen ja in φ, also wegen $\mu_\alpha \geqq \varphi$ auch in μ_α). Wir behaupten deshalb, daß das skalare Produkt von $\mathfrak{u}$ mit allen Stellen aus $\lambda(\ldots, \mu_\alpha, \ldots)$ nur dann existieren kann, wenn nur endlich viele $\mathfrak{u}_{\alpha_\delta}$ von der Nullstelle verschieden sind. Denn im anderen Fall könnte ich durch geeignete Wahl der $\mathfrak{y}_{\alpha_\delta}$ erreichen, daß in jedem zu einem $\mathfrak{u}_{\alpha_\delta} \neq \mathfrak{o}$ gehörigen Produkt $\mathfrak{u}_{\alpha_\delta}\mathfrak{y}_{\alpha_\delta}$ ein Summand $u_\beta x_\beta \neq 0$ wäre, in $\mathfrak{u}\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}$ eine Stelle aus $\lambda(\ldots, \mu_\alpha, \ldots)$ mit diesen $\mathfrak{y}_{\alpha_\delta}$, müßten dann unendlich viele Summanden $\neq 0$ vorkommen, was unmöglich ist. Auf den Indizes jeder W-Menge für λ sind also nur endlich viele $\mathfrak{u}_\alpha$ von $\mathfrak{o}$ verschieden. Da λ^* alle Stellen enthält, die auf den W-Mengen für λ endlich sind, bedeutet dies, daß $\mathfrak{u}$ eine Stelle aus $\lambda^*(\ldots, \mu_\alpha^*, \ldots)$ sein muß. Umgekehrt existiert nun aber, wie sofort zu sehen, für jedes $\mathfrak{u}$ aus $\lambda^*(\ldots, \mu_\alpha^*, \ldots)$ das skalare Produkt $\mathfrak{u}\mathfrak{y}$ mit jedem $\mathfrak{y}$ aus $\lambda(\ldots, \mu_\alpha, \ldots)$.

[11]) Vgl. K.-T., § 15, Definition 2.

Definition 4. *λ heiße in μ permutierbar, in Zeichen $\lambda \simeq \mu$, wenn es eine Permutation der Koordinaten gibt, durch die die Gesamtheit der Stellen aus λ in die Gesamtheit der Stellen aus μ übergeht.*

So ist z. B. der halbfinite Raum ψ in $\varphi + \omega$ permutierbar.

Fast unmittelbar klar ist

Satz 3. *Ist $\lambda \simeq \tilde{\lambda}$, $\mu \simeq \tilde{\mu}$, so ist $\lambda + \mu \simeq \tilde{\lambda} + \tilde{\mu}$. Ist $\lambda \simeq \tilde{\lambda}$, ist ferner für alle α $\mu_\alpha \simeq \tilde{\mu}_{\tilde{\alpha}}$, wobei $\tilde{\alpha}$ der α bei der Permutation von λ in $\tilde{\lambda}$ entsprechende Koordinatenindex ist, so ist $\lambda(\ldots, \mu_\alpha, \ldots) \simeq \tilde{\lambda}(\ldots, \tilde{\mu}_{\tilde{\alpha}}, \ldots)$.*

Später wird oft eine Reihe von einfachen Tatsachen über die Addition und Einsetzung verwendet, die wir jetzt zusammenstellen wollen.

Satz 4. *Es gelten die folgenden Rechenregeln:*

a) $\lambda + \mu \simeq \mu + \lambda$.

b) $(\lambda + \mu) + \nu \simeq \lambda + (\mu + \nu)$.

c) $(\lambda \mu) \nu = \lambda (\mu \nu)$.

d) $\lambda(\mu + \nu) \simeq \lambda \mu + \lambda \nu$.

e) $[\lambda + \mu](\ldots, \nu_\alpha, \ldots; \ldots, \tau_\beta, \ldots) = \lambda(\ldots, \nu_\alpha, \ldots) + \mu(\ldots, \tau_\beta, \ldots)$, *speziell also* $(\lambda + \mu)\nu = \lambda\nu + \mu\nu$.

f) $\lambda(\ldots, \nu_\beta, \ldots, \mu + \nu_\alpha, \ldots, \nu_\gamma, \ldots)$

$$\simeq \mu + \lambda(\ldots, \nu_\beta, \ldots, \nu_\alpha, \ldots, \nu_\gamma, \ldots), \text{ falls } \lambda \geqq \varphi \text{ ist.}$$

Beweis. Die Rechenregeln a) bis d) werden bei Menn[12]) bewiesen.

Beweis von e). Es sei $\mathfrak{x} = (\ldots, x_\alpha, \ldots)$ eine Stelle aus λ, $\mathfrak{y} = (\ldots, y_\beta, \ldots)$ eine Stelle aus μ, dann ist $\mathfrak{z} = (\ldots, x_\alpha, \ldots; \ldots, y_\beta, \ldots)$ eine Stelle aus $\lambda + \mu$. Jede Stelle $\mathfrak{r}$ aus $[\lambda + \mu](\ldots, \nu_\alpha, \ldots; \ldots, \tau_\beta, \ldots)$ erhält man nun durch Ersetzen der x_α und y_β durch Stellen $\mathfrak{z}_\alpha$ aus ν_α bzw. $\mathfrak{t}_\beta$ aus τ_β, wobei nur darauf geachtet werden muß, daß die verschwindenden x_α und y_β durch Stellen $\mathfrak{o}$ ersetzt werden. $\mathfrak{r}$ hat also die Gestalt $\mathfrak{r} = (\ldots, \mathfrak{z}_\alpha, \ldots; \ldots, \mathfrak{t}_\beta, \ldots)$. Spalten wir $\mathfrak{r}$ beim Semikolon in zwei Hälften, so entsteht eine Stelle $(\ldots, \mathfrak{z}_\alpha, \ldots)$ aus $\lambda(\ldots, \nu_\alpha, \ldots)$ und eine Stelle $(\ldots, \mathfrak{t}_\beta, \ldots)$ aus $\mu(\ldots, \tau_\beta, \ldots)$, umgekehrt entsteht so aus jedem Paar eine Stelle aus $[\lambda + \mu](\ldots, \nu_\alpha, \ldots; \ldots, \tau_\beta, \ldots)$, womit e) bewiesen ist.

Beweis von f). Eine Stelle aus $\lambda(\ldots, \nu_\beta, \ldots, \mu + \nu_\alpha, \ldots, \nu_\gamma, \ldots)$ hat die Form $(\ldots, \mathfrak{y} + \mathfrak{z}_\alpha, \ldots)$, $\mathfrak{y}$ aus μ, $\mathfrak{z}_\alpha$ aus ν_α. Wir können nun durch eine Koordinatenpermutation die Koordinaten von μ vor alle anderen Koordinaten bringen, dann erhalten wir eine Stelle $(\mathfrak{y}; \ldots, \mathfrak{z}_\alpha, \ldots)$, die offenbar in $\mu + \lambda(\ldots, \nu_\alpha, \ldots)$ liegt. Durch die inverse Permutation geht andererseits jede Stelle aus $\mu + \lambda(\ldots, \nu_\alpha, \ldots)$ in eine Stelle aus

[12]) Vgl. M., § 1, Satz 2.

$\lambda(\ldots, \mu + \nu_\alpha, \ldots)$ über, da wegen $\lambda \geqq \varphi$ die α-te Koordinate einer Stelle aus λ durch eine beliebige Stelle aus $\mu + \nu_\alpha$ ersetzt werden kann.

Definition 5. *Ein konvergenzfreier Raum λ, der durch wiederholte Anwendung der Operationen der Addition, Einsetzung und Permutation aus φ und ω entsteht, heiße ein konvergenzfreier Raum abzählbarer Stufe.*

Satz 3 besagt, daß man alle Räume abzählbarer Stufe schon erhält, wenn man alle Räume aufstellt, die durch wiederholte Anwendung von Addition und Einsetzung allein aus φ und ω entstehen, und diese dann allen möglichen Permutationen unterwirft.

Nach Menn bezeichnen wir die Räume, die aus φ und ω allein durch Anwendung von Addition, Multiplikation und Permutation entstehen, als Räume endlicher Stufe, die anderen mögen als Räume unendlicher Stufe bezeichnet werden.

Die Definition der einzelnen Stufe wird später (§ 3) erfolgen. Wir benötigen aber jetzt schon eine genauere Einteilung der Räume nach der Anzahl und Art der Einsetzungsoperationen, durch die sie aus φ und ω entstehen.

Definition 6a. *φ, ω und alle aus φ und ω durch Permutation und Addition abgeleiteten Räume heißen Räume 1. Ordnung.*

Die Räume ξ-ter Ordnung seien schon erklärt für alle Ordnungszahlen $\xi < \eta$, η eine Zahl der ersten oder zweiten Zahlklasse. Jeder durch einmalige Anwendung der Einsetzungsoperation auf Räume ξ-ter Ordnung entstehende Raum hat die Form $\lambda(\ldots, \mu_\alpha, \ldots)$. Es sei λ von ζ-ter Ordnung, μ_α von ξ_α-ter Ordnung. Die kleinste Ordnungszahl τ mit $\xi_\alpha \leqq \tau$ für alle α heiße σ. Dem Raum $\lambda(\ldots, \mu_\alpha, \ldots)$ ordnen wir nun die Ordnungszahl $\sigma + \zeta$ zu.

Definition 6b. *Ein Raum abzählbarer Stufe heißt von der η-ten Ordnung,*

1. *wenn er die Form $\lambda(\ldots, \mu_\alpha, \ldots)$ hat, λ, μ_α Räume von kleinerer als η-ter Ordnung, und wenn $\sigma + \zeta$ gleich η ist,*

2. *wenn er aus einem solchen Raum $\lambda(\ldots, \mu_\alpha, \ldots)$ durch Addition von solchen Räumen oder Räumen der Ordnung $< \eta$ und durch Permutationen gebildet ist.*

Jedem Raum abzählbarer Stufe kommt, da er durch Permutation, Addition und Einsetzung aus φ und ω gebildet werden kann, wenigstens eine Ordnung zu. Doch braucht sie nicht eindeutig bestimmt zu sein. So ist z. B. $\varphi^2 = \varphi \cdot \varphi = \varphi(\varphi, \varphi, \ldots)$ in φ permutierbar, φ^2 ist also, wenn es als durch Permutation aus φ entstanden aufgefaßt wird, von 1. Ordnung, wenn es als durch Einsetzung aus φ hervorgegangen betrachtet wird, von 2. Ordnung.

Daß man bei der Konstruktion eines Raumes abzählbarer Stufe mit der Ordnung nicht über die zweite Zahlklasse hinauskommt, sieht man so ein: Wir nehmen an, daß man durch den Einsetzungsprozeß von Räumen, deren Ordnungen der zweiten Zahlklasse angehören, zu solchen höherer Ordnung kommen kann. $\sigma + \zeta$ ist aber nur dann nicht mehr in der zweiten Zahlklasse, wenn σ es nicht mehr ist, da ja ζ der zweiten Zahlklasse angehört. σ gehört nur dann nicht mehr der zweiten Zahlklasse an, wenn es mehr als abzählbar viele ξ_α gibt, da ja die ξ_α der zweiten Zahlklasse angehören. Dies würde bedeuten, daß mehr als abzählbar viele μ_α in ein λ eingesetzt werden, was unmöglich ist, da λ ja stets nur abzählbar viele Koordinaten haben darf.

Satz 5. *Jeder konvergenzfreie Raum abzählbarer Stufe ist vollkommen.*

Beweis. φ und ω sind vollkommen. Da ein vollkommener Raum durch eine Permutation wieder in einen vollkommenen Raum übergeht, folgt nach Satz 1, daß alle Räume 1. Ordnung vollkommen sind. Nach Satz 2 folgt dies dann für alle Räume 2. Ordnung. Allgemein beweist man es durch transfinite Induktion nach der Ordnung.

Wir definieren nun diejenigen Räume abzählbarer Stufe, die sich später als Normalformen herausstellen werden.

Definition 7. *Wir setzen $\varkappa_1 = \varphi$. $\varkappa_\beta$ sei für alle $\beta < \alpha$, α eine Zahl der ersten oder zweiten Zahlklasse, definiert. Ist α keine Limeszahl, so setzen wir $\varkappa_\alpha = \varphi\, \varkappa^*_{\alpha-1}$; ist α Limeszahl, so setzen wir*

$$\varkappa_\alpha = \varphi\,(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\beta, \ldots),$$

wobei β alle Ordnungszahlen $\beta < \alpha$ durchläuft.

Es ist leicht zu sehen, daß die Stellen aus diesen Räumen immer nur abzählbar viele Koordinaten besitzen. Die $\varkappa_\alpha$ sind also alle konvergenzfrei und nach Satz 5 vollkommen.

Hat $\varkappa_\alpha$ die Form $\varphi\, \varkappa^*_{\alpha-1}$, so folgt aus Satz 2 und 5, daß $\varkappa^*_\alpha = \omega\, \varkappa_{\alpha-1}$ ist. Ist $\varkappa_\alpha = \varphi\,(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots)$, so ist $\varkappa^*_\alpha = \omega\,(\varkappa^*_1, \varkappa^*_2, \ldots)$.

Die $\varkappa_\alpha$ endlicher Ordnung haben, wie aus Satz 4c) folgt, die Form

$$\varkappa_{2n} = (\varphi\,\omega)^n \qquad \varkappa^*_{2n} = (\omega\,\varphi)^n$$
$$\varkappa_{2n+1} = (\varphi\,\omega)^n\,\varphi \qquad \varkappa^*_{2n+1} = (\omega\,\varphi)^n\,\omega.$$

Definition 8. *Wir bezeichnen $\varkappa_\alpha$ und $\varkappa^*_\alpha$ als die beiden einfachen Normalformen α-ter Stufe, $\varkappa_\alpha + \varkappa^*_\alpha$ als die zusammengesetzte Normalform α-ter Stufe.*

Die Ordnung der Normalformen n-ter Stufe ist nach Definition 6 gleich n, wenn sie in der angegebenen Weise aus φ und ω aufgebaut werden, die Ordnung der Normalformen α-ter Stufe, $\alpha \geqq \omega$, ist $\alpha + 1$, wie leicht zu sehen ist.

§ 2.

Die Herstellung der Normalformen.

Wir wollen in diesem Paragraphen zeigen, daß jeder konvergenzfreie Raum abzählbarer Stufe in eine der in Definition 8 von § 1 eingeführten Normalformen permutiert werden kann. Wir können uns darauf beschränken, zu beweisen, daß die Summe zweier Normalformen und die Einsetzung von Normalformen in eine Normalform zu Räumen führt, die in eine Normalform permutierbar sind: Nach Satz 3 von § 1 folgt daraus sofort, daß alle Räume 1. Ordnung in Normalformen permutierbar sind, durch transfinite Induktion nach der Ordnung erschließt man es dann für alle Räume abzählbarer Stufe.

Satz 1. *Für jede Normalform ν gilt $\nu + \nu \simeq \nu$.*

Beweis. Man bestätigt sofort die beiden Beziehungen

$$(1) \qquad \varphi + \varphi \simeq \varphi, \qquad \omega + \omega \simeq \omega,$$

die Behauptung stimmt also für die einfachen Normalformen 1. Stufe.

Allgemein hat jede einfache Normalform die Gestalt

$$\varphi(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\alpha, \ldots) \text{ oder } \omega(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\alpha, \ldots),$$

wobei die ν_α einfache Normalformen niedrigerer Stufe sind. Wir beweisen Satz 1 für $\varphi(\nu_1, \nu_2, \ldots)$, im anderen Fall hat man analog vorzugehen.

Es ist nach § 1, Satz 4e)

$$\varphi(\nu_1, \nu_2, \ldots) + \varphi(\nu_1, \nu_2, \ldots) = [\varphi + \varphi](\nu_1, \nu_2, \ldots; \nu_1, \nu_2, \ldots).$$

Wir permutieren diesen Raum nun so, daß jedes ν_α, das rechts vom Semikolon steht, neben das entsprechende links vom Semikolon rückt, also wird

$$[\varphi + \varphi](\nu_1, \nu_2, \ldots; \nu_1, \nu_2, \ldots) \simeq \varphi(\nu_1, \nu_1, \nu_2, \nu_2, \ldots).$$

Offenbar ist

$$\varphi(\nu_1, \nu_1, \nu_2, \nu_2, \ldots) \simeq \varphi(\nu_1 + \nu_1, \nu_2 + \nu_2, \ldots).$$

Setzen wir nun $\nu_1 + \nu_1 \simeq \nu_1$, $\nu_2 + \nu_2 \simeq \nu_2, \ldots$ schon als bewiesen voraus, so folgt daraus sofort die Behauptung.

Für zusammengesetzte Normalformen schließen wir nach § 1, Satz 3 und 4a), b)

$$(\varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*) + (\varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*) \simeq (\varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha) + (\varkappa_\alpha^* + \varkappa_\alpha^*) \simeq \varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*.$$

Satz 2. *Die Summe $\mu + \nu$ zweier verschiedener Normalformen gleicher Stufe ist in eine Normalform derselben Stufe permutierbar.*

Sind beides einfache Normalformen, und ist μ gleich $\varkappa_\alpha$ bzw. $\varkappa_\alpha^*$, dann ist ν gleich $\varkappa_\alpha^*$ bzw. $\varkappa_\alpha$ und $\mu + \nu \simeq \varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*$. Ist μ einfach und ν zusammengesetzt, z. B. $\mu = \varkappa_\alpha$, $\nu = \varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*$, so folgt aus Satz 1

$$\mu + \nu = \varkappa_\alpha + (\varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*) \simeq (\varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha) + \varkappa_\alpha^* \simeq \varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*.$$

Satz 3. *Ist μ eine Normalform α-ter Stufe, ν eine Normalform β-ter Stufe, $\alpha < \beta$, so ist stets $\mu + \nu \simeq \nu + \mu \simeq \nu$.*

Beweis. I. Wir führen den Beweis mit Hilfe der transfiniten Induktion zuerst für den Fall, daß μ und ν einfache Normalformen sind.

Für $\beta = 1$ ist nichts zu beweisen.

1. Es sei β Limeszahl. Nach Induktionsvoraussetzung ist für $\mu = \varkappa_\alpha$ oder $\mu = \varkappa_\alpha^*$ stets $\mu + \varkappa_{\alpha+1} \simeq \varkappa_{\alpha+1}$ und $\mu + \varkappa_{\alpha+1}^* \simeq \varkappa_{\alpha+1}^*$. Nach § 1, Satz 4f) ist also, falls $\nu = \varkappa_\beta$ ist,

$$\nu = \varphi(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\alpha+1}, \ldots) \simeq \varphi(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \mu + \varkappa_{\alpha+1}, \ldots)$$
$$\simeq \mu + \varphi(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\alpha+1}, \ldots) \simeq \mu + \nu.$$

Falls $\nu = \varkappa_\beta^*$ ist, gilt

$$\nu = \omega(\varkappa_1^*, \varkappa_2^*, \ldots, \varkappa_{\alpha+1}^*, \ldots) \simeq \omega(\varkappa_1^*, \varkappa_2^*, \ldots, \mu + \varkappa_{\alpha+1}^*, \ldots)$$
$$\simeq \mu + \omega(\varkappa_1^*, \varkappa_2^*, \ldots, \varkappa_{\alpha+1}^*, \ldots) \simeq \mu + \nu.$$

2. Es sei $\beta = \gamma + 1$.

Dann hat ν die Form $\varphi\,\varkappa_\gamma^*$ oder $\omega\,\varkappa_\gamma$.

a) Ist μ von kleinerer als γ-ter Stufe, so ist nach Induktionsvoraussetzung $\mu + \varkappa_\gamma \simeq \varkappa_\gamma$ und $\mu + \varkappa_\gamma^* \simeq \varkappa_\gamma^*$. § 1, Satz 4f) ergibt nun wie unter 1. $\mu + \varphi\,\varkappa_\gamma^* \simeq \varphi\,\varkappa_\gamma^*$ und $\mu + \omega\,\varkappa_\gamma \simeq \omega\,\varkappa_\gamma$.

b) Wir brauchen also nur den Fall zu untersuchen, daß μ von γ-ter Stufe ist, also $\mu = \varkappa_\gamma$ oder $\mu = \varkappa_\gamma^*$. Von den zugehörigen vier Fällen erledigen sich zwei, nämlich $\varkappa_\gamma^* + \varphi\,\varkappa_\gamma^* \simeq \varkappa_\gamma^*$ und $\varkappa_\gamma + \omega\,\varkappa_\gamma \simeq \omega\,\varkappa_\gamma$, bei Benutzung von Satz 1 wie unter 1.

c) Sei jetzt $\mu = \varkappa_\gamma$, $\nu = \varphi\,\varkappa_\gamma^*$. Es ist $\varkappa_\gamma = \varphi(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\delta, \ldots)$ oder $\varkappa_\gamma = \varphi\,\varkappa_{\gamma-1}^* = \varphi(\varkappa_{\gamma-1}^*, \varkappa_{\gamma-1}^*, \ldots)$. Wir betrachten nur den ersten Fall, im zweiten hat man analog zu schließen.

Nach Induktionsvoraussetzung gilt für alle $\varkappa_\delta$ mit $\delta < \gamma$ $\varkappa_\gamma^* = \varkappa_\delta + \varkappa_\gamma^*$. Nach § 1, Satz 3 folgt daraus

$$\nu = \varphi(\varkappa_\gamma^*, \varkappa_\gamma^*, \ldots) \simeq \varphi(\varkappa_1 + \varkappa_\gamma^*, \varkappa_2 + \varkappa_\gamma^*, \ldots, \varkappa_\delta + \varkappa_\gamma^*, \ldots).$$

Nun ist $\varphi(\varkappa_1 + \varkappa_\gamma^*, \varkappa_2 + \varkappa_\gamma^*, \ldots) = \varphi(\varkappa_1, \varkappa_\gamma^*, \varkappa_2, \varkappa_\gamma^*, \ldots)$. Durch Permutation der Koordinaten geht $\varphi(\varkappa_1, \varkappa_\gamma^*, \varkappa_2, \varkappa_\gamma^*, \ldots)$ über in

$$[\varphi + \varphi](\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots; \varkappa_\gamma^*, \varkappa_\gamma^*, \ldots)$$
$$= \varphi(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots) + \varphi(\varkappa_\gamma^*, \varkappa_\gamma^*, \ldots) = \mu + \nu.$$

Also $\nu \simeq \mu + \nu$.

Der vierte Fall $\mu = \varkappa_\gamma^*$, $\nu = \omega\,\varkappa_\gamma$ ist ebenso zu behandeln.

II. Wenn μ oder ν oder beide zusammengesetzte Normalformen sind, schließt man so:

1. Ist $\mu = \varkappa_\alpha$, $\nu = \varkappa_\beta + \varkappa_\beta^*$, so wird unter Verwendung von I.

$$\mu + \nu = \varkappa_\alpha + (\varkappa_\beta + \varkappa_\beta^*) \simeq (\varkappa_\alpha + \varkappa_\beta) + \varkappa_\beta^* \simeq \varkappa_\beta + \varkappa_\beta^* = \nu.$$

Analoges gilt für $\mu = \varkappa_\alpha^*$, $\nu = \varkappa_\beta + \varkappa_\beta^*$.

2. Ist $\mu = \varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*$, $\nu = \varkappa_\beta$, so wird

$$\mu + \nu = (\varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*) + \varkappa_\beta \simeq \varkappa_\alpha + (\varkappa_\alpha^* + \varkappa_\beta) \simeq \varkappa_\alpha + \varkappa_\beta \simeq \varkappa_\beta = \nu.$$

3. Ist $\mu = \varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*$, $\nu = \varkappa_\beta + \varkappa_\beta^*$, so wird

$$\mu + \nu = (\varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*) + (\varkappa_\beta + \varkappa_\beta^*) \simeq [(\varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*) + \varkappa_\beta] + \varkappa_\beta^* \simeq \varkappa_\beta + \varkappa_\beta^* = \nu.$$

Mit den Sätzen 1 bis 3 ist gezeigt, daß die Summe zweier Normalformen stets wieder in eine Normalform permutierbar ist.

Satz 4. *Mit ν_δ bezeichnen wir eine Normalform δ-ter Stufe. $\varphi(\nu_{\beta_1}, \nu_{\beta_2}, \ldots)$ und $\omega(\nu_{\beta_1}, \nu_{\beta_2}, \ldots)$ sind stets in Normalformen höchstens α-ter Stufe permutierbar, wenn α die kleinste Ordnungszahl größer als alle β_i bedeutet.*

Wir führen den Beweis nur für $\varphi(\nu_{\beta_1}, \nu_{\beta_2}, \ldots)$ durch. Für $\alpha = 1$ ist nichts zu beweisen. Wir wenden transfinite Induktion nach der Ordnung α an.

1. Es gebe eine größte Ordnungszahl β unter den β_i, es ist dann $\alpha = \beta + 1$. Wir unterscheiden die beiden Fälle, daß es endlich viele $\beta_i = \beta$ und unendlich viele $\beta_i = \beta$ gibt.

a) Im ersten Fall können wir durch eine Permutation erreichen, daß gerade die ersten n ν_{β_i} von β-ter Stufe sind. Nach § 1, Satz 4f) wird

$$(2) \qquad \varphi(\nu_{\beta_1}, \nu_{\beta_2}, \ldots) \simeq \nu_{\beta_1} + \cdots + \nu_{\beta_n} + \varphi(\nu_{\beta_{n+1}}, \nu_{\beta_{n+2}}, \ldots).$$

In $\varphi(\nu_{\beta_{n+1}}, \nu_{\beta_{n+2}}, \ldots)$ sind alle $\nu_{\beta_{n+k}}$ von kleinerer als β-ter Stufe, wegen $\beta < \alpha$ ist also dieser Raum nach Induktionsvoraussetzung in eine Normalform höchstens β-ter Stufe permutierbar. Auf der rechten Seite von (2) stehen also nur Räume, die in Normalformen höchstens β-ter Stufe permutierbar sind. Aus den Sätzen 1 bis 3 folgt schließlich, daß $\varphi(\nu_{\beta_1}, \nu_{\beta_2}, \ldots)$ in eine Normalform β-ter Stufe permutierbar ist.

b) Es komme eine Normalform β-ter Stufe unendlich oft vor, es seien etwa alle $\nu_{\beta_{2n}} = \nu_\beta$. Es ist also

$$(3) \qquad \varphi(\nu_{\beta_1}, \nu_{\beta_2}, \ldots) \simeq \varphi(\nu_{\beta_1}, \nu_{\beta_3}, \ldots) + \varphi(\nu_\beta, \nu_\beta, \ldots).$$

Der zweite Summand $\varphi\nu_\beta$ ist gleich $\varphi\varkappa_\beta$, $\varphi\varkappa_\beta^*$ oder $\varphi(\varkappa_\beta + \varkappa_\beta^*) \simeq \varphi\varkappa_\beta + \varphi\varkappa_\beta^*$. $\varphi\varkappa_\beta^*$ ist selbst Normalform α-ter Stufe. $\varphi(\varkappa_\beta + \varkappa_\beta^*)$ ist in eine Normalform höchstens α-ter Stufe permutierbar, wenn $\varphi\varkappa_\beta$ es ist.

Wir beweisen jetzt durch transfinite Induktion, daß stets $\varphi\varkappa_\beta \simeq \varkappa_\beta$ ist. Es ist $\varphi\varkappa_1 = \varphi\varphi \simeq \varphi$, wie man sofort einsieht. Ist $\beta = \gamma + 1$, so wird $\varphi\varkappa_\beta = \varphi(\varphi\varkappa_\gamma^*) = (\varphi\varphi)\varkappa_\gamma^*$ (nach § 1, Satz 4c)), also $\varphi\varkappa_\beta \simeq \varphi\varkappa_\gamma^* = \varkappa_\beta$. Ist β Limeszahl, so wird $\varkappa_\beta = \varphi(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\gamma, \ldots)$, also

$$\begin{aligned}\varphi\varkappa_\beta &= \varphi[\varphi(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\gamma, \ldots), \varphi(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\gamma, \ldots), \ldots] \\ &= \varphi(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\gamma, \ldots; \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\gamma, \ldots; \ldots) \\ &\simeq \varphi(\varkappa_1, \varkappa_1, \ldots; \varkappa_2, \varkappa_2, \ldots; \ldots; \varkappa_\gamma, \varkappa_\gamma, \ldots; \ldots) \simeq \varphi(\varphi\varkappa_1, \varphi\varkappa_2, \ldots, \varphi\varkappa_\gamma, \ldots).\end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist dies weiter $\simeq \varphi(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\gamma, \ldots) = \varkappa_\beta$.

Damit ist gezeigt, daß der zweite Summand der rechten Seite von (3) in eine Normalform β-ter oder α-ter Stufe permutierbar ist. Der erste Summand enthält eine der drei Normalformen β-ter Stufe nicht mehr. Nach a) oder b) können wir jetzt noch die eventuell vorkommenden beiden anderen Normalformen β-ter Stufe abspalten, so daß schließlich entweder überhaupt nur mehr endlich viele ν_{β_i} übrigbleiben (dann ist nichts mehr zu beweisen) oder es bleibt ein Raum $\varphi(\nu_{\gamma_1}, \nu_{\gamma_2}, \ldots)$ übrig mit lauter ν_{γ_i} von kleinerer als β-ter Stufe, dieser Raum ist aber nach Induktionsvoraussetzung in eine Normalform permutierbar, also auch die rechte Seite von (3) nach den Sätzen 1 bis 3. Die entstehende Normalform ist von höchstens α-ter Stufe.

2. Es gebe keine größte Ordnungszahl unter den β_i. Die kleinste auf die β_i folgende Ordnungszahl α ist dann Limeszahl. Wir zeigen, daß in diesem Fall

(4) $$\varphi(\nu_{\beta_1}, \nu_{\beta_2}, \ldots) \simeq \varkappa_\alpha$$

ist.

a) Es ist

(5) $$\varkappa_\alpha \simeq \varphi(\varkappa_1, \varkappa_1^*, \varkappa_1 + \varkappa_1^*, \varkappa_2, \varkappa_2^*, \varkappa_2 + \varkappa_2^*, \ldots, \varkappa_\beta, \varkappa_\beta^*, \varkappa_\beta + \varkappa_\beta^*, \ldots),$$

wobei β alle $\beta < \alpha$ durchläuft.

B e w e i s. Nach Satz 3 ist $\varkappa_{\beta+1} \simeq \varkappa_{\beta+1} + \varkappa_\beta^* + (\varkappa_\beta + \varkappa_\beta^*)$, also gilt
$\varkappa_\alpha \sim \varphi(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots) \sim \varphi(\varkappa_1, \varkappa_2 + \varkappa_1^* + (\varkappa_1 + \varkappa_1^*), \varkappa_3 + \varkappa_2^* + (\varkappa_2 + \varkappa_2^*), \ldots)$.
Dabei sind nur die $\varkappa_\beta$, deren β nicht Limeszahl ist, zerlegt, die übrigen sind beibehalten. Es gilt nun weiter

$$\begin{aligned} &\varphi(\varkappa_1, \varkappa_2 + \varkappa_1^* + (\varkappa_1 + \varkappa_1^*), \varkappa_3 + \varkappa_2^* + (\varkappa_2 + \varkappa_2^*), \ldots) \\ \simeq\ &\varphi(\varkappa_1, \varkappa_1^*, \varkappa_1 + \varkappa_1^*, \varkappa_2, \varkappa_2^*, \varkappa_2 + \varkappa_2^*, \ldots). \end{aligned}$$

Statt (4) genügt es also, $\varphi(\nu_{\beta_1}, \nu_{\beta_2}, \ldots) \simeq \varphi(\varkappa_1, \varkappa_1^*, \varkappa_1 + \varkappa_1^*, \ldots)$ zu zeigen.

b) Wenn in $\varphi(\nu_{\beta_1}, \nu_{\beta_2}, \ldots)$ unendlich viele ν_{β_i} gleich ν_β sind, so kann man sie zu $\varphi\,\nu_\beta$ zusammenfassen, z. B. ist

$$\varphi(\nu_\beta, \nu_{\beta_2}, \nu_\beta, \nu_{\beta_4}, \ldots) \simeq \varphi(\varphi\,\nu_\beta, \nu_{\beta_2}, \nu_{\beta_4}, \ldots).$$

Auch für unendlich viele β kann man dies mit einer einzigen Permutation bewirken. Nach dem Resultat von 1. b) ist $\varphi\,\nu_\beta$ stets in eine Normalform (von β-ter oder $(\beta + 1)$-ter Stufe) permutierbar.

Nach Ausführung dieser Permutation können nur noch je endlich viele gleiche ν_β vorkommen, die nach Satz 1 und 2 in je ein ν_β zusammengezogen werden können. Schließlich ordnen wir die Normalformen noch nach wachsenden Stufen an. Der so aus $\varphi(\nu_{\beta_1}, \nu_{\beta_2}, \ldots)$ durch Permutation entstandene Raum $\lambda = \varphi(\nu_{\gamma_1}, \nu_{\gamma_2}, \ldots, \nu_{\gamma_\tau}, \ldots)$ unterscheidet

sich von $\varphi(\varkappa_1, \varkappa_1^*, \varkappa_1 + \varkappa_1^*, \ldots)$ nur dadurch, daß gewisse der in diesem vorkommenden Normalformen in ihm fehlen.

c) Es bleibt also noch zu zeigen, daß die fehlenden Normalformen durch eine Permutation in λ ergänzt werden können. Wir beweisen zuerst durch transfinite Induktion in Ergänzung des unter 2. a) Bewiesenen, daß für γ nicht Limeszahl

$$\varkappa_\gamma \simeq \varphi(\varkappa_1, \varkappa_1^*, \varkappa_1 + \varkappa_1^*, \ldots, \varkappa_{\gamma-1}, \varkappa_{\gamma-1}^*, \varkappa_{\gamma-1} + \varkappa_{\gamma-1}^*) + \varkappa_\gamma$$

ist. Die rechte Seite ist

$$\simeq \varphi(\varkappa_1, \varkappa_1^*, \varkappa_1 + \varkappa_1^*, \ldots) + \varkappa_{\gamma-1} + \varkappa_{\gamma-1}^* + (\varkappa_{\gamma-1} + \varkappa_{\gamma-1}^*) + \varkappa_\gamma.$$

Der erste Summand ist entweder nach Induktionsvoraussetzung oder nach 2. a) $\simeq \varkappa_{\gamma-1}$, nach den Sätzen 1 bis 3 folgt daraus die Behauptung. Wir können dieses Resultat und (5) in eine Formel zusammenfassen, die für beliebige Ordnungszahlen γ gilt,

$$\varkappa_\gamma \simeq \varphi(\varkappa_1, \varkappa_1^*, \varkappa_1 + \varkappa_1^*, \ldots, \varkappa_\delta, \varkappa_\delta^*, \varkappa_\delta + \varkappa_\delta^*, \ldots) + \varkappa_\gamma, \tag{6}$$

wobei δ alle $\delta < \gamma$ durchläuft. Aus Satz 3 und (6) erhält man sofort

$$\varkappa_\gamma^* \simeq \varphi(\varkappa_1, \varkappa_1^*, \varkappa_1 + \varkappa_1^*, \ldots, \varkappa_\delta, \varkappa_\delta^*, \varkappa_\delta + \varkappa_\delta^*, \ldots) + \varkappa_\gamma^*, \tag{7}$$

wobei δ alle Ordnungszahlen $\delta < \varepsilon$ durchläuft, ε irgendeine Ordnungszahl $< \gamma$. Für $\varkappa_\gamma + \varkappa_\gamma^*$ gilt schließlich

$$\begin{aligned}\varkappa_\gamma + \varkappa_\gamma^* \simeq \varphi(&\varkappa_1, \varkappa_1^*, \varkappa_1 + \varkappa_1^*, \ldots, \varkappa_\delta, \varkappa_\delta^*, \varkappa_\delta + \varkappa_\delta^*, \ldots) \\ &+ \varkappa_\gamma + \varkappa_\gamma^* + (\varkappa_\gamma + \varkappa_\gamma^*),\end{aligned} \tag{8}$$

wobei δ alle $\delta < \gamma$ durchläuft.

Jetzt ist es einfach, $\varphi(\nu_{\gamma_1}, \nu_{\gamma_2}, \ldots, \nu_{\gamma_\tau}, \ldots)$ zu $\varphi(\varkappa_1, \varkappa_1^*, \varkappa_1 + \varkappa_1^*, \ldots)$ zu ergänzen. Sei z. B. $\nu_{\gamma_1} = \varkappa_{\gamma_1}$. Dann wird nach (6)

$$\begin{aligned}&\varphi(\nu_{\gamma_1}, \nu_{\gamma_2}, \ldots) \\ \simeq\ &\varphi(\varphi(\varkappa_1, \varkappa_1^*, \varkappa_1 + \varkappa_1^*, \ldots, \varkappa_\delta, \varkappa_\delta^*, \varkappa_\delta + \varkappa_\delta^*, \ldots) + \varkappa_{\gamma_1}, \nu_{\gamma_2}, \ldots) \\ \simeq\ &\varphi(\varkappa_1, \varkappa_1^*, \varkappa_1 + \varkappa_1^*, \ldots, \varkappa_{\gamma_1}, \nu_{\gamma_2}, \ldots).\end{aligned}$$

Damit sind durch eine Permutation der Koordinaten von ν_{γ_1} allein alle fehlenden Normalformen bis zur γ_1-ten Stufe eingeschoben. Genau so hat man nach (8) im Falle $\nu_{\gamma_1} = \varkappa_{\gamma_1} + \varkappa_{\gamma_1}^*$ vorzugehen. Ist $\nu_{\gamma_1} = \varkappa_{\gamma_1}^*$, so kann man nach (7) nur alle Normalformen von niedrigerer als ε_1-ter Stufe einschieben, ε_1 irgendeine Ordnungszahl $< \gamma_1$.

Durch eine Permutation der in ν_{γ_2} vorkommenden Koordinaten nach (7) bzw. (8) bzw. (9) kann man die Normalformen bis zur γ_2-ten bzw. ε_2-ten Stufe einschieben. Die Normalformen bis zur γ_1-ten bzw. ε_1-ten Stufe treten dann wegen $\gamma_2 \geqq \gamma_1$ allerdings zweimal auf, doch kann man, indem man (6) von rechts nach links liest, die doppelt vorkommenden durch eine Permutation der in ν_{γ_2} vorkommenden Koordinaten

in ein $\varkappa_{\gamma_1}$ bzw. $\varkappa_{\varepsilon_1}$ permutieren, das überzählig ist und nach Satz 1 oder 3 zum Verschwinden gebracht werden kann. Die ε_τ können so gewählt werden, daß sie dieselbe Limeszahl α bestimmen wie die γ_τ. Wenn man diese Permutationen also für alle τ durchführt, werden sämtliche fehlenden Normalformen eingeschoben. Schließlich können alle diese abzählbar vielen Schritte durch eine einzige Permutation erhalten werden, denn beim τ-ten Schritt werden die aus den ν_{γ_σ} mit $\sigma < \tau$ stammenden Koordinaten nicht mehr geändert. Damit ist $\lambda \simeq \varkappa_\alpha$ bewiesen.

Satz 4 ist der Spezialfall $\beta = 1$ von

Satz 5. *Durch Einsetzung von Normalformen ν_γ in eine Normalform ν β-ter Stufe entsteht ein Raum, der wieder in eine Normalform permutierbar ist.*

Nach § 1 Satz 4 e) genügt es, dies für einfache Normalformen ν zu zeigen. Wir nehmen an, Satz 5 sei für alle $\alpha < \beta$ bewiesen. Es sei ν von β-ter Stufe, also $\nu = \varphi(\mu_1, \ldots, \mu_\alpha, \ldots)$ oder $\nu = \omega(\mu_1, \ldots, \mu_\alpha, \ldots)$, μ_α Normalformen von niedrigerer als β-ter Stufe. Wir betrachten wieder nur den ersten Fall.

$\nu(\ldots, \nu_\gamma, \ldots)$ entsteht nun folgendermaßen: Jede Stelle aus ν hat die Form $\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\alpha, \ldots)$, $\mathfrak{x}_\alpha$ aus μ_α, nur endlich viele $\mathfrak{x}_\alpha \neq \mathfrak{o}$. Statt der Koordinaten werden nun in jedes solche $\mathfrak{x}_\alpha$ Stellen aus gewissen ν_γ eingesetzt, es seien dies die Räume ν_{γ_α}. Es wird also

$$\nu(\ldots, \nu_\gamma, \ldots) = \varphi(\mu_1(\ldots, \nu_{\gamma_1}, \ldots), \ldots, \mu_\alpha(\ldots, \nu_{\gamma_\alpha}, \ldots), \ldots).$$

Die Räume $\mu_\alpha(\ldots, \nu_{\gamma_\alpha}, \ldots)$ sind aber nach Induktionsvoraussetzung in Normalformen permutierbar, nach § 1, Satz 3 und § 2, Satz 4 ist also auch $\nu(\ldots, \nu_\gamma, \ldots)$ in eine Normalform permutierbar.

Wir fassen unsere bisherigen Resultate zusammen in den

Hauptsatz 1. *Jeder konvergenzfreie Raum abzählbarer Stufe ist in eine der in § 1 Definition 8 eingeführten Normalformen permutierbar.*

§ 3.

Die Verschiedenheit der Normalformen.

Zur vollen Lösung des Permutationsproblems fehlt uns jetzt noch der Nachweis, daß je zwei der im vorigen Paragraphen aufgestellten Normalformen nicht durch Permutation der Koordinaten ineinander übergeführt werden können.

Definition 1. *Es sei λ ein konvergenzfreier Raum. Die Menge Z der Koordinatenindizes seiner Stellen sei in zwei elementefremde Teilmengen zerspalten, $Z = M + N$, wobei M unendlich viele Elemente enthalte. Aus jeder Stelle $\mathfrak{x}$ von λ erhalten wir durch Streichen der Koordinaten mit In-*

dizes aus N eine Stelle $\mathfrak{x}^{(M)}$. Alle diese Stellen bilden einen konvergenzfreien Raum, den wir als den zu M gehörigen Stückraum $\lambda^{(M)}$ von λ bezeichnen.

Falls auch N unendlich ist, gilt offenbar

$$(1) \qquad \lambda \simeq \lambda^{(M)} + \lambda^{(N)}.$$

Umgekehrt sind, wenn $\lambda = \mu + \nu$ ist, μ und ν Stückräume von λ. Über die „Stückräume" leiten wir jetzt zwei Sätze ab, von denen wir den zweiten allerdings erst später brauchen werden.

Satz 1. *Ist λ gleich dem Stückraum $\mu^{(M)}$ von μ, so ist λ^* gleich dem Stückraum $\mu^{*(M)}$ von μ^*.*

Denn jede Stelle aus $\mu^{*(M)}$ gehört zu λ^*, umgekehrt können wir jede Stelle von λ^* durch Hinzufügen von Koordinaten gleich Null zu einer Stelle von μ^* ergänzen, also liegt jede Stelle von λ^* in $\mu^{*(M)}$.

Satz 2. *Jeder Stückraum einer Normalform α-ter Stufe ist in eine Normalform β-ter Stufe permutierbar, $\beta \leqq \alpha$.*

Wir beweisen dies durch transfinite Induktion. Für φ, ω und $\varphi + \omega$ ist der Satz trivial. Er sei also für alle Normalformen γ-ter Stufe richtig, $\gamma < \alpha$. Es genügt wieder, ihn für $\varkappa_\alpha$ zu zeigen, für $\varkappa_\alpha^*$ ergibt er sich dann leicht aus Satz 1 und für $\varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*$ folgt er aus den Sätzen 1 bis 3 von § 2.

$\varkappa_\alpha$ hat die Form $\varphi(\nu_1, \ldots, \nu_\gamma, \ldots)$, ν_γ Normalform γ-ter Stufe. Durch Streichen der Koordinaten mit Indizes aus N wird speziell auch in jedem ν_γ eine Indizesmenge N_γ gestrichen. Falls in ν_γ noch unendlich viele Koordinaten übrigbleiben, entsteht so aus ν_γ ein Stückraum $\nu_\gamma^{(M\gamma)}$. Für gewisse ν_γ mögen nur mehr endlich viele Koordinaten stehenbleiben. Diese Koordinaten permutieren wir alle nach vorn. Wenn es zusammen unendlich viele sind, so lassen sie sich von $\varkappa_\alpha^{(M)}$ abspalten, sie bilden zusammen einen Raum φ. Sind es nur endlich viele, so nehmen wir sie zu irgendeinem $\nu_\gamma^{(M\gamma)}$ mit unendlich vielen Koordinaten hinzu und erhalten einen in $\nu_\gamma^{(M\gamma)}$ permutierbaren Raum.

Die $\nu_\gamma^{(M\gamma)}$ mit unendlich vielen Koordinaten sind nach Induktionsvoraussetzung in Normalformen μ_γ von höchstens γ-ter Stufe permutierbar, es wird also

$$\varkappa_\alpha^{(M)} \simeq \varphi(\mu_1, \ldots, \mu_\gamma, \ldots) + \text{eventuell } \varphi.$$

Der erste Summand ist nach § 2, Satz 4 in eine Normalform höchstens α-ter Stufe permutierbar, woraus die Behauptung folgt.

Satz 3. *ω ist in keinen Stückraum $\varphi^{(M)}$ von φ permutierbar, ebenso φ in keinen Stückraum $\omega^{(M)}$ von ω.*

Beweis. Jeder Stückraum von φ ist gleich φ (wir betrachten ja von vornherein nur Stückräume mit unendlich vielen Koordinaten), jeder

Stückraum von ω ist gleich ω. Andererseits gehen φ und ω durch irgendwelche Permutationen immer in sich über.

Satz 4. *Eine einfache Normalform ν_α α-ter Stufe ist nicht in einen Stückraum $\nu_\alpha^{*(M)}$ von ν_α^* permutierbar.*

Wir setzen unseren Satz für alle einfachen Normalformen niedrigerer als α-ter Stufe als bewiesen voraus. Für $\alpha = 1$ ist die Behauptung in Satz 3 bewiesen worden.

1. Wir zeigen zuerst, daß $\varkappa_\alpha^*$ in keinen Stückraum von $\varkappa_\alpha$ permutierbar ist. Sei α Limeszahl. Dann haben $\varkappa_\alpha$ und $\varkappa_\alpha^*$ die Form

$$\varkappa_\alpha = \varphi(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\beta, \ldots), \qquad \varkappa_\alpha^* = \omega(\varkappa_1^*, \varkappa_2^*, \ldots, \varkappa_\beta^*, \ldots).$$

Wir nehmen an, es gebe eine Permutation $\mathfrak{P}$, die $\varkappa_\alpha^*$ in einen Stückraum von $\varkappa_\alpha$ überführt.

Nun ist $\varkappa_1^* = \omega$ nicht in einen Stückraum von φ permutierbar, also muß es einen Koordinatenindex k_1 in dem Stückraum $\varkappa_1^*$ von $\varkappa_\alpha^*$ geben, der durch $\mathfrak{P}$ in einen Index k_1' übergeht, der nicht in dem Stückraum $\varkappa_1$ von $\varkappa_\alpha$ liegt.

Allgemein zeigen wir, daß es in $\varkappa_\beta^*$ einen Koordinatenindex k_β gibt, der in einen Index k_β' permutiert wird, der nicht zu den Stückräumen $\varkappa_1$ bis $\varkappa_\beta$ gehört. Analog wie die Formel (6) in § 2 beweist man

$$\varphi(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\beta) \simeq \varkappa_\beta. \tag{2}$$

Würden also alle Koordinatenindizes aus $\varkappa_\beta^*$ bei $\mathfrak{P}$ in solche aus $\varphi(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\beta)$ übergehen, so wäre $\varkappa_\beta^*$ in einen Stückraum von $\varkappa_\beta$ permutierbar, was der Induktionsvoraussetzung widerspricht.

In der Folge $k_1, k_2, \ldots, k_\beta, \ldots$ muß es eine unendliche Teilfolge $k_{\beta_1}, k_{\beta_2}, \ldots$ geben, so daß in der zugeordneten Folge $k_{\beta_1}', k_{\beta_2}', \ldots$ die Indizes nur verschiedenen $\varkappa_\beta$ angehören.

Die Stelle $\mathfrak{x}$, deren Koordinaten mit den Indizes $k_{\beta_1}, k_{\beta_2}, \ldots$ gleich Eins sind und deren übrige Koordinaten alle gleich Null sind, gehört zu $\omega(\varkappa_1^*, \varkappa_2^*, \ldots, \varkappa_\beta^*, \ldots)$. Sie wird durch $\mathfrak{P}$ in eine Stelle $\mathfrak{x}'$ permutiert, deren Koordinaten mit den Indizes $k_{\beta_1}', k_{\beta_2}', \ldots$ Eins sind. $\mathfrak{x}'$ hätte also die Form $(\mathfrak{x}_1', \ldots, \mathfrak{x}_\beta', \ldots)$, $\mathfrak{x}_\beta'$ aus $\varkappa_\beta$, unendlich viele $\mathfrak{x}_\beta' \neq \mathfrak{o}$. $\mathfrak{x}'$ kann daher nicht $\varkappa_\alpha = \varphi(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\beta, \ldots)$ angehören, denn in $\varkappa_\alpha$ liegen ja nur Stellen mit endlich vielen $\mathfrak{x}_\beta' \neq \mathfrak{o}$. Damit sind wir zum Widerspruch gekommen.

2. Für α nicht Limeszahl schließt man analog, man hat

$$\varkappa_\alpha = \varphi(\varkappa_{\alpha-1}^*, \varkappa_{\alpha-1}^*, \ldots), \qquad \varkappa_\alpha^* = \omega(\varkappa_{\alpha-1}, \varkappa_{\alpha-1}, \ldots),$$

und muß statt (2) die Relation $\varkappa_{\alpha-1}^* + \ldots + \varkappa_{\alpha-1}^* \simeq \varkappa_{\alpha-1}^*$ heranziehen.

3. Aus dem bisher Bewiesenen folgt mittels Satz 1 jetzt leicht die ganze Behauptung: Wäre nämlich $\varkappa_\alpha$ in einen Stückraum von $\varkappa_\alpha^*$ per-

mutierbar, so müßte auch $\varkappa_\alpha^*$ in einen Stückraum von $\varkappa_\alpha^{**} = \varkappa_\alpha$ permutierbar sein, was unmöglich ist.

Aus dem somit bewiesenen Satz 4 folgt

Satz 5. *Zwei einfache Normalformen sind nicht ineinander permutierbar.*

Beweis. Sind die beiden Normalformen von derselben Stufe, so besagt Satz 4 dies unmittelbar. Ist μ von höherer Stufe als ν, so folgt aus § 2, Satz 3, daß ν in einen Stückraum von μ^* permutierbar ist, nach Satz 4 kann also μ nicht in ν permutierbar sein.

Satz 6. *Eine einfache und eine zusammengesetzte Normalform sind niemals ineinander permutierbar.*

Beweis[13]). Der duale Raum der zusammengesetzten Normalform $\varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*$ ist nach § 1, Satz 1 und 5 gleich

$$(\varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*)^* = \varkappa_\alpha^* + \varkappa_\alpha^{**} = \varkappa_\alpha^* + \varkappa_\alpha.$$

Nun ist $\varkappa_\alpha^* + \varkappa_\alpha$ in $\varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*$ permutierbar, also ist eine zusammengesetzte Normalform in ihren dualen Raum permutierbar. Permutieren wir einen Raum α in einen Raum β, so geht der duale Raum α^* durch dieselbe Permutation in β^* über. Wäre nun die einfache Normalform $\varkappa_\beta$ in die zusammengesetzte Normalform $\varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*$ permutierbar, so hätten wir

$$\varkappa_\beta \simeq \varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^* \simeq (\varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*)^* \simeq \varkappa_\beta^*$$

im Widerspruch zu Satz 5.

Satz 7. *Zwei zusammengesetzte Normalformen verschiedener Stufe sind nicht ineinander permutierbar.*

Zum Beweise ersetzen wir zuerst die zusammengesetzte Normalform $\varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*$ durch einen geeigneten permutationsäquivalenten Raum. Nach dem zweiten Teile des Beweises von § 2, Satz 4 ist für Limeszahlen α

$$\varkappa_\alpha \simeq \varphi(\varkappa_1, \varkappa_1^*, \varkappa_1 + \varkappa_1^*, \ldots, \varkappa_\beta, \varkappa_\beta^*, \varkappa_\beta + \varkappa_\beta^*, \ldots).$$

Daraus folgt sofort

$$\varkappa_\alpha^* \simeq \omega(\varkappa_1, \varkappa_1^*, \varkappa_1 + \varkappa_1^*, \ldots, \varkappa_\beta, \varkappa_\beta^*, \varkappa_\beta + \varkappa_\beta^*, \ldots).$$

Aus

$$\varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^* \simeq \varphi(\varkappa_1, \varkappa_1^*, \varkappa_1 + \varkappa_1^*, \ldots) + \omega(\varkappa_1, \varkappa_1^*, \varkappa_1 + \varkappa_1^*, \ldots)$$

folgt nach § 1, Satz 4e)

$$\varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^* \simeq [\varphi + \omega](\varkappa_1, \varkappa_1^*, \varkappa_1 + \varkappa_1^*, \ldots; \varkappa_1, \varkappa_1^*, \varkappa_1 + \varkappa_1^*, \ldots).$$

Nun ist $\varphi + \omega$ in den halbfiniten Raum ψ (vgl. Einleitung) permutierbar, wir bekommen also schließlich

$$(3) \quad \varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^* \simeq \psi(\ldots, \varkappa_\beta + \varkappa_\beta^*, \varkappa_\beta^*, \varkappa_\beta, \ldots, \varkappa_1 + \varkappa_1^*, \varkappa_1^*, \varkappa_1; \\ \varkappa_1, \varkappa_1^*, \varkappa_1 + \varkappa_1^*, \ldots, \varkappa_\beta, \varkappa_\beta^*, \varkappa_\beta + \varkappa_\beta^*, \ldots).$$

---

[13]) Wir geben den Beweis von Menn wieder, der sich auf unseren allgemeineren Fall unmittelbar anwenden läßt, vgl. M., § 2, Satz 5.

Wir bezeichnen den rechts stehenden Raum mit ζ_α. Die Stellen aus ζ_α enthalten aus den links vom Semikolon stehenden Räumen immer nur endlich viele von o verschiedene Stellen, die Stellen aus den Räumen rechts vom Semikolon sind beliebig. Jetzt führt uns eine zum Beweise von Satz 4 analoge Überlegung zum Ziele. Streichen wir aus den Stellen von ζ_α alle Koordinaten, die links von den Koordinaten eines $\varkappa_\beta$ rechts vom Semikolon stehen, so erhalten wir einen Stückraum, den wir mit $\zeta_\alpha^{(\beta)}$ bezeichnen wollen. Streichen wir die Koordinaten links von einem $\varkappa_\beta$, das links vom Semikolon steht, so erhalten wir einen Stückraum $\zeta_\alpha^{(-\beta)}$.

Wie im zweiten Teile des Beweises von § 2, Satz 4 zeigt man, daß alle $\zeta_\alpha^{(\beta)}$ und $\zeta_\alpha^{(-\beta)}$ in $\omega(\varkappa_1, \varkappa_1^*, \varkappa_1 + \varkappa_1^*, \ldots, \varkappa_\beta, \varkappa_\beta^*, \varkappa_\beta + \varkappa_\beta^*, \ldots)$, also in $\varkappa_\alpha^*$ permutierbar sind. Wir nehmen nun an, daß es eine Permutation $\mathfrak{P}$ gibt, die ein ζ_α in ein ζ_γ mit $\gamma < \alpha$ überführt. Da $\zeta_\alpha^{(\beta)}$ in $\varkappa_\alpha^*$ permutierbar ist, können die Koordinaten von ζ_α, die $\zeta_\alpha^{(\beta)}$ angehören, nicht alle durch $\mathfrak{P}$ in Koordinaten von $\zeta_\gamma^{(-\beta)}$ übergeführt werden, denn $\zeta_\gamma^{(-\beta)}$ ist in $\varkappa_\gamma^*$ permutierbar, $\varkappa_\gamma^*$ ist Stückraum von $\varkappa_\alpha$, und nach Satz 4 kann $\varkappa_\alpha^*$ nicht in einen Stückraum von $\varkappa_\alpha$ permutiert werden. Wir können daher eine wachsende Folge $k_1, k_2, \ldots$ von Koordinatenindizes angeben, die zu lauter verschiedenen, rechts vom Semikolon in (3) stehenden Stückräumen $\varkappa_\beta$ gehören, die durch $\mathfrak{P}$ in eine Folge $k_1', k_2', \ldots$ von Koordinatenindizes übergeht, die ebenfalls lauter verschiedenen Stückräumen von ζ_γ angehören, aber solchen links vom Semikolon.

Die Stelle $\mathfrak{x}$, deren Koordinaten mit den Indizes k_i gleich Eins sind, deren übrige Koordinaten Null sind, gehört zu ζ_α, die Stelle, in die sie permutiert wird, gehört aber nicht zu ζ_γ, was ein Widerspruch ist.

Der Fall, daß α nicht Limeszahl ist, ist analog zu erledigen. Statt (3) hat man die Beziehung

$$\text{(3')} \qquad \varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^* \simeq \psi(\ldots, \varkappa_{\alpha-1}^*, \varkappa_{\alpha-1}^*; \varkappa_{\alpha-1}, \varkappa_{\alpha-1}, \ldots)$$

zu verwenden.

Wir fassen die bisherigen Ergebnisse zusammen zu

Hauptsatz 2. *Zwei der in* § 1, *Definition* 8 *eingeführten Normalformen sind niemals ineinander permutierbar.*

Damit ist das Permutationsproblem völlig gelöst.

Wir können jetzt für beliebige Räume abzählbarer Stufe die „Stufe" definieren: Ein Raum heißt von α-ter Stufe, wenn seine zugehörige Normalform von der α-ten Stufe ist.

Die Stufe ist ein permutationsinvarianter Begriff, also im Gegensatz zu der in § 1 eingeführten Ordnung für jeden Raum eindeutig bestimmt.

Kapitel II.

Das Homöomorphieproblem.

§ 4.

Die Invarianz von „konvergenzfrei".

Zwei lineare Koordinatenräume heißen **homöomorph** (vgl. K.-T., § 8), wenn sie eineindeutig, linear und beiderseits stetig aufeinander abgebildet werden können. Es muß also, wenn $\tilde{\mathfrak{x}} = (\ldots, \tilde{x}_{\tilde{\alpha}}, \ldots)$ die der Stelle $\mathfrak{x} = (\ldots, x_\alpha, \ldots)$ aus λ zugeordnete Stelle aus $\tilde{\lambda}$ ist, der Stelle $r\mathfrak{x}$ die Stelle $r\tilde{\mathfrak{x}}$ und der Stelle $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ die Stelle $\tilde{\mathfrak{x}} + \tilde{\mathfrak{y}}$ zugeordnet sein und umgekehrt. Ferner muß aus $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{x}$ die Beziehung $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\mathfrak{x}}^{(n)} = \tilde{\mathfrak{x}}$ folgen und umgekehrt. $\mathfrak{x}^{(n)} = (\ldots, x_\alpha^{(n)}, \ldots)$ konvergiert dann und nur dann gegen $\mathfrak{x}$ (vgl. K.-T., § 3), wenn $\mathfrak{u}\,\mathfrak{x}^{(n)} = \sum\limits_\alpha u_\alpha x_\alpha^{(n)}$ den Limes $\mathfrak{u}\,\mathfrak{x} = \sum\limits_\alpha u_\alpha x_\alpha$ hat für jede Stelle $\mathfrak{u}$ aus λ^*. Zwei Räume, die ineinander permutierbar sind, sind homöomorph. Wir untersuchen in diesem Kapitel das Problem, wann zwei konvergenzfreie Räume abzählbarer Stufe homöomorph sind, und werden darüber hinaus alle zu einem solchen Raum homöomorphen vollkommenen Koordinatenräume bestimmen. Als erstes zeigen wir in diesem Paragraphen, daß vollkommene konvergenzfreie Räume nur wieder ebensolchen Räumen homöomorph sein können.

Sei also λ ein vollkommener konvergenzfreier Raum, der homöomorph einem vollkommenen Raum μ ist. Wir können uns die Koordinaten in beiden Räumen in der Reihenfolge der natürlichen Zahlen gegeben denken. Die Homöomorphie von λ auf μ wird nach K.-T., § 8, Satz 1 durch eine Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ vermittelt, die inverse Abbildung von μ auf λ durch eine Matrix $\mathfrak{B} = (b_{ik})$ und es gilt nach K.-T., § 8, Satz 4 für das Produkt dieser Matrizen

$$(1) \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{E},$$

wobei die auftretenden Summen absolut konvergieren. Die Bilder der Einheitsstellen $\mathfrak{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ aus λ in μ sind die Spalten $\mathfrak{a}_i$ von $\mathfrak{A}$, die Bilder der $\mathfrak{e}_i$, als Stellen von μ aufgefaßt, bei der inversen Abbildung sind die Spalten $\mathfrak{b}_i$ von $\mathfrak{B}$.

Wir nehmen nun an, daß μ nicht konvergenzfrei ist. Dann muß es in μ eine Stelle $\mathfrak{y}^{(0)}$ und in μ^* eine Stelle $\mathfrak{v}^{(0)}$ geben, deren skalares Produkt $\mathfrak{v}^{(0)}\mathfrak{y}^{(0)} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} v_i^{(0)} y_i^{(0)}$ unendlich viele von Null verschiedene Summanden enthält. Denn würde das Produkt $\mathfrak{v}\mathfrak{y}$ jeder Stelle aus μ^*

und jeder Stelle aus μ stets nur endlich viele von Null verschiedene Summanden aufweisen, so würden zu $\mu^{**} = \mu$ auch noch alle Stellen $\tilde{\mathfrak{y}}$ gehören, die aus den Stellen $\mathfrak{y}$ durch beliebige Abänderung der von Null verschiedenen Koordinaten entstehen, denn auch $\mathfrak{v}\,\tilde{\mathfrak{y}}$ konvergiert absolut, da es nur endlich viele Summanden enthält; μ müßte dann konvergenzfrei sein, was wir ausgeschlossen haben.

Da μ normal ist (vgl. K.-T., § 3, Definition 4), können wir annehmen, daß die von Null verschiedenen Koordinaten von $\mathfrak{y}^{(0)}$ und $\mathfrak{v}^{(0)}$ dieselben Indizes haben, also

$$\mathfrak{y}^{(0)} = \sum_{j=1}^{\infty} y_{i_j}^{(0)} \mathfrak{e}_{i_j} \quad \text{mit} \quad y_{i_j}^{(0)} \neq 0 \text{ für alle } j,$$

$$\mathfrak{v}^{(0)} = \sum_{j=1}^{\infty} v_{i_j}^{(0)} \mathfrak{e}_{i_j} \quad \text{mit} \quad v_{i_j}^{(0)} \neq 0 \text{ für alle } j,$$

$i_1, i_2, \ldots$ eine Teilfolge der natürlichen Zahlen.

Hilfssatz 1. *Die Indizes der Nichtnullen der Spalten $\mathfrak{b}_{i_1}, \mathfrak{b}_{i_2}, \ldots$ von $\mathfrak{B}$ gehören alle einer W-Menge $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ von λ an, d. h. es ist für alle j $b_{k i_j} = 0$, sobald k nicht zu A gehört.*

Beweis. Die Abschnitte $\mathfrak{y}_{i_n}^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} y_{i_j}^{(0)} \mathfrak{e}_{i_j}$ von $\mathfrak{y}^{(0)}$ konvergieren gegen $\mathfrak{y}^{(0)}$ [14]. Durch die von $\mathfrak{B}$ vermittelte Homöomorphie von μ auf λ gehen die $\mathfrak{y}_{i_n}^{(0)}$ in Stellen $\mathfrak{z}_{i_n}^{(0)}$ über, die eine in λ konvergente Folge bilden. Da das Bild von $\mathfrak{e}_i$ gleich $\mathfrak{b}_i$ ist und die Abbildung linear ist, gilt

$$\mathfrak{z}_{i_n}^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} y_{i_j}^{(0)} \mathfrak{b}_{i_j} = \sum_{j=1}^{n} y_j^{(0)} \sum_{k=1}^{\infty} b_{k i_j} \mathfrak{e}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{k i_j} y_{i_j}^{(0)} \right) \mathfrak{e}_k .$$

Die Folge $\mathfrak{z}_{i_n}^{(0)}$ von Stellen aus dem konvergenzfreien Raum λ ist aber nur dann konvergent (vgl. K.-T., § 15, Satz 3 und § 5, Satz 5), wenn es eine W-Menge $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ gibt, auf der allein die Koordinaten aller Stellen $\mathfrak{z}_{i_n}^{(0)}$ von Null verschieden sind. Es darf also $\sum_{j=1}^{n} b_{k i_j} y_{i_j}^{(0)}$ nur für k aus A von Null verschieden sein. Da alle $y_{i_j}^{(0)} \neq 0$ sind, folgt, sobald k nicht zu A gehört, für $n = 1$ $b_{k i_1} = 0$, für $n = 2$ $b_{k i_2} = 0$ usf.

Hilfssatz 2. *Für festes k aus A sind nur endlich viele $b_{k i_j}$ von Null verschieden.*

Beweis. Die Behauptung sei falsch. Dann gibt es wenigstens zu einem k eine Teilfolge $b_{k m_1}, b_{k m_2}, \ldots$ aus lauter nicht verschwindenden Elementen, wobei $m_1, m_2, \ldots$ eine Teilfolge von $i_1, i_2, \ldots$ ist. Streichen

[14]) Vgl. K.-T., § 3, Satz 2.

wir aus der Matrix $\mathfrak{A}$ alle Spalten bis auf $\mathfrak{a}_{\alpha_1}, \mathfrak{a}_{\alpha_2}, \ldots$, so entsteht aus $\mathfrak{A}$ eine Matrix, die wir mit $\mathfrak{A}^{(A)}$ bezeichnen wollen. Ihre Zeilen mögen $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots$ heißen. Bilden wir das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, so hat das skalare Produkt der i_j-ten Zeile von $\mathfrak{A}$ mit der i_k-ten Spalte von $\mathfrak{B}$ nach (1) den Wert 1 für $j = h$, 0 für $j \neq h$. Nun sind nach Hilfssatz 1 die Spalten $\mathfrak{b}_{i_h}$ nur auf A von Null verschieden, also haben wir, wenn wir mit $\tilde{\mathfrak{b}}_{i_h}$ die Spalte bezeichnen, die durch Streichen der nicht auf A liegenden Koordinaten aus $\mathfrak{b}_{i_h}$ entsteht,

$$(2) \qquad \mathfrak{c}_{i_j}\tilde{\mathfrak{b}}_{i_h} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = h \\ 0 & \text{für } j \neq h. \end{cases}$$

Die Zeilen $\mathfrak{c}_i$ von $\mathfrak{A}^{(A)}$ sind alle finit: A ist eine W-Menge für λ, die Zeilen von $\mathfrak{A}$ gehören λ^* an[15]), sind daher auf A finit[16]). Der größte Index der von Null verschiedenen Koordinaten von $\mathfrak{c}_i$ soll als die Länge $l(i)$ von $\mathfrak{c}_i$ bezeichnet werden.

Wir behaupten nun, daß sich aus den Zeilen $\mathfrak{c}_{m_1}, \mathfrak{c}_{m_2}, \ldots$ eine Teilfolge $\mathfrak{c}_{p_1}, \mathfrak{c}_{p_2}, \ldots$ mit $l(p_i) > l(p_{i-1})$ auswählen läßt. Gibt es keine solche Teilfolge, so wäre $l(m_i) < q$ für alle $\mathfrak{c}_{m_i}$. Dann könnten die $\mathfrak{c}_{m_i}$ nicht alle voneinander unabhängig sein, es würde also mindestens eine Relation

$$\mathfrak{c}_{l_t} = d_1 \mathfrak{c}_{l_1} + \ldots + d_{t-1}\mathfrak{c}_{l_{t-1}}$$

gelten. Multiplizieren wir diese Relation skalar mit $\tilde{\mathfrak{b}}_{l_t}$, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (2) einen Widerspruch.

Es gibt also eine Teilfolge $\mathfrak{c}_{p_1}, \mathfrak{c}_{p_2}, \ldots$ mit ständig wachsenden Längen. Daher kann man zu beliebig vorgegebenen Zahlen $g_{p_1}, g_{p_2}, \ldots$ stets eine nur auf A von Null verschiedene Stelle $\mathfrak{x}$ aus λ bestimmen, so daß $\mathfrak{c}_{p_1}\tilde{\mathfrak{x}} = g_{p_1}, \mathfrak{c}_{p_2}\tilde{\mathfrak{x}} = g_{p_2}, \ldots$ ist (mit $\tilde{\mathfrak{x}}$ bezeichnen wir wieder die Stelle, die durch Streichen der nicht in A vorkommenden Koordinaten aus $\mathfrak{x}$ entsteht). Die Stelle $\mathfrak{g} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ hat dann g_{ν_i} als p_i-te Koordinate. Da $\mathfrak{g}$ in μ liegt, muß $\mathfrak{B}\mathfrak{g}$ gebildet werden können. Aber das Element der k-ten Zeile der Spalte $\mathfrak{B}\mathfrak{g}$ ist eine unendliche Summe, in der die Summanden $b_{k\nu_i}g_{\nu_i}$, $i = 1, 2, \ldots$ vorkommen. Durch geeignete Wahl der g_{ν_i}, z. B. $g_{\nu_i} = \frac{1}{b_{k\nu_i}}$ ($b_{k\nu_i}$ ist ja $\neq 0$), kommt man zum Widerspruch, die unendliche Summe divergiert. Also ist die Annahme, daß für festes k unendlich viele b_{ki_j} von Null verschieden sind, falsch. —

Mit diesen beiden Hilfssätzen können wir nun rasch zeigen, daß die Annahme, μ sei nicht konvergenzfrei, zum Widerspruch führt. Wir beweisen dazu, daß mit $\mathfrak{y}^{(0)} = \sum_j y_{i_j}^{(0)}\mathfrak{e}_{i_j}$ jede Stelle $\mathfrak{y} = \sum_j y_{i_j}\mathfrak{e}_{i_j}$ mit be-

---

15) Vgl. K.-T., § 8, Satz 5, Folgerung 1.

16) Vgl. K.-T., § 15, Satz 1.

liebigen y_{i_j} in μ liegt. Dazu genügt der Nachweis, daß die Bilder $\mathfrak{s}^{(i_n)}$ der Abschnitte $\mathfrak{y}_{i_n}$ von $\mathfrak{y}$ eine konvergente Folge in λ bilden, denn dann bilden auch die $\mathfrak{y}_{i_n}$ selbst eine konvergente Folge in μ, deren Limes nur $\mathfrak{y}$ sein kann, $\mathfrak{y}$ liegt dann wegen der Vollständigkeit von μ[17]) in μ.

Wie im Beweise von Hilfssatz 1 ist $\mathfrak{s}^{(i_n)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{k i_j} y_{i_j} \right) \mathfrak{e}_k$. Aus Hilfssatz 2 folgt nun sofort, daß $\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} b_{k i_j} y_{i_j}$ für alle k existiert. Nach Hilfssatz 1 sind ferner die Summen $\sum_{j=1}^{n} b_{k i_j} y_{i_j}$ nur für k aus A von Null verschieden. Die Folge $\mathfrak{s}^{(i_n)}$ konvergiert also koordinatenweise und alle Glieder haben nur auf einer W-Menge, nämlich A, von Null verschiedene Koordinaten, das heißt aber[18]), die Folge $\mathfrak{s}^{(i_n)}$ konvergiert in λ. Für geeignete y_{i_j} ist nun aber das skalare Produkt $\mathfrak{v}^{(0)} \mathfrak{y} = \sum_j v_{i_j}^{(0)} y_{i_j}$ divergent, $\mathfrak{y}$ kann also nicht in μ liegen, was ein Widerspruch ist. Damit gilt

Satz 1. *Alle zu einem vollkommenen konvergenzfreien Raum λ homöomorphen vollkommenen Räume μ sind konvergenzfrei*[19]).

Um das Homöomorphieproblem für die konvergenzfreien Räume abzählbarer Stufe zu lösen, können wir also von vornherein voraussetzen, daß die homöomorphen Räume selbst konvergenzfrei sind.

§ 5.

Der Homöomorphiesatz.

Neben der zu Beginn des vorigen Paragraphen definierten Homöomorphie zweier vollkommener Räume benötigen wir jetzt einen etwas allgemeineren Begriff. Unter einer Homöomorphie von λ zu einem Teilraum ν von μ[20]) verstehen wir ebenfalls eine eineindeutige, lineare und beiderseits stetige Zuordnung der Stellen von λ auf die Stellen von ν, wobei aber jetzt die Stetigkeit in ν als die Stetigkeit im Sinne von μ, nicht im Sinne von ν zu verstehen ist, d. h. eine Folge $\mathfrak{y}^{(n)}$ aus ν konvergiert dann und nur dann gegen $\mathfrak{y}$ aus ν, wenn $\mathfrak{v}\,\mathfrak{y}^{(n)} \to \mathfrak{v}\,\mathfrak{y}$ für alle $\mathfrak{v}$ aus μ^* (nicht ν^*) gilt.

Satz 1. *Jeder konvergenzfreie Raum $\lambda \geqq \varphi$, der einem Teilraum μ von φ homöomorph ist, ist gleich φ.*

---

[17]) Vgl. K.-T., § 3, Satz 5.

[18]) Vgl. K.-T., § 5, Satz 6; § 15, Satz 4; § 3, Satz 2.

[19]) Aus K.-T., § 8, Satz 7 folgt, daß von μ nicht Vollkommenheit vorausgesetzt zu werden braucht, sondern nur $\mu \geqq \varphi$.

[20]) Vgl. M, § 2, S. 12.

Beweis. Es seien $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots$ die Einheitsstellen von λ, $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$ ihre Bilder in φ. Unter der „Länge" von $\mathfrak{a}_i$ verstehen wir wieder den größten Index der von Null verschiedenen Koordinaten von $\mathfrak{a}_i$. Ein solcher existiert immer, da ja $\mathfrak{a}_i$ zu φ gehört. Es gibt höchstens n Stellen $\mathfrak{a}_i$ von einer Länge $\leqq n$, denn $n+1$ Stellen der Länge $\leqq n$ sind stets linear abhängig, wären die $\mathfrak{a}_i$ aber linear abhängig, so müßten es auch die zugeordneten $\mathfrak{e}_i$ aus λ sein.

Eine Folge $\mathfrak{b}^{(n)}$ von Stellen aus φ konvergiert dann und nur dann, wenn sie koordinatenweise konvergiert und wenn die Längen aller $\mathfrak{b}^{(n)}$ unter einer von n unabhängigen Schranke bleiben. Eine unendliche Summe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \mathfrak{a}_i$ konvergiert in φ also nur dann, wenn $x_i = 0$ ist von einem i_0 ab. μ besteht nun als homöomorphes Bild von λ genau aus allen in φ konvergenten unendlichen Summen $\sum x_i \mathfrak{a}_i$, also aus allen endlichen Linearkombinationen der $\mathfrak{a}_i$. Da den $\mathfrak{a}_i$ umgekehrt die $\mathfrak{e}_i$ in λ entsprechen, folgt, daß λ genau aus allen finiten Stellen $(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$ besteht, d. h. $\lambda = \varphi$.

Definition 1[21]). *λ heißt direkte stetige Summe der Teilräume μ und ν, $\lambda = \mu \oplus \nu$, wenn jede Stelle $\mathfrak{x}$ aus λ auf eine und nur eine Art in der Form $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} + \mathfrak{z}$ darstellbar ist, $\mathfrak{y}$ aus μ, $\mathfrak{z}$ aus ν, und wenn eine Folge $\mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{y}^{(n)} + \mathfrak{z}^{(n)}$ aus λ dann und nur dann gegen eine Stelle $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} + \mathfrak{z}$ konvergiert, wenn $\mathfrak{y}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{z}$ konvergiert. ν heißt auch Komplementärraum zu μ*[22]).

Als Beispiel sei erwähnt, daß jeder Stückraum $\lambda^{(M)}$ zum direkten stetigen Summanden von λ wird, wenn wir die gestrichenen Koordinaten wieder hinzunehmen, aber immer gleich Null setzen. Sein Komplementärraum ist der aus $\lambda^{(N)}$ analog abgeleitete Teilraum von λ, wenn N die Komplementärmenge zu M ist.

Satz 2. *ν sei eine einfache Normalform. Jeder konvergenzfreie vollkommene Raum λ, der homöomorph einem Teilraum μ von ν ist, der zugleich direkter stetiger Summand von ν ist, läßt sich in einen Stückraum von ν permutieren.*

Beweis. 1. Wir beweisen zuerst, daß aus der Richtigkeit von Satz 2 für die Normalform $\varkappa_a$ die Richtigkeit für $\varkappa_a^*$ folgt.

---

[21]) Vgl. M., § 2, Definition 1.

[22]) Die Bildung $\mu + \nu$ aus § 1 hängt mit dieser neuen Summe in folgender Weise zusammen. Bezeichnen wir den Raum der Stellenpaare $(\mathfrak{y}, \mathfrak{o})$, $\mathfrak{y}$ aus μ, mit $\tilde{\mu}$, den Raum der Stellenpaare $(\mathfrak{o}, \mathfrak{z})$, $\mathfrak{z}$ aus ν, mit $\tilde{\nu}$, so bedeutet $\lambda = \mu + \nu$ gerade $\lambda = \tilde{\mu} \oplus \tilde{\nu}$. Aus einer Zerlegung $\lambda = \lambda_1 \oplus \lambda_2$ folgt dagegen keineswegs sofort, daß λ durch die Addition $\lambda_1 + \lambda_2$ aus zwei konvergenzfreien, zu λ_1 bzw. λ_2 homöomorphen Räumen entsteht. Die folgenden Sätze geben zum Teil Aufschluß über dieses Problem.

Dies ergibt sich aus folgendem von Menn[23]) bewiesenen

Hilfssatz. *Ist der vollkommene Raum λ homöomorph einem Teilraum μ des vollkommenen Raumes ν und ist μ direkter stetiger Summand von ν, so ist λ^* homöomorph einem Teilraum von ν^*, der ebenfalls direkter stetiger Summand von ν^* ist.*

Es gebe nämlich einen konvergenzfreien vollkommenen Raum λ, der einem stetigen direkten Summanden μ von $\varkappa_\alpha^*$ homöomorph ist, λ sei aber nicht in einen Stückraum von $\varkappa_\alpha^*$ permutierbar. Wäre λ^* in einen Stückraum $\varkappa_\alpha^{(M)}$ von $\varkappa_\alpha^{**} = \varkappa_\alpha$ permutierbar, so wäre nach § 3, Satz 1 $\lambda^{**} = \lambda$ in $\varkappa_\alpha^{*(M)}$ permutierbar. Also ist auch λ^* nicht in einen Stückraum von $\varkappa_\alpha$ permutierbar.

Andererseits ist nach dem obigen Hilfssatz λ^* homöomorph einem direkten stetigen Summanden von $\varkappa_\alpha$, nach Voraussetzung müßte λ^* also in einen Stückraum von $\varkappa_\alpha$ permutierbar sein, was ein Widerspruch ist.

2. Wir beweisen Satz 2 nun durch transfinite Induktion nach der Stufe α. Für φ ist er nach Satz 1 richtig, für ω folgt er nach 1., also ist Satz 2 für die einfachen Normalformen 1. Stufe richtig. Er sei für die einfachen Normalformen β-ter Stufe, $\beta < \alpha$, schon bewiesen. Beweisen wir ihn jetzt für $\varkappa_\alpha$, so folgt er nach 1. für $\varkappa_\alpha^*$, ist dann also allgemein richtig.

$\varkappa_\alpha$ hat entweder die Form $\varphi(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\beta, \ldots)$ oder $\varphi(\varkappa_{\alpha-1}^*, \varkappa_{\alpha-1}^*, \ldots)$. Im ersten Fall können wir durch eine Permutation die $\varkappa_\beta$ in eine einzige Folge ordnen, wir können also in jedem Falle schreiben

$$\varkappa_\alpha \simeq \tilde{\nu} = \varphi(\nu_1, \nu_2, \ldots),$$

wobei die ν_i eine Folge von Normalformen $\varkappa_\beta$ oder $\varkappa_\beta^*$ niedrigerer als α-ter Stufe durchlaufen. Da es auf eine Permutation nicht ankommt, können wir uns darauf beschränken, Satz 2 für $\tilde{\nu}$ zu beweisen.

Die Stellen aus $\tilde{\nu}$ haben die Form $\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n, \mathfrak{o}, \mathfrak{o}, \ldots)$, $\mathfrak{x}_i$ aus ν_i. Ist $\mathfrak{x}_n$ die letzte von $\mathfrak{o}$ verschiedene Stelle, so heiße n wieder die „Länge" von $\mathfrak{x}$.

Bei der Homöomorphie von λ auf den Teilraum μ von $\tilde{\nu}$ mögen die Einheitsstellen $\mathfrak{e}_i$ in die Stellen $\mathfrak{a}_i$ aus μ übergehen. Die $\mathfrak{a}_i$ der Länge n sind die Bilder gewisser $\mathfrak{e}_i$, deren Indizes eine (endliche oder unendliche) Menge M_n bilden mögen. Die Stellen $\sum_i a_i \mathfrak{e}_i$ aus λ, die nur auf M_n von Null verschiedene Koordinaten a_i haben, bilden den Stückraum $\lambda^{(M_n)}$. $\lambda^{(M_n)}$ geht bei der Homöomorphie von λ auf μ in einen Raum $\mu^{(n)}$ über, dessen Stellen alle höchstens die Länge n haben, da sie ja die Grenz-

[23]) Vgl. M., § 2, Satz 3.

stellen von Folgen von Linearkombinationen $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathfrak{a}_i$ aus Stellen $\mathfrak{a}_i$ der Länge n sind.

$\mu^{(n)}$ liegt also im Raum $\tilde{\nu}^{(n)}$ aller Stellen der Länge $\leqq n$ aus $\tilde{\nu}$. $\tilde{\nu}^{(n)}$ ist, als Teilraum von $\tilde{\nu}$ aufgefaßt, offenbar homöomorph dem Raum $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n$, dieser wiederum ist nach § 2, Satz 1—3 in ν_k permutierbar, wenn ν_k die einfache Normalform größter Stufe unter $\nu_1, \ldots, \nu_n$ ist.

3. Wir zeigen jetzt, daß $\mu^{(n)}$ direkter stetiger Summand von $\tilde{\nu}^{(n)}$ ist. μ ist nach Voraussetzung direkter stetiger Summand von $\tilde{\nu}$. $\mu^{(n)}$ ist als Bild des direkten stetigen Summanden $\lambda^{(M_n)}$ von λ ebenfalls direkter stetiger Summand von μ (die stetige direkte Summe ist ja homöomorph invariant definiert). Wie leicht zu sehen, ist der direkte stetige Summand eines direkten stetigen Summanden selbst wieder direkter stetiger Summand, es gibt also eine direkte stetige Zerlegung

$$\tilde{\nu} = \mu^{(n)} + \chi^{(n)}. \tag{1}$$

Jede Stelle $\mathfrak{y}$ von $\tilde{\nu}^{(n)}$ zerfällt danach auch in $\mathfrak{y} = \mathfrak{z} + \mathfrak{s}$, $\mathfrak{z}$ in $\mu^{(n)}$, $\mathfrak{s}$ in $\chi^{(n)}$. Nun ist aber $\mu^{(n)}$ Teilraum von $\tilde{\nu}^{(n)}$, also bildet auch die Gesamtheit der $\mathfrak{s}$ einen Teilraum $\tau^{(n)}$ von $\tilde{\nu}^{(n)}$, d. h. (1) induziert eine direkte stetige Zerlegung

$$\tilde{\nu}^{(n)} = \mu^{(n)} + \tau^{(n)}.$$

Damit haben wir gezeigt: $\lambda^{(M_n)}$ ist homöomorph einem direkten stetigen Summanden $\mu^{(n)}$ des Stückraumes $\tilde{\nu}^{(n)}$ von $\tilde{\nu}$, also homöomorph einem direkten stetigen Summanden der Normalform ν_k von niedrigerer als α-ter Stufe. Nach Induktionsvoraussetzung ist daher für unendliches M_n $\lambda^{(M_n)}$ in einen Stückraum von ν_k permutierbar, also nach § 3, Satz 2 in eine Normalform niedrigerer als α-ter Stufe. Ist M_n endlich, so ist $\lambda^{(M_n)}$ ein endlichdimensionaler linearer Raum.

Durch eine Permutation läßt sich λ also in einen Raum $\hat{\lambda}$ überführen, dessen Stellen $\mathfrak{t}$ sämtlich die Form haben $\mathfrak{t} = (\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \ldots)$, $\mathfrak{t}_i$ aus μ_i, μ_i Normalform von niedrigerer als α-ter Stufe oder endlichdimensional.

4. Wir behaupten nun, daß in $\mathfrak{t}$ nur endlich viele $\mathfrak{t}_i$ von $\mathfrak{o}$ verschieden sein können. Wir nehmen das Gegenteil an, $(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \ldots)$ besitze unendlich viele $\mathfrak{t}_i \neq \mathfrak{o}$, nämlich für $i = k_1, k_2, \ldots$. $\mathfrak{t}$ kann dann in der Form $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l_j} t_{l_j} \mathfrak{e}_{l_j}$ geschrieben werden, wobei die l_j eine Teilmenge der Menge M_{k_j} durchlaufen, also $\sum_{l_j} t_{l_j} \mathfrak{e}_{l_j}$ eine Stelle aus $\lambda^{(M_{k_j})}$ bedeutet.

Alle Indizes, auf denen $\mathfrak{t}$ von Null verschieden ist, bilden eine W-Menge von λ, also gehören auch sämtliche Stellen zu λ, die statt der $t_{l_j} \neq 0$ irgendwelche Koeffizienten haben. Eine solche Stelle ist z. B. $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mathfrak{e}_{l_j}$ für geeignet gewählte l_j, die aus jedem $\lambda^{(M_{k_j})}$ genau eine Einheitsstelle enthält. Ihr entspricht in μ die unendliche Summe $\sum\limits_{j} \mathfrak{a}_{l_j}$. Diese Summe konvergiert aber nicht in μ, da $\mathfrak{a}_{l_j}$ die Länge k_j hat, die Folge $\sum\limits_{j=1}^{n} \mathfrak{a}_{l_j}$, $n = 1, 2, \ldots$, also Glieder mit nach ∞ wachsenden Längen k_n besitzt. Eine Folge von Stellen aus $\widetilde{\nu}$ kann aber nur dann konvergieren, wenn die Längen ihrer Glieder unter einer festen Schranke bleiben[24]).

Damit ist gezeigt, daß der in λ permutierbare Raum $\mathring{\lambda}$ der Stellen $(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \ldots)$, $\mathfrak{t}_i$ aus η_i, mit $\varphi\,(\mu_1, \mu_2, \ldots)$ identisch ist. Nach § 2, Satz 4 ist dieser Raum aber, da die μ_i Normalformen von niedrigerer als α-ter Stufe oder endlichdimensional sind, in eine Normalform von höchstens α-ter Stufe permutierbar, die in dem Falle, daß sie wirklich α-ter Stufe ist, mit $\varkappa_\alpha$ identisch ist. Nach § 2, Satz 3 ist also λ in einen Stückraum von $\varkappa_\alpha$ permutierbar.

Satz 3. *Der konvergenzfreie vollkommene Raum λ sei homöomorph einem Teilraum μ von $\varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*$, der direkter stetiger Summand von $\varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*$ ist. Dann läßt sich λ in einen Stückraum von $\varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*$ permutieren.*

Beweis. Es genügt, dies wieder für einen in $\varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*$ permutierbaren Raum zu zeigen. Als solchen nehmen wir für α nicht Limeszahl den in § 3 (3′) angegebenen Raum, für α Limeszahl nehmen wir einen Raum, der aus § 3 (3) entsteht, indem man die Normalformen links und rechts vom Semikolon je in eine Folge ordnet. Wir haben also in jedem Falle einen Raum

$$\widetilde{\nu} = \psi\,(\ldots, \nu_{-k}, \ldots, \nu_{-2}, \nu_{-1};\quad \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k, \ldots),$$

wobei die ν_k Normalformen niedrigerer als α-ter Stufe sind. Die Stellen aus $\widetilde{\nu}$ haben die Form $\mathfrak{x} = (\ldots, \mathfrak{o}, \mathfrak{o}, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_{i+1}, \ldots)$, $\mathfrak{x}_k$ aus ν_k, i irgend-

[24]) Dies folgt sofort aus den Resultaten in K.-T., § 15, kann aber auch unmittelbar so eingesehen werden: $\mathfrak{x}^{(n)}$ sei eine Folge von Stellen aus $\widetilde{\nu}$, deren Längen nicht beschränkt sind. Sei $\mathfrak{x}^{(j_1)}, \mathfrak{x}^{(j_2)}, \ldots$ eine Teilfolge mit den Längen $l_1 < l_2 < \ldots$. $x_{k_i}^{(j_i)}$ sei eine von Null verschiedene Koordinate von $\mathfrak{x}^{(j_i)}$ in ν_{l_i}, $i = 1, 2, \ldots$. In $\widetilde{\nu}^* = \omega\,(\nu_1^*, \nu_2^*, \ldots)$ liegt jede Stelle $\mathfrak{u} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \mathfrak{e}_{k_i}$. Wir können die a_i nun sukzessiv so bestimmen, daß $\mathfrak{u}\,\mathfrak{x}^{(j_1)} = a_1 x_{k_1}^{(j_1)} = 1$, $\mathfrak{u}\,\mathfrak{x}^{(j_2)} = a_1 x_{k_1}^{(j_2)} + a_2 x_{k_2}^{(j_2)} = 2$, usf. Die Folge $\mathfrak{x}^{(j_i)}$, also auch $\mathfrak{x}^{(n)}$, divergiert.

eine ganze Zahl. Ist x_i die erste (von links) von 0 verschiedene Stelle, so soll als „Länge" von x die Zahl $-i$ bezeichnet werden[25]).

λ sei nun homöomorph einem direkten stetigen Summanden μ von $\tilde{\nu}$. Die Bilder der Einheitsstellen e_k aus λ mögen wieder mit a_k bezeichnet werden. Die Indizes der e_k, die in a_k der Länge $\leqq 1$ übergehen, bilden eine Menge M_1. Für $n > 1$ sei M_n die Menge der Indizes der e_k, deren Bilder a_k genau die Länge n haben. Der Raum $\lambda^{(M_n)}$ ist direkter stetiger Summand von λ. Bei der Homöomorphie geht $\lambda^{(M_n)}$ in einen direkten stetigen Summanden $\mu^{(n)}$ von μ über, der in $\tilde{\nu}^{(n)}$ liegt, dem Teilraum aller Stellen der Länge $\leqq n$ aus $\tilde{\nu}$.

Im Beweise von § 3, Satz 7 wurde gezeigt, daß der Raum $\tilde{\nu}^{(n)}$ homöomorph $\varkappa_a^*$ ist. Wie im Beweise von Satz 2 schließt man nun, daß $\mu^{(n)}$ direkter stetiger Summand von $\tilde{\nu}^{(n)}$ ist, also homöomorph einem direkten stetigen Summanden von $\varkappa_a^*$. Aus Satz 2 folgt, daß $\lambda^{(M_n)}$ in einen Stückraum von $\varkappa_a^*$ permutierbar ist. Wenn man nun n alle ganzen positiven Zahlen durchlaufen läßt und die dazugehörigen Räume $\lambda^{(M_1)}, \lambda^{(M_2)}, \ldots$ bildet, so kommt man in ganz analoger Weise wie oben zum Beweise unseres Satzes.

Aus Satz 2 und 3 folgt nun leicht der

Hauptsatz 3 (Homöomorphiesatz). *Alle zu einem konvergenzfreien Raum abzählbarer Stufe homöomorphen Räume entstehen aus ihm durch Permutationen, sind also selbst wieder konvergenzfreie Räume abzählbarer Stufe. Normalformen bezüglich Homöomorphie sind die in* § 1 *Definition* 8 *eingeführten Räume.*

Beweis. In § 4 haben wir gezeigt, daß die zu konvergenzfreien Räumen homöomorphen Räume auch konvergenzfrei sind. Aus Satz 1 und 2 folgt, daß die homöomorphen Räume sogar Räume abzählbarer Stufe sind. Damit ist die Behauptung darauf reduziert, daß zwei konvergenzfreie Räume abzählbarer Stufe dann und nur dann homöomorph sind, wenn sie ineinander permutierbar sind. Wir brauchen also nur noch beweisen, daß zwei der in § 1, Definition 8 eingeführten Normalformen nur dann homöomorph sind, wenn sie identisch sind.

μ und ν seien also homöomorph. Nach Satz 1 und 2 muß μ in einen Stückraum von ν permutierbar sein und umgekehrt ν in einen Stückraum von μ. Da nach § 3, Satz 2 jeder Stückraum höchstens dieselbe Stufe hat wie der Raum selbst, müssen μ und ν von derselben Stufe sein. Es kann nicht $\mu = \varkappa_a$ und $\nu = \varkappa_a^*$ sein, da nach § 3, Satz 4 $\varkappa_a$ niemals

[25]) Daß wir die Länge mit $-i$ bezeichnen hat den Grund darin, daß die Summe zweier Stellen der Länge $\leqq k$ wieder die Länge $\leqq k$ hat; dies wäre falsch, wenn wir die Länge mit $+i$ bezeichnen würden.

in einen Stückraum von $\varkappa_\alpha^*$ permutierbar ist. Es kann aber auch nicht $\mu = \varkappa_\alpha$ und $\nu = \varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*$ sein, denn mit $\varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*$ müßte ja auch $\varkappa_\alpha^*$ selbst in einen Stückraum von $\varkappa_\alpha$ permutierbar sein. Analog scheidet noch die Möglichkeit $\mu = \varkappa_\alpha^*$ und $\nu = \varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha^*$ aus, es bleibt also nur übrig $\mu = \nu$.

Damit ist nun das Homöomorphieproblem für konvergenzfreie Räume abzählbarer Stufe gelöst. Die naheliegende Vermutung, daß zwei beliebige konvergenzfreie vollkommene Räume nur dann homöomorph sind, wenn sie ineinander permutierbar sind, konnte ich bisher noch nicht bestätigen. Ob es überhaupt konvergenzfreie vollkommene Räume gibt, die nicht mit einem Raum abzählbarer Stufe homöomorph sind, untersuchen wir im letzten Paragraphen.

Wir erwähnen zum Schluß noch, daß mit der Lösung des Homöomorphieproblems für die Räume auch das Isomorphieproblem für die zugehörigen unendlichen maximalen Matrizenringe gelöst ist. Aus den Resultaten von A. Weber[26]) folgt sofort

Satz 4. *Die Gesamtheit $\Sigma(\lambda)$ der unendlichen Matrizen, die einen konvergenzfreien Raum abzählbarer Stufe in sich überführen, bildet einen maximalen Matrizenring, den wir als den zu λ gehörigen konvergenzfreien Matrizenring abzählbarer Stufe bezeichnen. Alle zu einem solchen Matrizenring (ring)isomorphen vollkommenen Matrizenringe ergeben sich aus ihm durch an Zeilen und Spalten gleichzeitig ausgeführte Permutationen, sind also selbst wieder konvergenzfreie Matrizenringe abzählbarer Stufe. Normalformen bezüglich Isomorphie sind die zu den in* § 1, *Definition* 8 *eingeführten Räumen gehörigen Matrizenringe.*

§ 6.

Beispiel eines vollkommenen konvergenzfreien Raumes, der keinem Raum abzählbarer Stufe homöomorph ist.

Jeder Raum abzählbarer Stufe, der von φ, ω verschieden und nicht in $\varphi + \omega$ permutierbar ist, besitzt einen in $\varphi\omega$ oder einen in $\omega\varphi$ permutierbaren Stückraum. Um einen vollkommenen konvergenzfreien Raum zu konstruieren, der keinem Raum abzählbarer Stufe homöomorph ist, genügt es nach dem Homöomorphiesatz also, einen von φ, ω verschiedenen, nicht in $\varphi + \omega$ permutierbaren, vollkommenen konvergenzfreien Raum anzugeben, der keinen in $\varphi\omega$ oder $\omega\varphi$ permutierbaren Stückraum besitzt. Wir werden im folgenden einen solchen Raum konstruieren, wobei wir allerdings die Richtigkeit der Kontinuumshypothese voraussetzen müssen.

---

[26]) Vgl. die in Anm. [4]) zitierte Arbeit, § 3.

Definition 1. *Eine Menge soll „Quermenge" zu den Mengen M_α heißen, wenn der Durchschnitt $[M, M_\alpha]$ für jedes α nur endlich viele Elemente enthält.*

Hilfssatz 1. *Es seien abzählbar viele unendliche Teilmengen M_i der Menge Z der natürlichen Zahlen gegeben. Haben je zwei M_i endlichen Durchschnitt, so gibt es eine von den M_i verschiedene unendliche Teilmenge M von Z, die Quermenge zu allen M_i ist.*

Zum Beweise greifen wir aus M_1 irgendein Element m_1 heraus, aus M_2 ein Element m_2, das nicht in M_1 liegt, allgemein aus M_n ein Element m_n, das nicht in M_1 bis M_{n-1} liegt. $M = \{m_1, m_2, \ldots\}$ ist offenbar eine Quermenge zu den M_i.

Wir konstruieren uns nun den gesuchten Raum folgendermaßen:

1. Es sei M irgendeine unendliche Teilmenge von Z, $M = E_1^{(M)} + E_2^{(M)} + \ldots$ sei eine Einteilung $\mathfrak{E}(M)$ von M in abzählbar viele elementefremde unendliche Teilmengen. Solcher Einteilungen von M gibt es höchstens $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$ verschiedene ($\aleph$ ist die Mächtigkeit des Kontinuums); da es andererseits mindestens $\aleph$ verschiedene gibt, ist die Anzahl der $\mathfrak{E}(M)$ genau $\aleph$.

Es gibt $\aleph$ verschiedene unendliche Teilmengen M von Z, also $\aleph \cdot \aleph = \aleph$ verschiedene $\mathfrak{E}(M)$ überhaupt. Nach der Kontinuumshypothese können wir uns alle diese $\mathfrak{E}(M)$ in eine wohlgeordnete Folge

$$(1) \qquad \mathfrak{E}_1(M_1),\ \mathfrak{E}_2(M_2), \ldots,\ \mathfrak{E}_\alpha(M_\alpha), \ldots$$

angeordnet denken, von der jeder Abschnitt abzählbar ist.

Es gibt ferner $\aleph$ Einteilungen von Z in zwei elementefremde unendliche Teilmengen. Wir können daher den $\mathfrak{E}_\alpha(M_\alpha)$ mit $M_\alpha = Z$ je eine solche Einteilung zuordnen, so daß genau alle Einteilungen aufgebraucht sind. Dies denken wir uns ausgeführt, $\mathfrak{E}_\alpha(M_\alpha)$ mit $M_\alpha = Z$ sei die Einteilung $Z = Z_1^{(\alpha)} + Z_2^{(\alpha)}$ zugeordnet.

2. Wir bilden uns nun durch transfinite Induktion eine Folge F_α von Teilmengen von Z. Der gesuchte Raum sei dann der Raum λ aller auf diesen F_α finiten Stellen. Er ist nach K.-T., § 15, Satz 2 vollkommen. Gleichzeitig mit den F_α konstruieren wir eine Folge von Mengen W_α, die mit jedem F_α endlichen Durchschnitt haben, also W-Mengen für λ sind.

$\mathfrak{E}_1(M_1)$ sei die Zerlegung $M_1 = E_1^{(M_1)} + E_2^{(M_1)} + \ldots.$ G_1 sei irgendeine unendliche Teilmenge von M_1, die zugleich Quermenge zu den $E_i^{(M_1)}$ ist.

1. Fall. $M_1 \neq Z$. Wir zerlegen G_1 in zwei elementefremde unendliche Teilmengen, $G_1 = F_1 + W_1$. Da F_1 eine F-Menge von λ ist, die aus unendlich vielen $E_i^{(M_1)}$ je endlich viele Elemente enthält, kann der Stückraum $\lambda^{(M_1)}$ nicht so in $\omega\,\varphi$ permutierbar sein, daß die $E_i^{(M_1)}$ in die Indizesmengen, die zu je einem φ aus $\omega\,\varphi = \omega(\varphi, \varphi, \ldots)$ gehören, übergehen. Daraus, daß W_1 eine W-Menge für λ ist und aus unendlich vielen $E_i^{(M_1)}$ Elemente enthält, folgt analog, daß $\lambda^{(M_1)}$ durch die Einteilung von M_1 in die $E_i^{(M_1)}$ nicht gleich $\varphi\,\omega$ werden kann.

2. Fall. $M_1 = Z$. Zu $\mathfrak{E}_1(M_1)$ gehört noch eine Zerlegung $Z = Z_1^{(1)} + Z_2^{(1)}$. G_1 ist in $Z_1^{(1)}$ oder $Z_2^{(1)}$ unendlich, z. B. in $Z_1^{(1)}$. Dann zerlegen wir G_1 so in zwei Teile F_1, W_1, daß F_1 und W_1 unendlich viele Elemente in $Z_1^{(1)}$ besitzen. Dann ist $Z_1^{(1)}$ weder eine F-Menge noch eine W-Menge für λ, also wird λ durch die Einteilung $Z = Z_1^{(1)} + Z_2^{(1)}$ nicht gleich $\varphi + \omega$ in dem Sinne, daß $\lambda^{(Z_1^{(1)})} = \varphi$ und $\lambda^{(Z_2^{(1)})} = \omega$ ist, oder umgekehrt.

3. Für alle Ordnungszahlen $\beta < \alpha$, α eine Zahl der 1. oder 2. Zahlklasse, sei G_β und die Zerlegung $G_\beta = F_\beta + W_\beta$ erklärt, derart, daß verschiedene F_β stets nur endlichen Durchschnitt haben, ebenso verschiedene W_β und auch die F_β mit den W_β.

Sei nun $\mathfrak{E}_\alpha(M_\alpha)$ die α-te Zerlegung aus (1), also $M_\alpha = E_1^{(M_\alpha)} + E_2^{(M_\alpha)} + \ldots.$

I. $M_\alpha \neq Z$. Wir unterscheiden vier Fälle:

a) Jeder Durchschnitt $[M_\alpha, F_\beta]$ bzw. $[M_\alpha, W_\beta]$, $\beta < \alpha$, sei in der Vereinigungsmenge von je endlich vielen $E_i^{(M_\alpha)}$ enthalten. Wir nehmen als G_α irgendeine unendliche Teilmenge von M_α, die zugleich Quermenge zu allen $E_i^{(M_\alpha)}$ ist. G_α hat dann von selbst mit allen F_β, W_β endlichen Durchschnitt. Wir zerlegen G_α in zwei unendliche Teilmengen, $G_\alpha = F_\alpha + W_\alpha$. Dann schließt man wie unter 2., daß $\lambda^{(M_\alpha)}$ durch die Einteilung $\mathfrak{E}_\alpha(M_\alpha)$ nicht gleich $\varphi\omega$ und nicht gleich $\omega\varphi$ werden kann.

b) Es gebe sowohl eine Menge $[M_\alpha, F_\beta]$, wie eine Menge $[M_\alpha, W_\gamma]$, $\beta, \gamma < \alpha$, die mit unendlich vielen $E_i^{(M_\alpha)}$ Elemente gemeinsam haben. Wir setzen $G_\alpha = F_\alpha = W_\alpha = 0$. Es ist hier sofort klar, daß $\lambda^{(M_\alpha)}$ durch die Einteilung von M_α in die $E_i^{(M_\alpha)}$ niemals gleich $\varphi\omega$ oder $\omega\varphi$ werden kann.

c) Es gebe keine Menge $[M_\alpha, F_\beta]$, die mit unendlich vielen $E_i^{(M_\alpha)}$ Elemente gemeinsam hat, aber wohl gebe es solche Mengen $[M_\alpha, W_\beta]$. Jedenfalls kann $\lambda^{(M_\alpha)}$ nicht durch die Einteilung $\mathfrak{E}_\alpha(M_\alpha)$ gleich $\varphi\omega$ werden. Wir müssen noch zeigen, daß wir G_α, F_α und W_α so wählen können, daß $\lambda^{(M_\alpha)}$ durch die Einteilung $\mathfrak{E}_\alpha(M_\alpha)$ auch nicht gleich $\omega\varphi$ werden kann. Ist eine der Mengen $[M_\alpha, W_\beta]$ in einem $E_i^{(M_\alpha)}$ unendlich, so ist dies sicher nicht möglich, da die Stellen von $\omega\varphi$ in den $E_i^{(M_\alpha)}$ ja finit sein müssen. Dann setzen wir wieder $G_\alpha = F_\alpha = W_\alpha = 0$. Wir können also voraussetzen, daß die $[M_\alpha, W_\beta]$ in jedem $E_i^{(M_\alpha)}$ finit sind. Die W_β mit $\beta < \alpha$ sind nur abzählbar viele Mengen, also gibt es höchstens abzählbar viele $[M_\alpha, W_\beta]$. Dann kann man aber ähnlich wie im Beweise von Hilfssatz 1 eine in den $E_i^{(M_\alpha)}$ finite unendliche Teilmenge G_α von M_α herausgreifen, die Quermenge zu allen $[M_\alpha, W_\beta]$ ist. Eine Zerlegung von G_α in zwei unendliche Teilmengen, $G_\alpha = F_\alpha + W_\alpha$, liefert eine F-Menge F_α, die mit jedem $E_i^{(M_\alpha)}$ endlichen Durchschnitt hat. F_α müßte, wenn $\lambda^{(M_\alpha)}$, nach $\mathfrak{E}_\alpha(M_\alpha)$ eingeteilt, gleich $\omega\varphi$ wäre, aber W-Menge sein, also ist $\lambda^{(M_\alpha)}$, nach $\mathfrak{E}_\alpha(M_\alpha)$ eingeteilt, nicht gleich $\omega\varphi$. F_α und W_α haben nach Konstruktion mit allen

W_β endlichen Durchschnitt. Da die F_β nach Voraussetzung nur mit endlich vielen $E_i^{(M_\alpha)}$ Elemente gemeinsam haben, haben F_α und W_α aber auch mit den F_β endlichen Durchschnitt.

d) Es gebe keine Menge $[M_\alpha, W_\beta]$, die mit unendlich vielen $E_i^{(M_\alpha)}$ Elemente gemeinsam hat, wohl aber gebe es solche Mengen $[M_\alpha, F_\beta]$. Man schließt in diesem Fall analog wie in c).

II. $M_\alpha = Z$. Im Falle a) stellen wir wie in I. eine Menge G_α auf und können durch eine geeignete Aufteilung von G_α in F_α und W_α (vgl. 2.) dafür sorgen, daß $Z_1^{(\alpha)}$ oder $Z_2^{(\alpha)}$ weder F- noch W-Menge für λ ist. Dann geht λ durch die Einteilung $Z = Z_1^{(\alpha)} + Z_2^{(\alpha)}$ nicht in $\varphi + \omega$ über. Außerdem ist λ, nach $\mathfrak{E}_\alpha(M_\alpha)$ eingeteilt, weder gleich $\varphi\,\omega$ noch gleich $\omega\,\varphi$.

Genau so können wir in den Fällen von c) und d), in denen in I ein $G_\alpha \neq 0$ aufgestellt wurde, noch durch geeignete Einteilung von G_α in F_α und W_α dafür sorgen, daß λ durch $Z = Z_1^{(\alpha)} + Z_2^{(\alpha)}$ nicht in $\varphi + \omega$ übergeht.

Die noch übrigen Fälle b), c), d) können wir gemeinsam betrachten. Wir brauchen nur zu zeigen, daß es für jedes α stets noch eine unendliche Teilmenge U von Z gibt, die zu den schon konstruierten F_β und W_β Quermenge ist, denn wir brauchen dann nur diese Teilmenge gleich G zu setzen und so in F_α und W_α aufzuteilen, daß $Z_1^{(\alpha)}$ oder $Z_2^{(\alpha)}$ weder F-noch W-Menge für λ ist. Dann ist auch jetzt erreicht, daß λ nicht durch $Z = Z_1^{(\alpha)} + Z_2^{(\alpha)}$ gleich $\varphi + \omega$ wird.

Es könnte nun sein, daß durch ungeschickte Wahl der ω ersten G_β, $\beta = 1, 2, \ldots$, Z durch endlich viele F_β und W_β überdeckt wird, dann können wir für spätere α keine solche Teilmenge U mehr finden. Gehen wir aber so vor (und diese Freiheit in der Wahl der ersten abzählbar vielen $G_{\beta_i} \neq 0$ haben wir: wir brauchen bei der Wahl von G_{β_i} nur dafür sorgen, daß zur Vereinigungsmenge der G_{β_1} bis G_{β_i} unendlich viele Elemente aus Z nicht gehören), daß wir abzählbar viele $W_{\beta_i} \neq 0$ und $F_{\beta_i} \neq 0$ mit paarweise endlichem Durchschnitt erhalten haben, dann gibt es nach Hilfssatz 1 zu jedem späteren α eine solche Menge U.

4. Der so konstruierte Raum λ erfüllt die an ihn gestellten Forderungen. Er ist von φ und ω verschieden, da er sowohl eine unendliche F-Menge wie eine unendliche W-Menge besitzt, er ist nicht in $\varphi + \omega$ permutierbar, da es nach Konstruktion keine Zerlegung $Z = Z_1 + Z_2$ gibt, so daß Z_1 F-Menge und Z_2 W-Menge von λ ist. Er besitzt schließlich keinen in $\varphi\,\omega$ oder $\omega\,\varphi$ permutierbaren Stückraum, ebenfalls nach Konstruktion.

(Eingegangen am 1. 11. 1934.)

Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring.

Von

Wilhelm Magnus in Princeton N. J. (U. S. A.)

Einleitung.

Läßt sich jedem Element einer Gruppe eindeutig ein Element eines Ringes zuordnen, so daß dem Produkt zweier Gruppenelemente das Produkt der entsprechenden Ringelemente zugeordnet ist, so liefert die Untersuchung der zweiseitigen Ideale des Ringes und der zugehörigen Restklassenringe rückwärts Aussagen über die Gruppe; hiervon hat K. Shoda[1]) bei seinen Untersuchungen der Automorphismengruppen Abelscher Gruppen Gebrauch gemacht. Im folgenden wird zunächst (§ 2) für die freien Gruppen, die ja jede diskrete Gruppe als Faktorgruppe enthalten, eine Darstellung in einem „freien" Ring mit Einheitselement gegeben. Dieser ist folgendermaßen konstruiert:

s_i $(i = 1, 2, \ldots)$ seien Größen, zwischen denen eine kommutative Addition und assoziative Multiplikation erklärt ist, wobei die distributiven Gesetze gelten sollen. Es werde nun ein „allgemeinster" Ring $\mathfrak{R}$ mit Einheitselement e konstruiert, der die Größen s_i enthält und dessen allgemeines Element eine beliebige formale Summe

$$n_0 e + \sum_{k=1}^{\infty} n_k P_k$$

ist, wobei die P_k alle möglichen Potenzprodukte der s_i bedeuten und die n_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ irgendwelche ganzen Zahlen sind. Daß diese Größen tatsächlich einen Ring bilden, ist leicht zu sehen; zugleich bieten sich in diesem Ring von selber eine unendliche Reihe von Idealen $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots, \mathfrak{J}_n, \ldots$ dar, nämlich die Potenzen des von den s_i erzeugten „Primideals" $\mathfrak{J}_1$ (der Restklassenring nach $\mathfrak{J}_1$ sind die ganzen Zahlen). $\mathfrak{R}/\mathfrak{J}_n$ besitzt eine endliche Basis, d. h. alle Elemente sind Linearkombinationen mit ganzzahligen Koeffizienten von endlich vielen Elementen, sofern die Anzahl der s_i endlich ist. Indem man den Elementen einer

[1]) Math. Annalen **100** (1928), S. 674–686; Shoda benutzt den vollen Gruppenring, während zwischen den Elementen der Restklassenringe $\mathfrak{R}/\mathfrak{J}_n$ (siehe unten), welche den Elementen von $F/F^{(n)}$ zugeordnet sind, lineare Beziehungen bestehen derart, daß $\mathfrak{R}/\mathfrak{J}_n$ nicht den vollen Gruppenring von $F/F^{(n)}$ enthält.

freien Gruppe F geeignete Elemente von $\mathfrak{R}$ zuordnet (§ 2), erhält man eine getreue Darstellung von F in $\mathfrak{R}$ und entsprechend eine Darstellung einer Faktorgruppe $F/F^{(n)}$ von F in $\mathfrak{R}/\mathfrak{J}_n$; die sehr einfachen Eigenschaften von $\mathfrak{J}_n/\mathfrak{J}_{n+1}$ ermöglichen eine eingehende Untersuchung der Gruppen $F/F^{(n)}$, die dann im weiteren angewendet wird; die leicht ersichtliche Möglichkeit der Zwischenschaltung von Idealen zwischen $\mathfrak{J}_n$ und $\mathfrak{J}_{n+1}$ wird in § 6 zur Konstruktion von Gruppen mit bestimmten Eigenschaften ausgenutzt. Zur Vereinfachung der Diskussion wird in § 2 $\mathfrak{R}$ selber durch Matrizen mit Parametern in den Koeffizienten dargestellt.

$\mathfrak{J}_n$ kann charakterisiert werden als das Ideal von $\mathfrak{R}$, das aus allen Elementen einer „Dimension" $\geqq n$ in den s_i besteht. Die Gruppen $F^{(n)}$ mögen daher die F zugeordneten „Dimensionsgruppen" heißen; infolge ihrer „Vollinvarianz" (Satz IV, § 2) lassen sich auch für eine beliebige Gruppe G Dimensionsgruppen $G^{(n)}$ definieren; das im folgenden entwickelte Verfahren ist insbesondere brauchbar zur Untersuchung von solchen Gruppen G^*, für die der Durchschnitt der Gruppen $G^{*(n)}$ das Einheitselement ist. Die Dimensionsgruppen $G^{(n)}$ sind vermutlich identisch mit den von K. Reidemeister[2]) für die Untersuchung unendlicher diskontinuierlicher Gruppen herangezogenen höheren Kommutatorgruppen G_n einer beliebigen Gruppe G; die Definition der G_n wird in § 1 gegeben; sie stehen jedenfalls in engen Beziehungen mit den $G^{(n)}$ und sind im übrigen, wie aus Untersuchungen von W. Burnside[3]) und P. Hall[4]) hervorgeht, für die Gruppen von Primzahlpotenzordnung von großer Bedeutung. Ein Nachweis der Übereinstimmung von $G^{(n)}$ und G_n würde es ermöglichen, einen Teil der von P. Hall[4]) erhaltenen Resultate in vereinfachter Weise abzuleiten (§ 6). Für $n = 3$ und $n = 4$ ist diese Übereinstimmung leicht direkt nachzuweisen, und das im folgenden entwickelte Verfahren führt bei unwesentlicher Modifikation zu den für diese Fälle von K. Reidemeister[2]) und H. Adelsberger[5]) gegebenen Darstellungen für die Faktorgruppen G/G_3 und G/G_4.

In § 2 wird zunächst das allgemeine Verfahren entwickelt, wobei als Grundlage die freien Gruppen benutzt werden; die Tatsache, daß die freien Gruppen zu den eingangs mit G^* bezeichneten Gruppen gehören, wird in § 5 zu dem Nachweis benutzt, daß, entsprechend einer allgemeinen Vermutung von H. Hopf[6]), freie Gruppen von endlich vielen Erzeugenden

---

[2]) Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität **5** (1926), S. 33—39.

[3]) Theory of groups of finite order, Cambridge 1911, 2. Aufl., S. 166.

[4]) Proceedings of the London Mathematical Society (2) **36** (1933), S. 29—95.

[5]) Journ. f. d. reine u. angew. Math. **163** (1930), S. 103—124.

[6]) Nach einer Mitteilung von Herrn B. Neumann.

nicht mit einer ihrer Faktorgruppen einstufig isomorph sein können. Dieser Satz ist implizit in einem Theorem von F. Levi[7]) enthalten; wie sich aus § 5 entnehmen läßt, gilt er allgemein für Gruppen G^* von endlich vielen Erzeugenden.

Der zweite Teil von § 2 ermöglicht die weitgehende Anwendung der linearen Algebra auf die Untersuchung von Automorphismen und von Isomorphie unendlicher diskreter Gruppen (§ 3); § 4 enthält einfache Beispiele hierzu. Die volle Reduktion der für den Fall einer freien Gruppe G den Faktorgruppen $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ zugeordneten Darstellungen der linearen Gruppen[8]) dürfte für einige speziellere Fragen nützlich sein, konnte jedoch vom Verfasser bisher nicht durchgeführt werden.

Es sei noch auf eine Beziehung des in § 6 angegebenen Beispiels zur Klassenkörpertheorie hingewiesen. Das Klassenkörperturmproblem legt die folgende Frage nahe: Muß jede Kette $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ von Gruppen von Primzahlpotenzordnung, in der G_i isomorph ist mit der Faktorgruppe nach der i-ten Kommutatorgruppe von G_{i+1}, nach endlich vielen Schritten abbrechen? Das gilt jedenfalls, wenn die Abelsche Gruppe G_1 zyklisch oder vom Typ (2, 2) ist. Die Untersuchungen von A. Scholz[9]) und O. Taussky[9]) legen es nahe, dies auch für den Fall anzunehmen, daß G_1 vom Typ $(3^{m_1}, 3^{m_2})$ ist. Eine bejahende Antwort auf diese Frage würde bedeuten, daß die Klassenzahl eines durch hinreichend oft wiederholte Konstruktion des absoluten Hilbertschen Klassenkörpers über einem algebraischen Zahlkörper k entstehenden Oberkörpers zu irgendeinem vorgegebenen Primfaktor der Klassenzahl von k teilerfremd sein muß. Das angegebene Beispiel zeigt aber, daß jedenfalls die etwas schwächere Frage zu verneinen ist: Ist die Stufigkeit einer Gruppe G von Primzahlpotenzordnung schon durch die Struktur der Faktorgruppe nach der Kommutatorgruppe beschränkt?

§ 1.

Definition gewisser charakteristischer Faktorgruppen einer beliebigen Gruppe.

Es sei $G = G_1$ eine beliebige Gruppe. G_2 sei ihre Kommutatorgruppe, und G_n sei für $n > 1$ rekursiv definiert als die kleinste invariante Untergruppe von G, die alle Kommutatoren $g\, g_{n-1}\, g^{-1}\, g_{n-1}^{-1}$ eines beliebigen

---

[7]) Math. Zeitschr. 37 (1933), S. 90—97.

[8]) In einem Spezialfall tritt eine solche (für $n = 3$) auf bei F. Levi und B. L. van der Waerden, „Über eine besondere Klasse von Gruppen", Abh. Math. Semin. Hamburg. Univ. 9 (1932), S. 154—158.

[9]) Journ. f. Math. 171 (1934), S. 19—41. Einer Mitteilung von Fräulein O. Taussky verdanke ich den Hinweis auf die obenstehende Frage.

Elementes g_{n-1} aus G_{n-1} mit einem beliebigen Element g aus G enthält. Im Anschluß an P. Hall[3]) mögen die Gruppen G_n die Untergruppen, die Gruppen G/G_n die Faktorgruppen der „absteigenden Zentralreihe" („lower central series") von G heißen. Die G_n brauchen weder untereinander noch von G verschieden zu sein. G_n/G_{n+1} ist stets eine zum Zentrum von G/G_{n+1} gehörige Abelsche Gruppe; diese besitzt jedenfalls dann eine endliche Basis, wenn G endlich viele Erzeugende besitzt. Die Invarianten von G_n/G_{n+1} sind dann für die Gruppe G charakteristische Zahlen, da G_n und G_{n+1} charakteristische Untergruppen von G sind [vergl. K. Reidemeister[2])].

Durch vollständige Induktion lassen sich in einfacher Weise die folgenden Behauptungen ableiten:

Hilfssatz 1. Sind g_k bzw. g_l Elemente aus G_k bzw. G_l, so ist $g_k g_l g_k^{-1} g_l^{-1}$ Element aus G_{k+l}.

Hilfssatz 2. Ist $f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ ein Potenzprodukt aus irgendwelchen Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ aus G, und ist $f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ Element von G_n, so ist für jede natürliche Zahl h

$$f(a_1^h, a_2^h, \ldots, a_n^h)\,[f(a_1, a_2, \ldots, a_n)]^{-h^n}$$

ein Element aus G_{n+1}.

Beim Beweise ist die vollständige Induktion für Hilfssatz 2 nach n zu nehmen; für Hilfssatz 1 nehme man $k \leqq l$ an; für $k = 1$ ist der Satz dann nach Definition richtig, für größere k nehme man g_k als Kommutator eines Elementes aus G_{k-1} und eines Elementes aus G an (was offenbar genügt), und führe dadurch den Satz auf kleinere Werte von k zurück. Auch bei Hilfssatz 2 ist es zweckmäßig anzunehmen, daß f Kommutator eines Elementes aus G_{n-1} mit irgendeinem Element aus G ist; der allgemeine Fall ist sofort auf diesen Fall reduzierbar.

§ 2.

Zwei Darstellungen der freien Gruppen.

$F \equiv F^{(1)}$ sei eine freie Gruppe. a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ seien freie Erzeugende von F. Es soll nun zunächst eine Darstellung von F durch Elemente eines Ringes $\mathfrak{R}$ von der in der Einleitung charakterisierten Art gegeben werden. Dazu werde jedem a_i eine Größe s_i zugeordnet; $\mathfrak{R}$ sei der von einem Einheitselement 1 und den assoziativen Größen s_i erzeugte „freie" Ring. Man setze nun

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_i &= 1 + s_i, \\ a_i^{-1} &= 1 - s_i + s_i^2 \mp \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)_i^n s_i^n. \end{aligned}$$

Dieser Ansatz entspricht gewissermaßen der Vorstellung, daß man die als lineare Operatoren gedachten a_i und ihre Reziproken „in der Umgebung"

des Einheitselementes entwickelt; für die unten zur Darstellung von $\mathfrak{R}$ benutzten Matrizen ist die Möglichkeit einer solchen Entwicklung evident.

Es gilt nun der Satz:

I. *Durch die Beziehungen* (1) *erhält man eine getreue Darstellung von* F *durch Elemente aus* $\mathfrak{R}$, *wenn man einem Produkt der* $a_i^{\pm 1}$ *das entsprechende Produkt der Elemente* $1 + s_i$, $\Sigma(-1)^n s_i^n$ *aus* $\mathfrak{R}$ *zuordnet.*

Beweis: Der Einfachheit halber werde der Satz nur für den Fall bewiesen, daß F nur zwei Erzeugende $a_1 = a$, $a_2 = b$ besitzt. Der allgemeine Fall ist prinzipiell nicht schwieriger. Wir schreiben noch s und t für s_1 bzw. s_2. Jedes Element g von F ist auf eine und nur eine Weise in der Form

$$g = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \dots a^{\alpha_m} b^{\beta_m} \tag{2}$$

darstellbar, wobei die α_i und β_i, abgesehen von α_1 und β_m, von Null verschiedene ganze Zahlen $\lessgtr 0$ sind, während α_1 oder β_m oder beide gleich Null sein dürfen. Dem Element (2) von F ist in $\mathfrak{R}$ das Element

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\binom{\alpha_1}{\nu_1}s^{\nu_1}\sum_{\mu_1=0}^{\infty}\binom{\beta_1}{\mu_1}t^{\mu_1}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\binom{\alpha_2}{\nu_2}s^{\nu_2}\sum_{\mu_2=0}^{\infty}\binom{\beta_2}{\mu_2}t^{\mu_2}\dots \\ &\qquad\qquad \dots\sum_{\nu_m=0}^{\infty}\binom{\alpha_m}{\nu_m}s^{\nu_m}\sum_{\mu_m=0}^{\infty}\binom{\beta_m}{\mu_m}t^{\mu_m} \\ &= \sum_{\nu_i,\mu_i=0}^{\infty}\binom{\alpha_1}{\nu_1}\binom{\beta_1}{\mu_1}\binom{\alpha_2}{\mu_2}\binom{\beta_2}{\mu_2}\dots\binom{\alpha_m}{\nu_m}\binom{\beta_m}{\mu_m}s^{\nu_1}t^{\mu_1}s^{\nu_2}t^{\mu_2}\dots s^{\nu_m}t^{\mu_m}\end{aligned} \tag{3}$$

zugeordnet. Das einzige, was man zum Beweis von I nachzuweisen hat, ist, daß die Elemente (3) alle vom Einheitselement von $\mathfrak{R}$ verschieden sind, falls nicht $m = 1$ und $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ ist. Das ist aber in der Tat der Fall, denn in der in (3) auftretenden Summe besitzt das Element

$$s^{|\alpha_1|} t^{|\beta_1|} s^{|\alpha_2|} t^{|\beta_2|} \dots s^{|\alpha_m|} t^{|\beta_m|}$$

einen von Null verschiedenen Koeffizienten, nämlich

$$\prod_{i=1}^{m}\binom{\alpha_i}{|\alpha_i|}\binom{\beta_i}{|\beta_i|}.$$

Für das Weitere benötigt man noch einen Hilfssatz, der es gestattet, aus der Darstellung eines Gruppenelementes von F in $\mathfrak{R}$ die Darstellung des inversen Elementes in $\mathfrak{R}$ in einfacher Weise zu berechnen. Allen Elementen von F sind ja Elemente von $\mathfrak{R}$ zugeordnet, die die Form $1+r$ besitzen, wobei r eine Summe von Elementen aus $\mathfrak{R}$ ist, in der das Einheitselement von $\mathfrak{R}$ nicht mehr auftritt. Es gilt nun der Satz:

II. *Dem Element g von F sei das Element $1 + r$ aus $\mathfrak{R}$ zugeordnet. Dann ist g^{-1} das Element $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n$ zugeordnet*[10]).

Der Satz II werde wieder nur für den Fall von zwei Erzeugenden von F mit Benutzung der nach I eingeführten Bezeichnungen bewiesen. g sei in der Form (2) geschrieben.

$$l = |\alpha_1| + |\beta_1| + |\alpha_2| + |\beta_2| + \dots + |\alpha_m| + |\beta_m|$$

heiße die Länge von g. Hat g die Länge Eins, so ist die Behauptung trivial. Satz II sei für alle g mit einer Länge $< l$ bewiesen. Dann gilt er auch für alle g mit der Länge l. Zum Beweise nehme man etwa $\alpha_1 > 0$ an und setze

$$g' = a^{\alpha_1 - 1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \dots a^{\alpha_m} b^{\beta_m} = a^{-1} g.$$

Es sei g' das Element $1 + u$ aus $\mathfrak{R}$ zugeordnet. Nach Voraussetzung ist dann g'^{-1}, d. h. dem Element

$$b^{-\beta_m} a^{-\alpha_m} \dots b^{-\beta_2} a^{-\alpha_2} b^{-\beta_1} a^{-\alpha_1 + 1},$$

das Element $1 - u + u^2 \mp \dots$ von $\mathfrak{R}$ zugeordnet. Man weiß nun ferner, daß dem Element g das Element $(1 + s)(1 + u)$ und dem Element g^{-1} das Element $(1 - u + u^2 \mp \dots)(1 - s + s^2 \mp \dots)$ von $\mathfrak{R}$ zugeordnet ist. Setzt man

$$(1 + s)(1 + u) = 1 + s + u + su = 1 + v; \quad v = s + u + su,$$

so lautet also die zu beweisende Behauptung:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu v^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu u^\nu \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu s^\nu.$$

Nun bestehen offenbar die Gleichungen

$$(1 + v) \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu v^\nu = 1, \quad (1 + v) \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu u^\nu \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu s^\nu = 1.$$

Die erste Gleichung ist nämlich trivial, und die zweite folgt aus der Beziehung $1 + v = (1 + s)(1 + u)$ und der Gültigkeit des Assoziativgesetzes. Subtraktion der beiden Beziehungen ergibt:

$$(1 + v) \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu v^\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu u^\nu \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu s^\nu \right\} = 0.$$

Hieraus folgt nun, daß der Koeffizient von $1 + v$ gleich Null sein muß, und damit Satz II. Nach der Definition von $\mathfrak{R}$ läßt sich nämlich jedes

---

[10]) Hierbei ist implizit vorausgesetzt, daß sowohl r^n als auch $\Sigma(-1)^n r^n$ wirklich Linearkombinationen mit endlichen Koeffizienten der „Basiselemente" $s_1^{\alpha_{11}} s_2^{\alpha_{12}} \dots s_k^{\alpha_{1k}} s_1^{\alpha_{21}} \dots s_1^{\alpha_{m1}} s_2^{\alpha_{m2}} \dots s_k^{\alpha_{mk}}$ von $\mathfrak{R}$ sind, wenn r selber eine solche Linearkombination ist. Das folgt leicht mit Benutzung des unten beim Beweise von II eingeführten Begriffes der „Dimension" eines solchen „Basiselementes".

Element ϱ von $\mathfrak{R}$ auf eine und nur eine Weise als Linearkombination der Elemente

(4) $$s^{\mu_1} t^{\nu_1} s^{\mu_2} t^{\nu_2} \dots s^{\mu_m} t^{\nu_m}$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten schreiben; die Zahlen $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \dots, \mu_m, \nu_m$ sind dabei natürliche Zahlen, mit Ausnahme von μ_1 und ν_m, die auch $= 0$ sein können. Es möge nun

$$\mu_1 + \nu_1 + \mu_2 + \nu_2 + \dots + \mu_m + \nu_m = d$$

die „*Dimension*" des Elementes (4) heißen. Das Einheitselement 1 von $\mathfrak{R}$ habe die Dimension Null; für jedes $d > 0$ gibt es nur endlich viele, etwa h_d, Elemente (4) der Dimension d. Diese bezeichne man in irgendeiner Reihenfolge mit $e_\lambda^{(d)}$, wobei λ die Werte $1, 2, \dots, h_d$ durchläuft. Jedes Element ϱ aus $\mathfrak{R}$ ist dann gleich einer Summe

$$\varrho = \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{h_d} c_{d\lambda} e_\lambda^{(d)}$$

mit ganzzahligen $c_{d\lambda}$. Da das Produkt $e_{\lambda_1}^{(d_1)} e_{\lambda_2}^{(d_2)}$ zweier Elemente der Dimensionen d_1 und d_2 die Dimension $d_1 + d_2$ besitzt, besitzt ein Produkt $(1+v)\,\varrho$ dieselben Glieder niedrigster Dimension wie ϱ, sofern v nur Glieder von einer Dimension > 0 enthält. Aus $(1+v)\,\varrho = 0$ folgt also $\varrho = 0$ und damit Satz II.

Jedem Element g aus F ist eindeutig eine Summe von ganzzahligen Vielfachen von Potenzprodukten der Elemente s_i von $\mathfrak{R}$ zugeordnet. Man denke sich diese Summe nach Gliedern von nicht abnehmender Dimension geordnet. Als erstes Glied erhält man dann stets die 1; alle weiteren Glieder besitzen dagegen eine von Null verschiedene Dimension d. Die kleinste unter diesen Dimensionen heiße d_g, und diese Zahl heiße „*die Dimension von* g". d_g ist dann und nur dann $= 0$, wenn g das Einheitselement ist. Die jedem Element g zugeordnete Zahl d_g läßt sich nun durch den folgenden Satz charakterisieren:

III. *Ist F_n die n-te Untergruppe der „absteigenden Zentralreihe"* (siehe § 1) *von $F \equiv F_1$, so ist die Dimension jedes Elementes $\neq 1$ aus F_n mindestens gleich n. Ist $g \neq 1$ ein Element mit der Dimension n, so gibt es ein Element aus F_n, das dieselben Glieder der Dimension n besitzt wie g^{δ_n}, wobei δ_n eine für jedes n feste Zahl ist.*

Es ist zu vermuten, daß alle und nur die Elemente die Dimension n besitzen, die zu F_n, aber nicht zu F_{n+1} gehören; durch Rechnung läßt sich das für kleine Werke von n direkt beweisen, doch ist es dem Verfasser nicht gelungen, dies allgemein zu zeigen. — Zum Beweise von III werde zunächst gezeigt:

IV. *Die Elemente von F mit einer Dimension $\geqq n$ bilden eine invariante Untergruppe $F^{(n)}$ von F, wobei $F \equiv F^{(1)}$ gesetzt sei. $F^{(n)}$ ist nicht nur charakteristisch, sondern sogar „vollinvariant" in F; das heißt, wenn ein Potenzprodukt Π der Erzeugenden a_i in $F^{(n)}$ liegt, so liegt auch jedes Element von F in $F^{(n)}$, das man erhält, indem man in Π die a_i durch irgendwelche Elemente g_i von F ersetzt.* $F^{(n)}$ heiße n-te Dimensionsgruppe von F.

Beweis: Daß $F^{(n)}$ invariant in F ist, folgt unmittelbar daraus, daß sich die Dimension eines Elementes bei Transformation mit einem anderen Element nicht ändert. Daß $F^{(n)}$ vollivariant ist, folgt aus Satz II. Denn sind den Elementen g_i in $\mathfrak{R}$ die Elemente $1 + \gamma_i$ zugeordnet, und ist dem Potenzprodukt $\Pi(a_i)$ der a_i das Element $1 + \pi_n + \pi_{n+1} + \ldots$ zugeordnet, wobei die $\pi_n, \pi_{n+1}, \ldots$ Glieder der Dimensionen $n, n+1, \ldots$ in den s_i sind, so ist $\Pi(\gamma_i)$ in $\mathfrak{R}$ das Element zugeordnet, das man erhält, wenn man in $\pi_n, \pi_{n+1}, \ldots$ die s_i durch γ_i ersetzt und dann die Potenzprodukte der γ_i wieder in Potenzprodukte der s_i auflöst. Da alle γ_i mindestens die Dimension Eins in den s_i besitzen (sofern $g_i \neq 1$ ist; andernfalls ist $\gamma_i = 0$), liefern $\pi_n, \pi_{n+1}, \ldots$ dabei lauter Glieder einer Dimension $\geqq n$.

Weiterhin ist die folgende Ergänzung zu IV ohne weiteres klar:

IVa. *$F^{(n)}/F^{(n+1)}$ ist eine Abelsche Gruppe ohne Elemente endlicher Ordnung. Die Anzahl der unabhängigen Erzeugenden von $F^{(n)}/F^{(n+1)}$ ist gleich der Anzahl der linear unabhängigen Elemente von $\mathfrak{R}$ von der Dimension n, die als Anfangsglieder in der Entwicklung eines Elementes aus $F^{(n)}$ auftreten können.* Zum Beispiel sind die Glieder der Dimension 2 eines Elementes von $F^{(2)}$ stets Linearkombinationen $\Sigma\, \lambda_{ik}(s_i s_k - s_k s_i)$ mit ganzzahligen λ_{ik}.

Schließlich ist auch das folgende Analogon zu Hilfssatz 2 aus § 1 trivial: Ist $g(a_i)$ ein Element aus $F^{(n)}$, und ersetzt man in dem als Potenzprodukt der a_i geschriebenen Element g die a_i durch a_i^h, so ist $g(a_i^h)\,[g(a_i)]^{-h^n}$ ein Element von $F^{(n+1)}$. Es genügt, dies für den Fall zu zeigen, daß $g(a_i)$ die genaue Dimension n hat; es sei in $\mathfrak{R}$ $g(a_i) = 1 + \gamma_n + \gamma$, wobei γ die Glieder von einer Dimension $> n$ enthält. Es wird dann $[g(a_i)]^{h^n} = 1 + h^n \gamma_n + \gamma'$ und $g(a_i^h) = 1 + h^n \gamma_n + \gamma''$; denn ersetzt man in γ und γ_n die s_i durch $h s_i + \binom{h}{2} s_i^2 + \ldots$, so bleibt an Gliedern der n-ten Dimension genau $h^n \gamma_n$ nach der Ausmultiplikation stehen. Daraus folgt mittels II die Behauptung.

Zum Beweise von III ist nun zu sagen, daß der erste Teil sofort aus II durch vollständige Induktion folgt; und zwar gilt folgendes: Be-

zeichnet man die s_i als Differenzen erster Ordnung $\Delta_1^{(i)}$, die $s_i s_k - s_k s_i$ als Differenzen zweiter Ordnung $\Delta_2^{(i,k)}$ und rekursiv die Ausdrücke

$$s_{i_n} \Delta_{n-1}^{(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1})} - \Delta_{n-1}^{(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1})} s_{i_n}$$

als „*Differenzen n-ter Ordnung*", wenn $\Delta_{n-1}^{(i_1, \ldots, i_{n-1})}$ eine beliebige Differenz $(n-1)$-ter Ordnung ist, so sind die Glieder der ersten bis $(n-1)$-ten Dimension eines Elementes aus F_n gleich Null, während die der n-ten Dimension Linearkombinationen mit ganzen rationalen Koeffizienten aus den Differenzen n-ter Ordnung sind. — Der zweite Teil von Satz III erledigt sich so: g sei ein Element der genauen Dimension n; $g = 1 + \gamma_n + \gamma$, wobei die Glieder von γ mindestens die Dimension $n+1$ haben. Es sei $g = g(a_i)$ als Potenzprodukt der a_i geschrieben; g liege in F_k, wobei $k \leqq n$ sein muß wegen des ersten Teiles von Satz III. $h_0, h_1, \ldots, h_{n-k-1}$ seien irgendwelche ganzen Zahlen. Ferner sei

$$g(a_i^{h_0})\,[g(a_i)]^{-h_0^k} = g_1(a_i), \qquad g_1(a_i^{h_1})\,[g_1(a_i)]^{-h_1^{k+1}} = g_2(a_i),$$
$$\ldots, g_{n-k-1}(a_i^{h_{n-k-1}})\,g_{n-k-1}(a_i)]^{-h_{n-k-1}^{n-1}} = g_{n-k}(a_i).$$

Nach Hilfssatz (2) aus § 1 liegt dann $g_{n-k}(a_i)$ in F_n. Andererseits wird

$$g_{n-k} = 1 + (h_0^n - h_0^k)(h_1^n - h_1^{k+1}) \ldots (h_{n-k-1}^n - h_{n-k-1}^{n-1})\,\gamma_n + \gamma'$$

die Entwicklung von g_{n-k} in $\mathfrak{R}$, wobei γ' nur Glieder einer Dimension $> n$ enthält. Es gibt also Elemente aus F_n, deren Glieder n-ter Dimension gleich

$$(h_0^n - h_0^k)(h_1^n - h_1^{k+1}) \ldots (h_{n-k+1}^n - h_{n-k+1}^{n-1})\,\gamma_n$$

sind, und wenn der größte gemeinsame Teiler aller möglichen hierin auftretenden Faktoren von γ_n gleich δ_n gesetzt wird, erhält man Satz III.

Es möge nun eine zweite Darstellung der freien Gruppe F und der Faktorgruppen $F/F^{(n)}$ mit Hilfe von Matrizen gegeben werden. Der Einfachheit halber möge wieder nur der Fall zweier Erzeugenden a und b von F betrachtet werden. α_i $(i = 1, 2, \ldots)$ und β_i $(i = 1, 2, \ldots)$ seien zwei unendliche Reihen von Parametern. Man setze

$$(5) \qquad a = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & \alpha_2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_3 & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & \beta_2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \beta_3 & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots \end{pmatrix},$$

wobei also unter der Hauptdiagonale Nullen, in dieser selbst Einsen, über diesen die α_i bzw. β_i und dann wieder Nullen stehen.

Die in (5) auftretenden unendlichen Matrizen besitzen eindeutige Reziproke; es ist nämlich

$$a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & \alpha_1\alpha_2 & -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 & \dots \\ 0 & 1 & -\alpha_2 & \alpha_2\alpha_3 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_3 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{pmatrix};$$

das Bildungsgesetz der Elemente der Matrix a^{-1} wird unten näher charakterisiert. Es gelten nun die folgenden Sätze:

V. *Die Matrizen* (5) *erzeugen zusammen mit ihren Reziproken bei Multiplikation eine freie Gruppe F von zwei Erzeugenden. F und $\mathfrak{R}$ sind damit durch Matrizen dargestellt.*

VI. *Bezeichnet man als n-ten Abschnitt einer Matrix die aus den ersten n Zeilen und Spalten gebildete n-reihige Matrix, so ist das Produkt zweier n-ten Abschnitte zweier Matrizen aus der Darstellung* (V) *von F gleich dem n-ten Abschnitt des Produktes. Die n-ten Abschnitte bilden also eine Gruppe; diese ist isomorph mit $F/F^{(n)}$.*

Die Beweise für diese Behauptungen lassen sich aus den Sätzen I bis IV entnehmen, wenn gezeigt wird, daß die aus den Matrizen (5) (bzw. deren n-ten Abschnitten) und ihren Reziproken durch Komposition entstehenden Matrizen umkehrbar eindeutig den Entwicklungen (3) der Elemente von F (bzw. den Entwicklungsabschnitten bis zu Gliedern der $(n-1)$-ten Dimension) zugeordnet sind, so daß dem Produkt zweier Matrizen das Produkt der zugehörigen Entwicklungen (3) zugeordnet ist (wobei den Elementen a und b die Matrizen (5) zugeordnet sind).

Hierzu ist zunächst zu bemerken, daß offenbar die aus den Matrizen (5) und ihren Reziproken durch wiederholte Komposition erzeugbaren Matrizen $\mathfrak{M}$ sämtlich durch Angabe ihrer ersten Zeile eindeutig bestimmt sind. Denn die k-te Zeile entsteht aus der ersten, indem man das Element der r-ten Spalte in der ersten Zeile in die $r+k-1$-te Spalte der k-ten Zeile versetzt und die Indizes der Parameter α_i und β_i dabei um $k-1$ vergrößert. Jedem Potenzprodukt aus $a^{\pm 1}$, $b^{\pm 1}$ ist vermöge (5) eindeutig eine Matrix $\mathfrak{M}$ zugeordnet. Es soll nun gezeigt werden, daß die erste Zeile dieser Matrix umkehrbar eindeutig die Entwicklung (3) dieses Potenzproduktes bestimmt.

Es sei

$$c_{\nu_1, \mu_1, \dots, \nu_m, \mu_m} s^{\nu_1} t^{\mu_1} \dots s^{\nu_m} t^{\mu_m} \tag{6}$$

mit ganzzahligen $c_{\nu_1, \mu_1, \dots, \nu_m, \mu_m}$ der allgemeine Summand in (3); seine Dimension sei d. Ihm werde ein Produkt in den Variablen α_i, β_i zu-

geordnet, das vom Grade d ist und den Ausdruck (6) eindeutig beschreibt, nämlich

$$
\text{(6a)}\quad c_{\nu_1,\mu_1,\dots,\nu_m,\mu_m}\,\alpha_1\dots\alpha_{\nu_1}\beta_{\nu_1+1}\dots\beta_{\nu_1+\mu_1}\dots\alpha_{\nu_1+\mu_1+\dots+1}\dots\alpha_{\nu_1+\mu_1+\dots+\nu_m}
\cdot\beta_{\nu_1+\mu_1+\dots+\nu_m+1}\dots\beta_{\nu_1+\mu_1+\dots+\nu_m+\mu_m}.
$$

(6a) ist so gebildet, daß, wenn in dem Produkt $s^{\nu_1}t^{\mu_1}\dots s^{\nu_m}t^{\mu_m}$ als r-ter Faktor s bzw. t steht, in (6a) der Faktor α_r bzw. β_r vorkommt. — Umgekehrt ist (6) bei Angabe von (6a) eindeutig bestimmt.

Es sei nun irgendein Potenzprodukt (2) in $a^{\pm 1}$ und $b^{\pm 1}$ gegeben. Ihm ist vermöge (5) eine Matrix $\mathfrak{M}$ zugeordnet, und vermöge (3) eine Entwicklung als Summe von Ausdrücken der Form (6). Man betrachte die Glieder der d-ten Dimension in (3), bilde die ihnen zugeordneten Produkte der Form (6a) und summiere dieselben. Diese Summe ist dann das Element der ersten Zeile und $(d+1)$-ten Spalte der Matrix $\mathfrak{M}$. Diese Behauptung ist offensichtlich richtig für die speziellen Potenzprodukte $a^{\pm 1}$ und $b^{\pm 1}$. Durch vollständige Induktion nach wachsender „Länge" der Potenzprodukte ist sie leicht allgemein nachzuweisen, und daraus folgen ohne Schwierigkeit die Sätze V und VI.

Es ist ohne weiteres zu sehen, daß in der oben gegebenen Darstellung von F durch Matrizen der Untergruppe $F^{(n)}$ diejenigen Matrizen entsprechen, in denen die „Parallelen zur Hauptdiagonale" bis zur $(n-1)$-ten einschließlich nur Nullen enthalten, oder mit anderen Worten: Eine Matrix $\mathfrak{M}$ ist dann und nur dann einem Element von $F^{(n)}$ zugeordnet, wenn in $\mathfrak{M} = (m_{ik})$ für $0 < k - i < n$ alle $m_{ik} = 0$ sind. Dies setzt in Evidenz, *daß der Durchschnitt aller Gruppen $F^{(n)}$ und mithin auch aller Gruppen F_n das Einheitselement ist.* Dies folgt nicht aus den allgemeinen Sätzen von F. Levi[7]), da F_n zwar für F, aber nicht für F_{n-1} charakteristisch ist (für $n > 2$).

§ 3.

Kriterien für Automorphismen und für Isomorphie von Gruppen.

Aus Satz IV, das heißt aus der „Vollinvarianz" von $F^{(n)}$ in der freien Gruppe F, folgt sofort: Setzt man zwischen den Erzeugenden von F irgendwelche Relationen an, wobei dann F in eine Faktorgruppe G von F und $F^{(n)}$ in eine invariante Untergruppe $G^{(n)}$ von G übergeht (wobei $G^{(n)}$ Faktorgruppe von $F^{(n)}$ ist), so ist $G^{(n)}$ charakteristische Untergruppe von G, d. h. $G^{(n)}$ geht bei allen Automorphismen von G in sich über. Daraus folgt, daß auch $G^{(n)}/G^{(n+1)}$, d. h. die Invarianten dieser Abelschen Gruppe, für G charakteristisch sind. Es ist dabei wesentlich, daß $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ eine Abelsche Gruppe mit endlicher Basis ist, sofern G endlich viele Erzeugende besitzt. $G^{(n)}$ heiße *„n-te Dimensionsgruppe"* von G.

Es ist für das Weitere von Bedeutung, daß nicht nur $F^{(n)}$ selber, sondern auch gewisse $F^{(n+1)}$ enthaltende Untergruppen von $F^{(n)}$ in F vollinvariant sind, so daß diese Untergruppen in analoger Weise wie $F^{(n)}$ zur Herleitung charakteristischer Zahlen für eine beliebige Gruppe G dienen können. Dazu werde eine beliebige Abbildung von F auf eine Untergruppe von F und die Wirkung dieser Abbildung auf $F^n/F^{(n+1)}$ untersucht. Bei der Abbildung mögen a und b (wir beschränken uns wieder auf zwei Erzeugende) in a' und b' übergehen. a' und b' lassen sich in der Form schreiben

$$a' = a^{u_1} b^{v_1} c_1, \qquad b' = a^{u_2} b^{v_2} c_2,$$

wobei $u_1, \ldots, v_2$ ganze Zahlen und c_1 und c_2 Elemente der Kommutatorgruppe $F^{(2)}$ von F sind. Es genügt für das Folgende anzunehmen, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = \pm 1 \tag{7}$$

ist, und ebenso die entsprechende Determinante für den Fall von mehr als zwei Erzeugenden. (Diese Beschränkung ist nicht notwendig, doch lassen sich die dieser Beschränkung entsprechend enger formulierten Sätze einfacher aussprechen.)

Um nun die Wirkung der vorliegenden Abbildung auf $F^{(n)}/F^{(n+1)}$ zu untersuchen, berücksichtige man, daß die Entwicklungen von a' und b' bis zu Gliedern erster Dimension die Form haben:

$$a' = 1 + u_1 s + v_1 t + \ldots, \qquad b' = 1 + u_2 s + v_2 t + \ldots.$$

Ersetzt man in einem Element $f^{(n)}$ von $F^{(n)}$ a und b durch a' und b', so erhält man die Glieder n-ter Dimension des Elementes $f'^{(n)}$, in das $f^{(n)}$ bei der Abbildung übergeht, indem man in den Gliedern n-ter Dimension von $f^{(n)}$ s und t durch $u_1 s + v_1 t$ und $u_2 s + v_2 t$ ersetzt (vgl. Beweis zu Satz IV). Nun sind nach Satz III und IVa die Glieder n-ter Dimension Linearkombinationen der „Differenzen n-ter Ordnung", und es tritt auch jede Differenz n-ter Ordnung wirklich als Glied n-ter Dimension auf (und, eventuell, eine rationales Vielfaches mit durch die Größe von n beschränktem Nenner δ_n (Satz IV), wobei die Koeffizienten der Potenzprodukte in diesem rationalen Vielfachen immer noch ganze Zahlen sein müssen). $f'^{(n)}$ ist folglich ebenfalls eine Linearkombination der Differenzen n-ter Ordnung, und diese erfahren mithin beim Übergang von a, b zu a', b' eine lineare Substitution (welche eben die Abbildung von $F^n/F^{(n+1)}$ auf sich beschreibt). Die Koeffizienten dieser linearen Substitution sind homogene Funktionen n-ten Grades in u_1, v_1; u_2, v_2; die Substitution heiße $S^{(n)}(u, v)$.

Sind r_n, aber nicht $r_n + 1$, unter den Differenzen n-ter Ordnung linear unabhängig, so erfährt das einem System von r_n linear unabhängigen n-ten Differenzen vermöge (6) und (6a) zugeordnete System von Multilinearformen

$$L_\varrho^{(n)}(\alpha_i, \beta_i) \quad [\varrho = 1, 2, \ldots, r_n;\ i = 1, 2, \ldots, n],$$

welche linear und homogen in den n Variablenreihen α_i, β_i und mithin insgesamt vom n-ten Grade sind, unter der Einwirkung von $S^{(n)}(u, v)$ (aufgefaßt als Substitution dieser Formen) eine lineare Transformation, welche man dadurch erhält, daß man die α_i, β_i kogredient der linearen Substitution

$$\alpha_i = u_1 \alpha_i' + v_1 \beta_i',$$
$$\beta_i = u_2 \alpha_i' + v_2 \beta_i'$$

unterwirft. Es ist übrigens leicht auch durch direkte Betrachtung der $L_\varrho^{(n)}$ zu erkennen, daß diese bei kogredienter Transformation der α_i, β_i (sogar mit einer beliebigen unimodularen Substitution) sich linear substituieren müssen, daß also die $L_\varrho^{(n)}$ oder, was auf dasselbe herauskommt, die zu ihnen gehörigen Tensoren n-ter Stufe einen Darstellungsraum für die volle Gruppe der unimodularen Substitutionen (im vorliegenden Falle von zwei Variablen) bilden. Man kann sich leicht überzeugen, daß dieser Darstellungsraum im allgemeinen nicht nur reduzibel ist, sondern auch sogleich in halbreduzierte Form gebracht werden kann, wenn man ausschließlich Linearkombinationen mit ganzzahligen Koeffizienten der $L_\varrho^{(n)}$ bzw. der oben erwähnten rationalen Vielfachen von diesen als erlaubte neue „Basisvektoren" des Darstellungsraumes zuläßt. Denn ist $n = n_1 + n_2$, so liegen die Kommutatoren zweier Elemente aus $F^{(n_1)}$ und $F^{(n_2)}$ in $F^{(n)}$, aber im allgemeinen nicht alle in $F^{(n+1)}$, und die zugeordneten Glieder n-ter Dimension aller solcher Kommutatoren müssen einen invarianten Teilraum des Raumes aller $L_\varrho^{(n)}$ erzeugen. Jedenfalls ist jeder solche invariante Teilraum (und damit auch die Anzahl seiner Dimensionen) für F charakteristisch.

Die oben angestellten Betrachtungen können nun auf die Untersuchung der Automorphismen einer beliebigen Gruppe G angewandt werden. Um einfach auszusprechende Resultate zu erhalten, sollen indessen die folgenden Annahmen gemacht werden: G sei Gruppe von endlich vielen, etwa k, Erzeugenden und die Faktorgruppe nach der Kommutatorgruppe sei die Abelsche Gruppe von k unabhängigen Erzeugenden unendlicher Ordnung. Das Verfahren liefert aber im allgemeinen auch sonst Resultate, ausgenommen, wenn G mit seiner Kommutatorgruppe identisch ist.

F sei die freie Gruppe von k Erzeugenden. G ist Faktorgruppe von F und kann definiert werden, indem man zwischen den Erzeugenden $a_1, a_2, \ldots, a_k$ von F irgendwelche Relationen

$$R_\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots)$$

ansetzt. $R_\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ sind dabei Elemente aus F, die in $F \neq 1$ sein sollen und nach Voraussetzung in $G^{(2)}$ liegen sollen. Jedem Automorphismus von G entspricht eindeutig ein solcher von $G/G^{(2)}$, der mithin durch eine ganzzahlige Matrix (u_{il}) von k Zeilen und Spalten mit einer Determinante ± 1 eindeutig charakterisiert wird. Diese Matrizen bilden bei Multiplikation eine Gruppe, welche „*die G zugeordnete lineare Gruppe*" $\mathfrak{L}_G$ heißen möge. $\mathfrak{L}_F$ ist nach J. Nielsen[11]) die volle Gruppe aller ganzzahligen Substitutionen von k Variablen mit der Determinante ± 1. Es soll nun gezeigt werden, daß $\mathfrak{L}_G$ „im allgemeinen" eine echte Untergruppe von $\mathfrak{L}_F$ sein muß. Dazu betrachte man die kleinste Zahl n derart, daß mindestens ein Element R_σ in $F^{(n)}$, aber nicht in $F^{(n+1)}$ liegt. Eine solche Zahl muß nach dem am Schluß von § 2 Bemerkten existieren, da sonst alle R_σ in F gleich Eins wären. Den „Differenzen n-ter Ordnung" von k assoziativen nicht kommutativen Größen sind dann (wie oben für $k = 2$) eine gewisse Anzahl r_n von Multilinearformen $L_\varrho^{(n)}$, linear und homogen in n Reihen von k Variablen, (oder auch Tensoren n-ter Stufe in k Variablen) zugeordnet, und diese liefern bei kogredienter linearer Transformation der Variablensysteme eine Darstellung von $\mathfrak{L}_F$ und mithin auch von $\mathfrak{L}_G$. Die gemäß (3), § 2 in Reihen entwickelten R_σ besitzen zum Teil von Null verschiedene Glieder n-ter Dimension, und diesen sind vermöge (6) und (6a) von § 2 gewisse Linearkombinationen $\Lambda_\tau(L_\varrho^{(n)})$ der $L_\varrho^{(n)}$ zugeordnet (wobei τ endlich viele Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots$ durchläuft). Nun gilt der Satz:

VII. *Die G zugeordnete lineare Gruppe ist notwendig in der Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{L}_F$ aller ganzzahligen Substitutionen der Determinante ± 1 enthalten, welche aus denjenigen Substitutionen von $\mathfrak{L}_F$ besteht, die bei Darstellung von $\mathfrak{L}_F$ im Raume der Tensoren $L_\varrho^{(n)}$ den von den Linearkombinationen $\Lambda_\tau(L_\varrho^{(n)})$ aufgespannten Teilraum in sich überführen.*

Beweis: Jeder Automorphismus von $G = F/J$ kann aufgefaßt werden als homomorphe Abbildung von F auf einen Teil von sich, wobei Elemente der invarianten Untergruppe J wieder in solche übergehen. Denn jeder Automorphismus von G läßt sich dadurch charakterisieren, daß man Potenzprodukte der a_i angibt, in welche diese bei dem Automorphismus übergehen. Diese Potenzprodukte sind natürlich

[11]) Math. Annalen 79 (1919), S. 269—272.

nicht eindeutig, sondern nur bis auf beliebige Elemente von J bestimmt. Aber da J nach Voraussetzung in $F^{(n)}$ mit $n \geqq 2$ liegt, ist jedenfalls die der Determinante (7) entsprechende k-reihige Determinante $= \pm 1$. Bezeichnet man die kleinste, J und $F^{(n+1)}$ enthaltende Untergruppe von F mit H, so geht bei jeder Abbildung von F auf einen Teil von F, welche zu einem Automorphismus von G gehört, jedes Element von H wieder in ein solches über. Jeder Automorphismus von G definiert folglich eine homomorphe Abbildung von H und somit auch eine solche von $H/F^{(n+1)}$ auf sich. $H/F^{(n+1)}$ ist aber nun gerade der von den Linearformen $\Lambda_r(L_\varrho^{(n)})$ aufgespannte Teilraum von $F^{(n)}/F^{(n+1)}$, d. h. des Raumes der $L_\varrho^{(n)}$. Dieser muß folglich bei einer Substitution der G zugeordneten linearen Gruppe in sich übergehen.

Offenbar sagt Satz VII „im allgemeinen" wirklich aus, daß die G zugeordnete lineare Gruppe nicht die volle Gruppe aller ganzzahligen Substitutionen der Determinante ± 1 ist. Dies läßt sich besonders deutlich für den Fall, daß G nur eine definierende Relation besitzt, etwa so ausdrücken:

VIIa. *Ist G eine Gruppe von k Erzeugenden mit einer definierenden Relation $R(a_1, \ldots, a_k) = 1$, und ist R, als Element der freien von $a_1, \ldots, a_k$ erzeugten Gruppe F betrachtet, in $F^{(n)}$ $(n > 1)$ aber nicht in $F^{(n+1)}$ gelegen, so ist das Folgende notwendige Bedingung dafür, daß die G zugeordnete lineare Gruppe die volle Gruppe $\mathfrak{L}_F$ der ganzzahligen Substitutionen der Determinante ± 1 von k Variablen ist: Bei Darstellung von $\mathfrak{L}_F$ im Raume der Tensoren $L_\varrho^{(n)}$ n-ter Stufe muß der den Gliedern n-ter Dimension in der Entwicklung von R zugeordnete Tensor invariant sein. Nach allgemeinen Sätzen über die Darstellungen der linearen Gruppe ist dies höchstens dann möglich, wenn n ein Vielfaches von k ist; für $k = 2$ bzw. $k = 3$ lassen sich außerdem durch direkte Rechnung noch die Bedingungen $k \neq 4$ bzw. $k \geqq 6$ ableiten.*

Zu beweisen ist hiervon, nachdem VII bewiesen ist, nur noch die Behauptung, daß n ein Vielfaches von k ist. Das folgt daraus, daß der Raum der Tensoren $L_\varrho^{(n)}$ ein Teilraum desjenigen Darstellungsraumes der vollen Gruppe aller unimodularen (nicht notwendig ganzzahligen) Substitutionen ist, den man erhält, wenn man die ursprüngliche Darstellung der vollen linearen Gruppe in k Variablen n mal mit sich selber multipliziert (vermittelst der Kroneckerschen Produkttransformation). In diesem Darstellungsraum treten aber nur dann Fixelemente auf, wenn n ein Vielfaches von k ist. Es ist leicht einzusehen, daß eine Invariante der Gruppe $\mathfrak{L}_F$ der ganzzahligen Substitutionen zugleich eine solche der vollen linearen Gruppe sein muß, und damit ist Satz VIIa bewiesen.

Es ist klar, daß das hier vorgeführte Verfahren auch dazu dienen kann, um notwendige Bedingungen für die Isomorphie zweier Gruppen abzuleiten. Im einfachsten Falle, wenn zwei Gruppen G_1 und G_2 mit nur einer definierenden Relation vorgelegt sind, müssen die linken Seiten der Relationen, als Elemente der zugehörigen freien Gruppen betrachtet, bei Entwicklung gemäß (3), § 2 mit Gliedern der gleichen Dimension n beginnen, und die diesen Gliedern zugeordneten Tensoren n-ter Stufe müssen sich, falls $n > 1$ ist, durch eine Substitution mit ganzzahligen Koeffizienten und der Determinante ± 1 ineinander überführen lassen, bis auf einen Faktor ± 1, da eine Form und ihr Negatives dasselbe System von ganzzahligen Vielfachen besitzen.

§ 4.

Beispiele.

a) Für zwei Erzeugende a, b und $n = 5$ lassen sich als Basis für die 5-ten Differenzen die folgenden Ausdrücke wählen (in denen $\Delta = st - ts$ gesetzt ist):

$$s^3 \Delta - 3 s^2 \Delta s + 3 s \Delta s^2 - \Delta s^3,$$
$$t^3 \Delta - 3 t^2 \Delta s + 3 t \Delta s^2 - \Delta t^3,$$
$$t s^2 \Delta - 2 t s \Delta t + t \Delta s^2 - s^2 \Delta t + 2 s \Delta s t - \Delta s^2 t,$$
$$s t^2 \Delta - 2 s t \Delta t + s \Delta t^2 - t^2 \Delta s + 2 t \Delta t s - \Delta t^2 s,$$
$$s \Delta^2 - 2 \Delta s \Delta + \Delta^2 s = (s \Delta - \Delta s) \Delta - \Delta (s \Delta - \Delta s),$$
$$t \Delta^2 - 2 \Delta t \Delta + \Delta^2 t = (t \Delta - \Delta t) \Delta - \Delta (t \Delta - \Delta t).$$

Die beiden letzten werden unter sich transformiert, (sie entsprechen Kommutatoren von Elementen aus $F^{(3)}$ und $F^{(2)}$), wenn man s und t einer linearen Substitution unterwirft. Das gleiche gilt natürlich in entsprechender Weise für die zugehörigen Formen. Außer Δ tritt erst für $n = 6$ wieder eine Invariante auf, nämlich

$$(x \Delta - \Delta x)(y \Delta - \Delta y) - (y \Delta - \Delta y)(x \Delta - \Delta x).$$

b) Ein Automorphismus der Fundamentalgruppe G einer geschlossenen zweiseitigen Fläche vom Geschlecht p bestimmt im wesentlichen, d. h. abgesehen von inneren Automorphismen, eine Klasse von Abbildungen der Fläche auf sich. Die der Automorphismengruppe zugeordnete lineare Gruppe besitzt gleichfalls eine Bedeutung; sie[12]) ist die Gruppe der

[12]) Genauer: die in ihr enthaltene Untergruppe vom Index 2, bestehend aus den Substitutionen, die zu Automorphismen gehören, deren zugeordnete Abbildungsklassen solche mit Erhaltung der Orientierung der Fläche sind.

Transformationen der Perioden der Abelschen Integrale erster Gattung, welche zu einer Riemannschen Fläche vom Geschlecht p gehören. Es ist nun wohlbekannt, daß die Gruppe nicht die Gruppe aller ganzzahligen Substitutionen in $2p$ Variablen mit der Determinante ± 1 ist, sondern eine Untergruppe derselben, bestehend aus denjenigen Substitutionen, die eine gewisse Bilinearform in sich überführen. Diese Tatsache läßt sich mit Hilfe des oben entwickelten Verfahrens etwa so ableiten: Es sei etwa $p = 2$; a_1, a_2, a_3, a_4 seien die Erzeugenden,

$$a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} a_3 a_4 a_3^{-1} a_4^{-1} = 1$$

sei die definierende Relation von G. Die linke Seite derselben besitzt, aufgefaßt als Element der von a_1, a_2, a_3, a_4 erzeugten freien Gruppe, eine Entwicklung, deren Glieder bis zur zweiten Dimension einschließlich lauten:

$$1 + s_1 s_2 - s_2 s_1 + s_3 s_4 - s_4 s_3 + \ldots,$$

wobei $a_i = 1 + s_i$ gesetzt ist; die zu den Gliedern zweiter Ordnung gehörige Bilinearform ist

$$\alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(2)} - \alpha_2^{(1)} \alpha_1^{(2)} + \alpha_3^{(1)} \alpha_4^{(2)} - \alpha_4^{(1)} \alpha_3^{(2)},$$

wobei den a_i die Parameter $\alpha_i^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ zugeordnet sind, entsprechend dem im zweiten Teil von § 2 beschriebenen Verfahren. Alle Substitutionen der G zugeordneten linearen Gruppe müssen also nach VIIa die Eigenschaft haben, diese Bilinearform in ein Vielfaches von sich überzuführen[13]), wenn man die Substitution gleichzeitig auf $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)}, \alpha_4^{(1)}$ und $\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \alpha_3^{(2)}, \alpha_4^{(2)}$ anwendet. Daß umgekehrt jede solche Substitution wirklich in der G zugeordneten linearen Gruppe auftritt, bedarf eines besonderen Beweises, der in der bekannten Weise zu erbringen ist[14]). — Gewöhnlich wird das eben abgeleitete Resultat mit Hilfe von Schnittzahlen von Kurven auf der Fläche bewiesen.

c) Irgend zwei Gruppen G_1 und G_2 von k Erzeugenden $a_1, a_2, \ldots, a_k$ und mit den einzigen definierenden Relationen

$$T_1 R T_1^{-1} T_2 R T_2^{-1} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \Theta_1 R \Theta_1^{-1} \Theta_2 R \Theta_2^{-1} \Theta_3 R \Theta_3^{-1} = 1$$

können nicht isomorph sein, wenn $T_1, T_2, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, R$ beliebige Ausdrücke in den a_i bedeuten, von denen jedoch R nicht schon als Element

[13]) D. h., da die Transformationsdeterminante ± 1 ist, in sich oder in ihr negatives. Letzteres bedeutet eine Umkehrung der Orientierung der Fläche.

[14]) Siehe etwa H. Burkhardt, Math. Annalen **35** (1890), S. 209 ff. Clebsch-Gordan, Theorie der Abelschen Funktionen, Leipzig 1866, § 85.

der freien, von den a_i erzeugten Gruppe F betrachtet, gleich Eins sein soll.

Beweis. R liege in $F^{(n)}$. Man darf $n > 1$ annehmen, da der Satz sonst trivial ist. Ist $L^{(n)}$ die R zugeordnete Multilinearform, so müssen sich die Formen $2\,L^{(n)}$ und $\pm\,3\,L^{(n)}$ durch eine ganzzahlige Substitution der Determinante $\pm\,1$ ineinander transformieren lassen. d sei der größte gemeinsame Teiler der (ganzzahligen!) Koeffizienten von $L^{(n)}$. Ließe sich $2\,L^{(n)}$ in $\pm\,3\,L^{(n)}$ transformieren, so müßte dies auch modulo $2\,d$ möglich sein. Modulo $2\,d$ ist aber $2\,L^{(n)} \equiv 0$, nicht aber $\pm\,3\,L^{(n)}$.

§ 5.

Über ein Problem von H. Hopf.

H. Hopf hat die Frage aufgeworfen[15]), ob eine Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden mit einer ihrer echten Faktorgruppen isomorph sein kann. Falls diese Frage zu verneinen ist, wäre eine von der in hohem Maße willkürlichen Wahl der Erzeugenden unabhängige Eigenschaft (etwa im Sinne eines abgeschwächten „Teilerkettensatzes") der mit Hilfe von endlich vielen Erzeugenden definierbaren Gruppen gefunden, und diese Eigenschaft würde zugleich eine Rechtfertigung für die bevorzugte Stellung dieser Gruppen liefern.

Daß eine endliche Gruppe oder eine Abelsche Gruppe mit endlicher Basis nicht mit einer ihrer echten Faktorgruppen isomorph sein kann, ist trivial. Merkwürdigerweise enthält das Problem aber schon für freie Gruppen Schwierigkeiten. Eine Lösung für diese ist implizit in einem Satz von F. Levi[7]) enthalten. Das in den Paragraphen 2, 3 entwickelte Verfahren liefert einen ebenfalls sehr einfachen Beweis des Satzes.

VIII. *Eine freie Gruppe von endlich vielen Erzeugenden ist mit keiner ihrer echten Faktorgruppen (einstufig) isomorph.*

Beweis. a_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ seien freie Erzeugende der freien Gruppe F. Eine beliebige Faktorgruppe G von F erhält man durch Hinzufügung endlich oder unendlich vieler Relationen

$$R_\sigma(a_1, \ldots, a_k) = 1 \quad (\sigma = 1, 2, \ldots),$$

wobei die R_σ vom Einheitselement von F verschiedene Elemente bedeuten mögen, da andernfalls G keine echte Faktorgruppe von F zu sein brauchte. Wenn F und G isomorph wären, müßte für jedes n $F^{(n)}/F^{(n+1)} \cong G^{(n)}/G^{(n+1)}$ sein, wobei $G^{(n)}$ wie zu Beginn von § 3 definiert ist. n werde nun so gewählt, daß alle Ausdrücke R_σ zwar in $F^{(n)}$, aber nicht alle in $F^{(n+1)}$ liegen.

[15]) Nach einer Mitteilung von Herrn B. Neumann.

Das muß nach dem am Schluß von § 2 Gesagten möglich sein. Setzt man wie in § 3 $G = F/J$, so ist also der Durchschnitt von $F^{(n)}$ und J nicht ganz in $F^{(n+1)}$ enthalten. Nach der Definition von $G^{(n)}$ ist $G^{(n)}/G^{(n+1)}$, folglich echte Faktorgruppe von $F^{(n)}/F^{(n+1)}$, und da diese eine Abelsche Gruppe mit endlicher Basis ist, ist Satz VIII bewiesen.

§ 6.

Bemerkungen über Gruppen von Primzahlpotenzordnung.

W. Burnside[3]) hat gezeigt: Eine endliche Gruppe G ist dann und nur dann direktes Produkt von Gruppen von Primzahlpotenzordnung, wenn die Reihe der in § 1 definierten Gruppen G_n mit dem Einheitselement abbricht. Infolge der engen Verwandtschaft (wahrscheinlich: der Identität) der Gruppen G_n mit den zu Beginn von § 3 definierten Gruppen $G^{(n)}$ wird man vermuten, daß der Satz gilt:

IX. *Eine endliche Gruppe G ist dann und nur dann direktes Produkt von Gruppen von Primzahlpotenzordnung, wenn die Reihe der Gruppen $G^{(n)}$ mit dem Einheitselement abbricht.*

Nach Satz III ist G_n in $G^{(n)}$ enthalten. Es ist also nur noch zu zeigen, daß für Gruppen von Primzahlpotenzordnung die Reihe der $G^{(n)}$ mit dem Einheitselement schließt. Dazu genügt es zu zeigen, daß G Faktorgruppe einer anderen Gruppe $\overline{G}$ ist, welche diese Eigenschaft besitzt. Nun läßt sich nachweisen[16]), daß G Faktorgruppe einer Gruppe $\overline{G}$ ist, welche eine Darstellung durch endliche Matrizen mit ganzzahligen Koeffizienten gestattet, derart, daß unter der Hauptdiagonale in diesen Matrizen nur Nullen und in der Hauptdiagonale nur Einsen stehen. Man nehme ein System $x_1, x_2, \ldots, x_k$ von endlich vielen Erzeugenden[17]) von $\overline{G}$; die zugeordneten Matrizen von n Reihen seien $1 + X_1, 1 + X_2, \ldots, 1 + X_k$, wobei 1 die Einheitsmatrix bedeutet. Dann wird, falls die X_i n-reihige Matrizen sind,

$$(1 + X_i)^{-1} = 1 - X_i + \ldots + (-1)^{n-1} X_i^{n-1},$$

und jedes Produkt aus n gleichen oder verschiedenen Faktoren X_i wird gleich Null. Damit ist den Erzeugenden x_i, ihren Reziproken und allgemein den Elementen von $\overline{G}$ eine Entwicklung zugeordnet, wie man sie aus der Entwicklung nach Art von (1), (3), § 2 durch Fortlassen der Glieder n-ter und höherer Dimension erhält. Ist F die freie Gruppe von k Erzeugenden, so ist also jedem Element von $F/F^{(n)}$ ein-

---

[16]) Siehe Magnus, „Über n-dimensionale Gittertransformationen", Acta Mathematica **64** (1934), S. 364.

[17]) Daß ein solches stets existiert, ist leicht einzusehen. Siehe l. c. [16]).

deutig (natürlich im allgemeinen nicht umkehrbar eindeutig) ein Element von $\overline{G}$ zugeordnet. $\overline{G}$ ist also Faktorgruppe von $F/F^{(n)}$, und damit auch G. — Es ist anzumerken, daß dabei n im allgemeinen nicht die kleinste Zahl ist, für die $G^{(n)} = 1$ ist, aber das ist unwesentlich.

Es lassen sich nun in sehr einfacher Weise eine Reihe von Sätzen ableiten, die man aus den von P. Hall[4]) für Gruppen von Primzahlpotenzordnung bewiesenen Sätzen erhält, indem man in denselben statt der Gruppen G_n der „lower central series" die Gruppen $G^{(n)}$ einsetzt. Das gilt insbesondere von den Theoremen 2.54, 2.55, 4.1 von Hall. Die Beweise beruhen auf den leicht nachzuweisenden Tatsachen, daß erstens (in der Bezeichnungsweise von § 2) die Dimension des Kommutators zweier Elemente mindestens gleich der Summe der Dimensionen der Elemente ist, und daß zweitens ein Element der Dimension d, wenn man in ihm die Erzeugenden durch Elemente der Dimension d' ersetzt, in ein Element von einer Dimension $\geqq d\,d'$ übergeht.

Zum Schluß möge noch mit Hilfe des in § 2 entwickelten Verfahrens gezeigt werden (vgl. die Einleitung):

X. *Zu jeder ganzen Zahl N gibt es eine Gruppe, deren Ordnung eine Potenz von 3 ist, deren N-te Ableitung nicht das Einheitselement ist, und für die die Faktorgruppe der Kommutatorgruppe die Abelsche Gruppe vom Typ* (3, 3, 3) *ist.*

Dabei ist unter der ersten Ableitung einer Gruppe wie üblich ihre Kommutatorgruppe, und unter der k-ten Ableitung allgemein die Kommutatorgruppe der $(k-1)$-ten zu verstehen. Es soll nun eine Gruppe der in X genannten Art folgendermaßen konstruiert werden. Man gehe aus von der freien Gruppe F von drei Erzeugenden a, b, c. Diesen ordne man wie zu Beginn von § 2 Elemente $1+r$, $1+s$, $1+t$ aus einem von $1, r, s, t$ erzeugten assoziativen Ringe $\mathfrak{R}$ zu. Sodann nehme man die Elemente von $\mathfrak{R}$ modulo dem kleinsten zweiseitigen Ideal $\mathfrak{J}$, das alle Produkte aus r, s, t von höherer als der 2^N-ten Dimension, die Zahl 3 und die Elemente r^3, s^3, t^3 enthält. Der Restklassenring $\mathfrak{R}^*$ nach diesem Ideal enthält ersichtlich nur endlich viele Elemente. Jedem Element von F ist eindeutig ein Element $\neq 0$ von $\mathfrak{R}^*$ zugeordnet, und die verschiedenen unter diesen bilden bei Multiplikation mithin eine endliche Faktorgruppe G von F. Es soll gezeigt werden, daß G die Forderungen von Satz X erfüllt. Zunächst ist die Ordnung von G eine Potenz von 3. Denn spätestens die $3^{(2^N+1)}$-te Potenz von einem beliebigen Element aus $\mathfrak{R}$, das die Form „$1+$ Glieder höherer Dimension" besitzt, ist in $\mathfrak{J}$ enthalten. Fernerhin ist den dritten Potenzen von a, b, c (aber keiner niedrigeren Potenz) das Einheitselement von $\mathfrak{R}^*$ zugeordnet, so daß der Index der Kommutatorgruppe höchstens 27 sein kann. Nimmt man

zu $\mathfrak{J}$ alle Elemente von $\mathfrak{R}$ von höherer als der ersten Dimension hinzu, so wird in dem zugehörigen Restklassenring von $\mathfrak{R}$ jedem Element von G ein Element der Form $1+\alpha r+\beta s+\gamma t$ mit $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2$ zugeordnet, so daß G also eine Abelsche Faktorgruppe vom Typ (3, 3, 3) besitzt. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß die N-te Ableitung $D^N(G)$ nicht nur aus dem Einheitselement besteht. Das wird gezeigt, indem direkt Elemente von G konstruiert werden, die in $D^N(G)$ liegen müssen und ungleich 1 sind. Dazu führe man die folgenden Bezeichnungen ein:

$$aba^{-1}b^{-1} = c_1,\quad aca^{-1}c^{-1} = b_1,\quad bcb^{-1}c^{-1} = a_1,$$

und allgemein

$$a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = c_{i+1},\quad a_i c_i a_i^{-1} c_i^{-1} = b_{i+1},\quad b_i c_i b_i^{-1} c_i^{-1} = a_{i+1}$$

für $i = 1, 2, \ldots$.

Es ist klar, daß a_N, b_N, c_N in $D^N(G)$ liegen. Weiterhin ist klar, daß den a_i, b_i, c_i Entwicklungen in $\mathfrak{R}^*$ zugeordnet sind, die mit Gliedern der Dimension 2^i beginnen, und zwar gilt rekursiv: Beginnt (abgesehen vom Einheitselement) die Entwicklung von a_i, b_i, c_i mit den Gliedern r_i, s_i, t_i der 2^i-ten Dimension, so beginnen die Entwicklungen von a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1} mit den Gliedern

$$r_{i+1} = s_i t_i - t_i s_i,\quad s_{i+1} = r_i t_i - t_i r_i,\quad t_{i+1} = r_i s_i - s_i r_i.$$

Es ist nun zu beweisen, daß für $i \leqq N$ sämtliche r_i, s_i, t_i von Null verschiedene Elemente von $\mathfrak{R}^*$ sind. Dazu genügt es zu zeigen, daß die r_i, s_i, t_i Summen von verschiedenen Potenzprodukten von r, s, t sind, derart, daß in keinem Potenzprodukt ein Faktor r^3, s^3 oder t^3 enthalten ist, und keiner der Koeffizienten der Potenzprodukte durch drei teilbar ist.

Zunächst ist klar, daß irgendein aus den sechs Ausdrücken st, ts, rt, tr, rs, sr gebildetes Potenzprodukt niemals einen Faktor r^3, s^3 oder t^3 enthalten kann. Weiterhin ist klar: Sind $P_1, P_2, \ldots, P_h$ irgend h verschiedene[18]) Potenzprodukte aus r, s, t von derselben Dimension, so sind auch die $(h-1)\,h$ Potenzprodukte $P_i P_k$ mit $i \neq k$ voneinander verschieden[18]). Denn aus $P_i P_k = P_l P_m$ folgt $P_i = P_l$ und $P_k = P_m$. Daraus folgt erstens, daß in den r_i, s_i, t_i keine Potenzprodukte auftreten, die einen Faktor r^3, s^3, t^3 enthalten, da die in r_i, s_i, t_i auftretenden Potenzprodukte zugleich solche in $st, ts, \ldots$ sind. Weiterhin folgt: r_i, s_i, t_i sind Summen von je $2^{(2^i-1)}$ Potenzprodukten der Dimension 2^i in r, s, t, wobei als Koeffizienten dieser Potenzprodukte nur die Zahlen ± 1 auftreten und die in r_i (bzw. s_i oder t_i) auftretenden Potenzprodukte

[18]) Gemeint ist: formal verschiedene, das heißt solche, die in $\mathfrak{R}$ voneinander verschieden sind.

sowohl untereinander als auch von den in s_i und t_i (bzw. r_i und t_i oder r_i und s_i) auftretenden Potenzprodukten verschieden sind. Denn für $i = 1$ ist diese Behauptung richtig; ist sie für irgendein $i \geqq 1$ bewiesen, und ist also

$$r_i = \sum_{k=1}^{2(2^i-1)} \pm R_k, \quad s_i = \sum_{k=1}^{2(2^i-1)} \pm S_k, \quad t_i = \sum_{k=1}^{2(2^i-1)} \pm T_k,$$

wobei R_k, S_k, T_k verschiedene Potenzprodukte der 2^i-ten Dimension sind, so wird zum Beispiel

$$r_{i+1} = \sum_{k,\, l=1}^{2(2^i-1)} \pm (S_k T_l - T_l S_k),$$

und hieraus erhellt die Gültigkeit des Satzes auch für $i+1$. Damit ist nachgewiesen, daß für $i \leqq N$ die r_i, s_i, t_i in $\mathfrak{R}^*$ nicht gleich Null sind, und folglich enthält die N-te Ableitung von G Elemente, die vom Einheitselement verschieden sind.

(Eingegangen am 23. 10. 1934.)

Ein neues Kriterium der Einfachheit einer endlichen Gruppe.

Von

W. K. Turkin in Moskau.

In vorliegender Arbeit beweist der Verfasser das folgende

Theorem I: *Sei* B *eine Gruppe der Ordnung* n *und sei* Γ *eine Untergruppe der Ordnung* g. *Sei* $n = gm$ *(*g *und* m *seien teilerfremd). Sei* P *die Kommutatorgruppe von* Γ. *Ist in* Γ, *aber nicht in* P *ein Element* A *enthalten, für welches aus jeder Gleichung vom Typus*

$$T^{-1} A^{\lambda} T = G$$

(T *ist ein Element von* B, *und* G *ein Element von* Γ*) eine Gleichung vom Typus*

$$X^{-1} A^{\lambda} X = G$$

(X *ist ein Element von* Γ*) folgt, so hat* B *einen Normalteiler, dessen Ordnung durch* m *teilbar ist.*

Sei

$$\Gamma = \mathsf{P} + \mathsf{P}\,U_2 + \mathsf{P}\,U_3 + \ldots + \mathsf{P}\,U_k$$

($g = kr$; r ist die Ordnung von P). Bezeichnen wir das System $\mathsf{P}\,U_i$ mit S_i. Die Systeme S_i bilden eine abelsche Gruppe Ψ $\left(\text{die Faktorgruppe } \frac{\Gamma}{\mathsf{P}}\right)$.

Bezeichnen wir weiter mit $\overline{\Psi}$ eine Gruppe, die mit Ψ eineindeutig isomorph ist; das Element von $\overline{\Psi}$, welches bei diesem Isomorphismus dem Element S_i von Ψ entspricht, bezeichnen wir mit $\overline{S}_i$.

Wir betrachten im folgenden formale Produkte $\overline{S}_i\,\mathsf{P}\,B$, wo $\overline{S}_i$ ein Element von $\overline{\Psi}$ und B ein Element von B ist. Zwei solche Produkte sollen nur dann einander gleich genannt werden, wenn in ihnen derselbe Faktor $\overline{S}_i$, multipliziert mit demselben System von Elementen von B, vorkommt. Aus diesen Produkten bilden wir formale Summen, deren Glieder lauter verschiedene Faktoren $\overline{S}_i$ enthalten. Zwei solche Summen sollen gleich heißen, wenn ihre Glieder bis auf die Reihenfolge übereinstimmen. Die Summen werden mit einem Element A aus B multipliziert, indem ihre einzelnen Glieder von rechts mit A multipliziert werden.

Ein solcher formaler Ausdruck ist:

$$\Omega = \bar{S}_1^{-1} \mathsf{P} S_1 + \bar{S}_2^{-1} \mathsf{P} S_2 + \ldots + \bar{S}_k^{-1} \mathsf{P} S_k.$$

Sei C ein beliebiges Element von Γ. Augenscheinlich ist:

$$C = R\, U_i$$

(R ist ein Element von P). Dann haben wir:

$$\Omega C = \sum_{j=1}^{k} \bar{S}_j^{-1} \mathsf{P} S_j R\, U_i = \sum_{j=1}^{k} \bar{S}_j^{-1} \mathsf{P}\, \mathsf{P}\, U_j R\, U_i$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \bar{S}_j^{-1} \mathsf{P} S_j S_i = \bar{S}_i \sum_{j=1}^{k} \bar{S}_i^{-1} \bar{S}_j^{-1} \mathsf{P} S_j S_i.$$

So bekommen wir:

$$\Omega R\, U_i = \bar{S}_i \Omega.$$

Ist C in P enthalten, so ist

$$\Omega C = \Omega.$$

Sei

$$\mathsf{B} = \Gamma + \Gamma B_2 + \Gamma B_3 + \ldots + \Gamma B_m.$$

Jeder der Ausdrücke

$$\Omega, \Omega B_2, \Omega B_3, \ldots, \Omega B_m$$

geht bei der Multiplikation (von rechts) mit einem beliebigen Element der Gruppe B in sich selbst oder in einen anderen über (mit einem Faktor von links, der einem Element von $\bar{\Psi}$ gleich ist). Auf solche Weise bekommen wir eine Darstellung der Gruppe B durch eine Gruppe monomialer Matrizen, d. h. Matrizen, bei welchen in jeder Horizontal- und jeder Vertikalreihe nur ein Element von 0 verschieden ist. Die von 0 verschiedenen Elemente dieser Matrizen sind Elemente von $\bar{\Psi}$. Unter der Determinante einer solchen monomialen Matrix verstehen wir das Produkt aller von Null verschiedenen Matrixelemente. Da die Gruppe $\bar{\Psi}$ abelsch ist, muß die Determinante des Produktes zweier Matrizen gleich dem Produkte ihrer Determinanten sein. Ist die Determinante der Matrix, die einem Element von B entspricht, nicht gleich 1, so hat die Gruppe B einen Normalteiler, der aus allen Elementen besteht, denen Matrizen mit Determinanten, die gleich 1 sind, entsprechen. Dieser Normalteiler wird alle Elemente von B enthalten, deren Ordnung zu g teilerfremd ist.

Wir wollen jetzt das Theorem I beweisen. Sei A ein Element mit den vorhin erwähnten Eigenschaften. Sei

$$\Omega B', \Omega B'', \ldots, \Omega B^{(u)}$$

eine Reihe von Ausdrücken ΩB_i, die bei der Multiplikation (von rechts) mit A zyklisch ineinander übergehen (mit einem Faktor von links, der einem Element von $\overline{\Psi}$ gleich ist). Augenscheinlich ist

$$B' A = C' B''$$

(C' ist ein Element von Γ). Deshalb bekommen wir:

$$B' A B''^{-1} = C' = R' U_{i_1}$$

(R' ist ein Element von P). Ähnlicherweise:

$$B'' A B'''^{-1} = R'' U_{i_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$B^{(\mu)} A B'^{-1} = R^{(\mu)} U_{i_\mu}.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen bekommen wir:

$$B' A^\mu B'^{-1} = \bar{R}\, U_{i_1} U_{i_2} \ldots U_{i_\mu}$$

($\bar{R}$ ist ein Element von P). Nach den Voraussetzungen des Theorems I bekommen wir:

$$X^{-1} A^\mu X = \bar{R}\, U_{i_1} U_{i_2} \ldots U_{i_\mu}$$

(X ist ein Element von Γ). Dann haben wir:

$$\mathsf{P} A^\mu = \mathsf{P}\, U_{i_1} U_{i_2} \ldots U_{i_\mu}.$$

Schreiben wir solche Gleichungen für alle analogen (ein- oder mehrgliedrigen) Reihen der Ausdrücke ΩB_i. Durch Multiplikation dieser Gleichungen bekommen wir:

$$\mathsf{P} A^{\mu+\nu+\cdots+\pi} = \mathsf{P}\, U_{i_1} U_{i_2} \ldots U_{i_\mu} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} \ldots U_{k_1} \ldots U_{k_\pi}.$$

Augenscheinlich ist

$$\mu + \nu + \ldots + \pi = m;$$

deshalb ist $A^{\mu+\nu+\cdots+\pi}$ nicht in P enthalten (g und m sind teilerfremd). Wir finden so, daß auch das Element

$$U_{i_1} U_{i_2} \ldots U_{i_\mu} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} \ldots U_{k_1} \ldots U_{k_\pi}$$

nicht in P enthalten ist. Deshalb ist aber die Determinante der Matrix, die dem Element A entspricht, von 1 verschieden, da diese Determinante gleich

$$\bar{S}_{i_1} \bar{S}_{i_2} \ldots \bar{S}_{i_\mu} \bar{S}_{j_1} \ldots \bar{S}_{j_\nu} \ldots \bar{S}_{k_1} \ldots \bar{S}_{k_\pi}$$

ist. So ist das Theorem I bewiesen.

Aus Theorem I folgt das

Theorem II: *Sei* B *eine Gruppe der Ordnung* $p^a m$ *(*p *ist eine Primzahl;* m *ist nicht durch* p *teilbar). Die Sylowsche Untergruppe* Γ *der Ordnung* p^a *von* B *sei abelsch. Gibt es in* Γ *ein Element, das auch im*

Zentrum des Normalisators von Γ enthalten ist, so hat B *einen Normalteiler, dessen Ordnung durch m teilbar ist.*

Sei A ein Element von den hier erwähnten Eigenschaften. A ist im Zentrum des Normalisators von Γ enthalten; deshalb ist A mit keinem Element von Γ außer sich selbst konjugiert (zwei invariante Elemente von Γ, die in B konjugiert sind, sind auch in dem Normalisator von Γ konjugiert). So ist das Theorem II bewiesen.

Als einen Sonderfall des Theorems II bekommen wir das bekannte Theorem von Burnside[1]):

Ist die Sylowsche Untergruppe der Ordnung p^α einer Gruppe der Ordnung $p^\alpha m$ im Zentrum ihres Normalisators enthalten, so hat diese Gruppe einen Normalteiler von der Ordnung m.

---

[1]) „Theory of groups of finite order", 2nd ed., Cambridge (1911), p. 327.

(Eingegangen am 5. 1. 1935.)

Über die Einführung der idealen Elemente in die ebene Geometrie mit Hilfe des Satzes vom vollständigen Vierseit.

Von

L. J. Smid in Warffum (Niederlande).

---

1. Das folgende soll eine Ergänzung zu einer Arbeit von Frl. R. Moufang[1]) darstellen. Es wurde dort bewiesen, daß nach der Ergänzung der Ebene mit idealen Elementen in der angegebenen Weise die sogenannten „idealen Verknüpfungssätze" gelten, aber nicht, *daß auch der Satz vom vollständigen Vierseit dann allgemein gilt.* Dieser Satz ist aber doch von Interesse, z. B. wenn man nach der Einführung der idealen Elemente „Koordinaten" einführen will[2]). Im folgenden geben wir den Beweis des Satzes. In 2—4 beweisen wir dazu den folgenden

Hilfssatz: *Wenn in der vollständigen Ebene* (§ 3, 1) *eine beliebige endliche Anzahl Punkte gegeben sind, so gibt es immer eine Kollineation, welche diese Punkte alle in Punkte mit Index* 4 *transformiert.*

Daraus folgt ja unmittelbar, daß jeder Schnittpunktsatz, der gilt, wenn alle Punkte den Index 4 haben, auch allgemein gilt; das ist dann mit dem Satz vom vollständigen Vierseit der Fall.

2. Zuerst bemerken wir, daß die „kollineare Spiegelung" in § 2, 1 zwar nur definiert ist für den Fall, daß P_a zwischen O und P liegt, daß man aber die Transformation erweitern kann, indem man diese Beschränkung aufhebt, und nur voraussetzt, daß P_a und P' real sind. Auch dann werden Punkte einer Geraden in Punkte einer Geraden transformiert[3]).

Es seien nun OB und $OA'A$ zwei verschiedene reale Strecken (A und A' auf derselben Seite der Geraden OB) (Fig. 1). Es sei P ein Punkt

---

[1]) R. Moufang, „Die Einführung der idealen Elemente in die ebene Geometrie mit Hilfe des Satzes vom vollständigen Vierseit", Math. Annalen **105** (1931), S. 759—778. Die Paragraphennummern beziehen sich auf diese Arbeit.

[2]) Für die Einführung einer „Streckenrechnung" in der vollständigen Ebene auf Grund des Satzes vom vollständigen Vierseit vgl. R. Moufang, Math. Annalen **106** (1932), S. 755—795. Die „Koordinaten" bilden dann einen Alternativkörper.

[3]) Im folgenden brauchen wir nur den Fall, wo P und P_a auf derselben Seite von O liegen.

im Inneren des Dreiecks OAB, P_1 der Schnittpunkt von AP und OB, P' der Schnittpunkt von $A'P_1$ und OP, so nennen wir die Transformation, welche P in P' transformiert, eine *Schiebung* $(O, OB, A \to A')$. Es seien so P', Q', R' die transformierten von P, Q, R. Man kann eine Gerade a, welche die Strecken $OA'A$ und OB schneidet, so wählen, daß durch die kollineare Spiegelung mit Zentrum O und Achse a die Punkte $A, P, Q, R, P_1, Q_1, R_1$ in reale Punkte $A^\times, P^\times, Q^\times, R^\times, P_1^\times, Q_1^\times, R_1^\times$ transformiert werden (man wähle z. B. a so, daß O auf der einen Seite, A, P_1, Q_1, R_1 auf der anderen Seite liegen). Es sei S der Schnittpunkt von a und OB, T der Punkt, für den $\{OTA^\times A'\}$ ein harmonisches Quadrupel ist, so wird durch die Spiegelung mit Zentrum O und Achse ST, $A^\times$ in A', $P_1^\times$ in P_1, also $A^\times P_1^\times$ in $A'P_1$, also $P^\times$ in P' transformiert, ebenso $Q^\times$ in Q', $R^\times$ in R'. Die Punkte P, Q, R werden also durch zwei kollineare Spiegelungen in P', Q', R' transformiert. Wenn P, Q, R auf einer

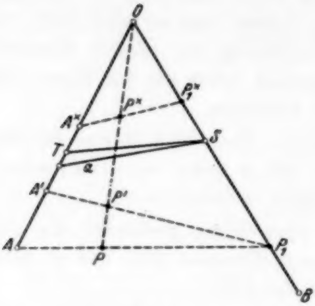


Fig. 1.

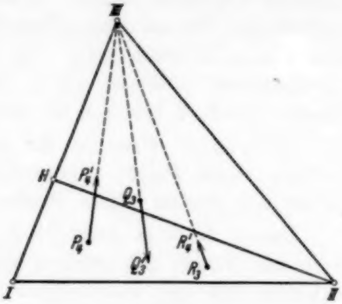


Fig. 2.

Geraden liegen, so liegen also auch P', Q', R' auf einer Geraden, und umgekehrt. Die Transformation ist also eine Kollineation[4]). Sie läßt sich in einfacher Weise so erweitern, daß sie auch für den Rand des Dreiecks OAB gilt.

3. Wir wenden uns jetzt der Geometrie von § 3 zu, und erhalten die folgende Definition einer „*allgemeinen Schiebung*" mit Zentrum III und Achse III II:

Es sei H ein Punkt auf der Strecke III I (Fig. 2).

Ein Punkt mit Index 4 oder 2 wird durch die Schiebung $T =$ (III, III II, I $\to H$) transformiert und behält denselben Index.

Ein Punkt mit Index 3 oder 1 im Dreieck III II H wird durch die inverse Schiebung T^{-1} transformiert und behält denselben Index.

---

[4]) In dieser Weise könnte man den „kleinen Desarguesschen Satz" beweisen.

Ein Punkt mit Index 3 oder 1 im Dreieck I II H wird durch die kollineare Spiegelung S mit Zentrum III, welche die Geraden I II und H II verwechselt, transformiert und erhält bzw. den Index 4 oder 2.

Für die Punkte der Grenzen der Gebiete macht es offenbar keinen Unterschied, mit welchem Gebiet man sie transformiert.

Jetzt beweisen wir, daß diese „allgemeine Schiebung" eine Kollineation ist, d. h. daß ein zu I II III reziprokes Dreieck ABC (das auch in ein Zweieck ausarten kann) mit einer „gestatteten" Numerierung (§ 3, 1b) wieder in ein ebensolches Dreieck (oder Zweieck) transformiert wird, und umgekehrt.

Für die besonderen Fälle, daß die gegebene Gerade durch ein Zweieck mit einer Ecke in III, II oder I dargestellt wird, und für den Fall, daß g_1 und g_3 in H zusammenstoßen, ist der Beweis ganz einfach. In

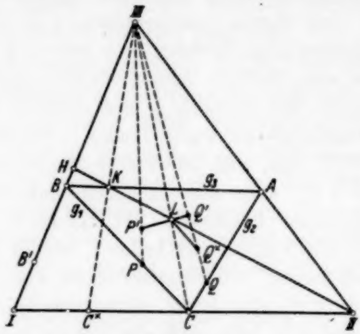


Fig. 3.

jedem anderen Fall schneidet H II entweder g_1 oder g_3 in einem Punkt K, welcher in einen Punkt $C^\times$ von I II transformiert wird. A wird in sich selber transformiert, B in einen Punkt B' von I III, C in einen Punkt L von H II. Die Gerade g wird von A, B, C, K in vier Strecken geteilt, welche offenbar transformiert werden in vier Strecken, welche in A, B', $L, C^\times$ zusammenstoßen. Wir beweisen nun, daß die transformierten Strecken, welche in B zusammenstoßen, zusammen eine Strecke bilden.

In C stoßen entweder g_1 und g_2 (wie in Fig. 3), oder g_3 und g_4 zusammen. Es sei P ein Punkt von g_1 (bzw. g_3) und Q ein Punkt von g_2 (bzw. g_4), beide im inneren des Dreiecks I II H. PC wird dann durch die Spiegelung S in eine Strecke $P'L$ transformiert, CQ wird durch T in LQ' transformiert. Die Transformation T für CQ läßt sich (vgl. oben unter 2.) zusammensetzen aus der Spiegelung S und der Spiegelung $\mathfrak{S}$ mit Zentrum III und Achse H II. Die erstere transformiert CQ in $LQ^\times$.

Weil ABC zu I II III reziprok ist, bilden die Geradenpaare C III, I II und CP, CQ ein harmonisches Quadrupel. Daraus beweist man leicht, daß sie durch S wieder in ein harmonisches Quadrupel transformiert werden, das von LIII, HII und LP', $LQ^{\times}$ gebildet wird. Durch die Spiegelung $\mathfrak{S}$ wird $LQ^{\times}$ also in die Verlängerung von $P'L$ transformiert. LQ' ist also die Verlängerung von $P'L$. Die transformierte Figur der vier Strecken bildet also das Dreieck $AB'C^{\times}$.

Aus der harmonischen Lage von CIII, I II und CA, CB haben wir bewiesen, daß die Strecken bei L derselben Geraden angehören. In derselben Weise kann man aus der Tatsache, daß die Strecken bei K derselben Geraden angehören, umgekehrt beweisen, daß $C^{\times}$III, I II, und $C^{\times}A$, $C^{\times}B'$ harmonische Lage haben, und daraus folgt, daß $AB'C^{\times}$ zu I II III reziprok ist[5])[6]), und daher eine Gerade darstellt, denn man verifiziert unmittelbar, daß die Numerierung auch eine „gestattete" ist. Eine Gerade wird also in eine Gerade transformiert, und umgekehrt ist jede Gerade die transformierte einer Geraden (was man z. B. indirekt beweist).

4. Es sei nun eine endliche Anzahl Punkte gegeben. Durch eine „allgemeine Schiebung" mit Zentrum I und Achse I III kann man erreichen, daß kein transformierter Punkt (außer vielleicht ein Punkt in III) auf der Geraden III II liegt, und durch eine zweite Schiebung, mit Zentrum I, aber Achse I II, kann man erreichen, daß auch kein Punkt in III liegt. Eine allgemeine Schiebung (III, III II, I $\rightarrow H$), wobei H so auf I III liegt, daß alle Punkte mit Index 1 oder 3 im Dreieck I II H (oder auf dem Rand) liegen, transformiert dann alle Punkte in Punkte mit Index 2 oder 4, und eine letzte allgemeine Schiebung (II, III II, I $\rightarrow J$), wobei J so auf I II liegt, daß alle Punkte mit Index 2 im Dreieck I III J liegen, transformiert alle Punkte dann in Punkte mit Index 4.

Damit ist der in 1. genannte Hilfssatz bewiesen.

---

5) Man könnte den letzten Teil des Beweises auch so geben, daß man beweist, daß B'II, I III und $B'A$, $B'C^{\times}$ harmonische Lage haben.

6) Die Beweise der benutzten Sätze: Wenn ABC zu I II III reziprok ist, so haben C III, I II und CA, CB harmonische Lage, und umgekehrt, sind in § 3, 2 β) enthalten.

(Eingegangen am 5. 1. 1935.)

Bemerkung zur Inhaltstheorie.

Von

Felix Behrend in Cambridge (England).

Sei $\mathfrak{M}$ eine beschränkte Punktmenge der Ebene. Unter $\mathfrak{M}_\varepsilon$ verstehe man die Menge aller Punkte, die von $\mathfrak{M}$ um weniger als ε entfernt sind. Es gilt der

Satz I. *Die Menge $\mathfrak{M}_\varepsilon$ hat einen bestimmten (Jordanschen) Inhalt*[1]).

Im folgenden will ich für diesen Satz einen einfachen Beweis geben[2]). Der Beweis läßt sich ganz ebenso auch für Punktmengen im m-dimensionalen Raum $\mathfrak{R}_m$ führen. Mit der gleichen Methode kann man das folgende etwas allgemeinere Resultat gewinnen:

Satz II. *Jede beschränkte Menge des $\mathfrak{R}_m$, die sich als Vereinigungsmenge von konvexen Mengen $\mathfrak{K}$ darstellen läßt, deren jede eine m-dimensionale Kugel mit dem festen Radius ε enthält, hat einen bestimmten Inhalt*[3]).

Als Spezialfall enthält dieser Satz den Fall eines einzigen konvexen Bereichs (mit inneren Punkten) im $\mathfrak{R}_m$, so daß für die Existenz des Inhalts eines konvexen Bereichs ein einfacher Beweis mitgeliefert wird, der — wie sich zeigen wird — von nichts anderem als der Definition der Konvexität Gebrauch macht, insbesondere Begriffe wie „Distanz-

[1]) Zur Theorie des Jordanschen Inhaltsbegriffes vgl. z. B. Erhard Schmidt, Darstellung der Lehre vom Inhalt in der Integralrechnung, Math. Zeitschr. 12 (1922), S. 298—316. Die Menge $\mathfrak{M}_\varepsilon$ spielt eine wichtige Rolle bei der bekannten Minkowskischen Definition der Bogenlänge und der Oberfläche krummer Flächenstücke [„Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen", Jahresber. D. M. V. 9 (1901), S. 115—121; Ges. Abh. II, S. 122—130]; Minkowski läßt aber dahingestellt, ob für jedes $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{M}_\varepsilon$ einen bestimmten Inhalt besitzt. Die an Minkowski anschließenden Arbeiten [W. Gross, Die Minimaleigenschaft der Kugel, Wiener Monatsh. 28 (1917), S. 77—97, Über das lineare Maß von Punktmengen, und Über das Flächenmaß von Punktmengen, ebenda 29 (1918), S. 177—193 bzw. S. 145—176; J. Favard, La longueur et l'aire d'après Minkowski, Bulletin de la société mathématique de France 61 (1933), S. 63—84; Estermann, Über Carathéodorys und Minkowskis Verallgemeinerungen des Längenbegriffs, Abh. Math. Sem. Hamburg 4 (1926), S. 73—116] vermeiden diese Frage, indem sie sofort das Lebesguesche Maß verwenden. Auch Erhard Schmidt benutzt a. a. O. die Menge $\mathfrak{M}_\varepsilon$, ohne davon Gebrauch zu machen, daß sie einen bestimmten Inhalt besitzt.

[2]) Herr Carathéodory teilte mir mit, daß er einen — bisher unveröffentlichten — komplizierteren Beweis für die weitergehende Tatsache besitzt, daß der Rand von $\mathfrak{M}_\varepsilon$ ein endliches lineares Maß besitzt.

[3]) Auch solche Mengen werden bei Minkowski a. a. O. betrachtet.

funktion", „Stützebene" oder „approximierende Polyeder" nicht verwendet[4]).

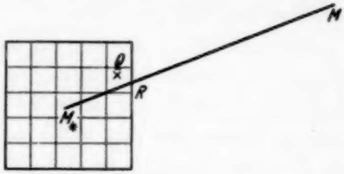
Zum Beweis von I überdecke man $\mathfrak{M}_\varepsilon$ mit einem Quadratnetz. Die Seitenlänge der Quadrate sei a, es werde von vornherein $a < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ gewählt. Ist n die Anzahl der Quadrate, welche nur Punkte von $\mathfrak{M}_\varepsilon$ enthalten, N die Anzahl der Quadrate, welche mindestens einen Punkt von $\mathfrak{M}_\varepsilon$ enthalten, so ist

$$n a^2 \leqq \underline{I}(\mathfrak{M}_\varepsilon) \leqq \bar{I}(\mathfrak{M}_\varepsilon) \leqq N a^2,$$

wo $\underline{I}$, $\bar{I}$ den inneren und äußeren (Jordanschen) Inhalt bedeuten. Setzt man $N - n = r$ (r ist die Anzahl der „Randquadrate"), so ist

$$\bar{I}(\mathfrak{M}_\varepsilon) - \underline{I}(\mathfrak{M}_\varepsilon) \leqq r a^2.$$

Man verfeinere jetzt das Quadratnetz, indem man jedes Quadrat in 25 Teilquadrate der Seitenlänge $a/5$ einteilt. Man betrachte eines der ursprünglichen Randquadrate $\mathfrak{Q}$. Ich behaupte: Nicht jedes seiner 25 Teilquadrate



kann Randquadrat sein. Entweder das mittlere Quadrat ist kein Randquadrat. Oder aber es enthält einen Punkt M_* von $\mathfrak{M}_\varepsilon$. Es gibt dann einen Punkt M von $\mathfrak{M}$, dessen Entfernung von M_*: $\overline{MM_*} < \varepsilon$ ist, und der außerhalb von $\mathfrak{Q}$ liegt (weil andernfalls wegen $\varepsilon > a\sqrt{2}$ ganz $\mathfrak{Q}$ im Kreis mit ε um M läge, also zu $\mathfrak{M}_\varepsilon$ gehörte, also kein Randquadrat wäre). MM_* schneidet den Rand von $\mathfrak{Q}$ in R. Das kleine Quadrat $\mathfrak{q}$, zu dem R gehört (eventuell gibt es zwei solche $\mathfrak{q}$), liegt dann ganz in $\mathfrak{M}_\varepsilon$, ist also kein Randquadrat. Denn ist Q ein Punkt von $\mathfrak{q}$, so ist

$$\overline{RQ} \leqq \frac{\sqrt{2}}{5} a, \tag{1}$$

$$\overline{RM_*} \geqq \frac{2}{5} a, \tag{2}$$

$$\overline{MR} < \varepsilon - \frac{2}{5} a, \tag{3}$$

$$\overline{MQ} < \varepsilon - \frac{2}{5} a + \frac{\sqrt{2}}{5} a < \varepsilon. \tag{4}$$

[4]) Zu anderen Beweisen für die Existenz des Inhalts eines konvexen Bereichs vgl. z. B. Minkowski, Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs, Ges. Abh. II, S. 131—229, § 7; Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, § 17, III; Bonnesen-Fenchel, Konvexe Körper, Ergebn. d. Math. 3, Heft 1, S. 37–38.

Die Anzahl der Randquadrate der verfeinerten Einteilung ist also höchstens $24\,r$; also wird

$$\bar{I}(\mathfrak{M}_s) - \underline{I}(\mathfrak{M}_s) \leqq \frac{24}{25}\, a^2 r.$$

Indem man die Unterteilungen wiederholt, erhält man

$$\bar{I}(\mathfrak{M}_s) - \underline{I}(\mathfrak{M}_s) \leqq \left(\frac{24}{25}\right)^k a^2 r \tag{5}$$

für jedes positive ganze k, also

$$\bar{I}(\mathfrak{M}_s) - \underline{I}(\mathfrak{M}_s) = 0, \tag{6}$$

womit I bewiesen ist.

Im $\mathfrak{R}_m$ verfahre man entsprechend; man teile nur jeden m-dimensionalen Würfel des überdeckenden Netzes in u^m Teile ein, wo etwa u die erste ungerade Zahl $> 2\sqrt{m} + 1$ ist. An die Stelle der Ungleichungen (1), (2), (3), (4), (5) treten dann

$$\overline{RQ} \leqq \sqrt{m}\, \frac{a}{u}, \tag{1'}$$

$$\overline{RM_*} \geqq \frac{u-1}{2}\, \frac{a}{u}, \tag{2'}$$

$$\overline{MR} < \varepsilon - \frac{u-1}{2}\, \frac{a}{u}, \tag{3'}$$

$$\overline{MQ} < \varepsilon - \frac{a}{u}\left(\frac{u-1}{2} - \sqrt{m}\right) < \varepsilon, \tag{4'}$$

$$\bar{I}(\mathfrak{M}_s) - \underline{I}(\mathfrak{M}_s) \leqq \left(\frac{u^m - 1}{u^m}\right)^k r\, a^m \tag{5'}$$

für alle k, woraus wieder (6) folgt.

Der Beweis von II erfordert nur eine kleine Abänderung der letzten Schlußweise. Man überdecke die Menge wie eben mit einem Netz m-dimensionaler Würfel; die Seitenlänge a sei kleiner als $\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$. Man betrachte einen Randwürfel $\mathfrak{Q}$. Man teile ihn in u^m Teilwürfel, wo etwa wieder u ungerade gewählt werde. Ich behaupte wieder: Mindestens einer der u^m Teilwürfel ist nicht Randwürfel, wenn nur u größer gewählt wird als eine gleich anzugebende feste Schranke. Entweder nämlich der Würfel in der Mitte ist kein Randwürfel. Oder aber es gibt in ihm einen Punkt M_* der Menge. Da M_* einer der konvexen Mengen $\mathfrak{K}$ angehört, gibt es M in $\mathfrak{K}$ derart, daß der Kreis mit ε um M der Menge $\mathfrak{K}$ angehört. M liegt wie früher außerhalb $\mathfrak{Q}$. Wegen der Konvexität von $\mathfrak{K}$ gehört daher um den (wie früher definierten) Punkt R ein Kreis mit dem Radius $\frac{\overline{RM_*}}{\overline{MM_*}} \cdot \varepsilon$ zu $\mathfrak{K}$. Nun ist $\overline{MM_*}$ beschränkt $< C$, ferner

$$\overline{RM_*} \geqq \frac{u-1}{2}\, \frac{a}{u},$$

also

$$\varepsilon \frac{\overline{R M_*}}{\overline{M M_*}} \geqq \frac{u-1}{2} \frac{a}{u} \frac{\varepsilon}{C}.$$

Wählt man daher

$$\frac{u-1}{2} > \frac{C}{\varepsilon} \sqrt{m},$$

so wird

$$\varepsilon \frac{\overline{R M_*}}{\overline{M M_*}} > \frac{a}{u} \sqrt{m},$$

d. h. der kleine Würfel q, in dem R liegt, gehört ganz zu $\mathfrak{R}$, ist also nicht Randwürfel. Hieraus folgt (5') und (6), so daß II bewiesen ist.

(Eingegangen am 15. 11. 1934.)

Die eindeutige Bestimmung der Modulfunktionen q-ter Stufe durch algebraische Eigenschaften.

Von

E. Hecke in Hamburg.

Die elliptischen Modulfunktionen der Stufe N (N eine natürliche Zahl) bilden bei passender Einschränkung der Singularitäten einen algebraischen Funktionenkörper einer Variablen. Er hat das Geschlecht

$$p(N) = 1 + \frac{\mu(N-6)}{12N},$$

wo $\mu = \mu(N)$ der Index der Gruppe $\Gamma(N)$ innerhalb der vollen Modulgruppe $\Gamma(1)$ ist. $\Gamma(N)$ besteht aus den Modulsubstitutionen, welche mod N der Identität kongruent sind. Das algebraische Gebilde ist durch die transzendente Eigenschaft, daß es sich durch diese speziellen analytischen Funktionen uniformisieren läßt, völlig bestimmt. Von seinen algebraischen Besonderheiten ist die wichtigste bisher bekannte die Existenz einer Gruppe von Transformationen in sich. Diese Gruppe ist isomorph mit der Faktorgruppe $\Gamma(1)|\Gamma(N)$ oder auch der binären Modulargruppe mod N, welche mit $\mathfrak{M}(N)$ bezeichnet sei. Sie hat die Ordnung $\mu(N)$ und für eine Primzahl $N = q$ ist

$$\mu(q) = \frac{q(q^2-1)}{2}. \tag{1}$$

Für eine genauere Diskussion des algebraischen Gebildes ist nun die Tatsache wichtig, daß diese algebraische Eigenschaft gleichzeitig eine charakteristische Eigenschaft ist. Ich beweise hier nämlich den folgenden Satz:

Unter allen algebraischen Gebilden, welche eine mit $\mathfrak{M}(q)$ isomorphe Gruppe von eindeutigen Transformationen in sich besitzen, gibt es nur ein einziges, welches das Geschlecht

$$p(q) = 1 + \frac{\mu(q)(q-6)}{12q} \tag{2}$$

besitzt.

Gebilde mit der Abbildungsgruppe $\mathfrak{M}(q)$ von kleinerem Geschlecht sind nur in endlicher Anzahl vorhanden.

Zum Beweise wird zunächst eine Normaldarstellung der fraglichen Gebilde beschrieben, wie sie schon von Hurwitz[1]) in seinen klassischen Arbeiten zu diesem Thema benutzt wurde. Die gruppentheoretischen

---

[1]) Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich (Math. Annalen 41 (1893) = Werke, Bd. I, S. 391).

Überlegungen, welche zum Endlichkeitssatz führen, finden sich ähnlich zu anderem Zwecke ebenfalls bei Hurwitz; der Eindeutigkeitssatz beruht auf einer speziellen Eigenschaft der $\mathfrak{M}(q)$.

Es sei also $q \geqq 7$ eine Primzahl. Ein algebraischer Funktionenkörper $\mathfrak{F}$ vom Geschlecht $p > 0$ habe eine mit $\mathfrak{M}(q)$ isomorphe Gruppe von analytischen Abbildungen auf sich; die einzelnen Abbildungen seien etwa $A_1, A_2, \ldots, A_\mu$ und $\varphi \mid A_i$ bezeichne die Funktion, in welche die Funktion φ des Körpers durch A_i übergeht.

Um das Gebilde $\mathfrak{F}$ in einer brauchbaren Normalgestalt zu erhalten, betrachte man mit Hurwitz[1]) den Unterkörper $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{F}$, der aus allen bei $\mathfrak{M}(q)$ invarianten Funktionen besteht. $\mathfrak{U}$ ist ein algebraischer Körper von einem Geschlecht $p_0 \geqq 0$, und da für jedes φ aus $\mathfrak{F}$

$$\sum_{i=1}^{\mu} \varphi \mid A_i, \quad \sum_{i=1}^{\mu} \varphi^2 \mid A_i, \ldots$$

stets zu $\mathfrak{U}$ gehören, so genügt jede Funktion φ aus $\mathfrak{F}$ einer algebraischen Gleichung des Grades μ, deren Koeffizienten zu $\mathfrak{U}$ gehören. Jede richtige Gleichung zwischen Elementen aus $\mathfrak{F}$ bleibt bei A_i richtig, also kann die erzeugende Funktion von $\mathfrak{F}$ relativ zu $\mathfrak{U}$ keiner Gleichung niedrigeren Grades als μ genügen, weil die erwähnte Gleichung ja μ verschiedene Wurzeln haben muß.

Es wird also die Riemannsche Fläche von $\mathfrak{F}$ durch eine μ-fache Überdeckung der Fläche $\mathfrak{U}$ erzeugt, die Verzweigungspunkte sind gewisse Punkte P_h in einer Anzahl w auf $\mathfrak{U}$. Da alle relativ konjugierten Funktionen $\varphi \mid A_i$ in denselben Punkten und auf dieselbe Art verzweigt sind, so gibt es zu jedem P_h eine natürliche Zahl $k_h \geqq 2$, so daß je k_h Blätter von $\mathfrak{F}$ über $\mathfrak{U}$ in P_h im Zyklus zusammenhängen und P_h sich in $\frac{\mu}{k_h}$ Verzweigungspunkte auf $\mathfrak{F}$ spaltet. Das Geschlecht p von $\mathfrak{F}$ berechnet sich aus

$$2p - 2 = \mu\,(2p_0 - 2) + \sum_{h=1}^{w} \frac{\mu}{k_h}(k_h - 1).$$

Dies ergibt sich am leichtesten aus der Tatsache, daß die Anzahl der Nullstellen eines Differentials 1. Gattung von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{F}$ gleich dem Ausdruck rechts ist. Aus dieser diophantischen Gleichung

$$(3) \qquad \frac{2p-2}{\mu} = 2p_0 - 2 + w - \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} - \ldots - \frac{1}{k_w}$$

zwischen p, p_0, k_h folgt nun, weil p offenbar bei $\mathfrak{M}(q)$ nicht 1 sein kann, daß

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\text{für } p_0 \geqq 2\text{:} && w \geqq 0 \text{ und } && p - 1 \geqq \mu, \\ &\text{für } p_0 = 1\text{:} && w \geqq 1 && p - 1 \geqq \frac{\mu}{4}, \\ &\text{für } p_0 = 0 \text{ und } w \geqq 4\text{:} && && p - 1 \geqq \frac{\mu}{12}. \end{aligned}$$

Im Gegensatz dazu ist bei den elliptischen Modulfunktionen von $\Gamma(q)$

$$p(q) - 1 = \frac{\mu}{12}\left(1 - \frac{6}{q}\right) < \frac{\mu}{12}.$$

Das Geschlecht p ist in den Fällen (4) sicher größer als $p(q)$.

Kleinere Werte von p sind also nur noch möglich in dem Falle

$$p_0 = 0, \quad w \leqq 3,$$

und da $w = 2$ durch $p \neq 0$ ausgeschlossen ist, ist also die einzige Möglichkeit

$$p_0 = 0, \quad w = 3,$$

und die Gleichung (3) für p lautet

$$\frac{2p - 2}{\mu} = 1 - \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_3}, \tag{5}$$

wo die k ganze Zahlen mit

$$2 \leqq k_1 \leqq k_2 \leqq k_3$$

sind, die überdies noch Teiler von μ sein müssen. Hieraus folgt, daß bei festem q nur endlich viele Möglichkeiten für das „Verzweigungsschema" (k_1, k_2, k_3) existieren.

Im Falle $p = p(q)$ besteht noch die Gleichung

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{q} \tag{6}$$

und diese hat für $q \geqq 7$ als einzige Lösung das Tripel $(2, 3, q)$.

Es können nämlich nicht alle drei Zahlen $k_i \geqq 4$ sein, weil die rechte Seite in (6) $> \frac{5}{6} > \frac{3}{4}$ ist, also ist mindestens ein $k_i = 2$ oder 3. Ist das kleinste $k_1 = 3$, so ist für die beiden anderen

$$\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q},$$

und weil mindestens eines der k_2, k_3 gerade sein muß, sind daher beide $\geqq 3$, aber mindestens eines $\geqq 4$, und nicht beide $\geqq 4$; jedoch 3, 4 ist keine Lösung. Es muß also in (6) eine Zahl, etwa k_1, $= 2$ sein, was auf

$$\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{q}$$

führt. Hier muß eine, etwa k_3, ein Multiplum von q sein, woraus $k_2 \leqq 3$ folgt. $k_2 = 2$ hat aber

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{q} - \frac{1}{k_3} < \frac{1}{q}, \quad q < 6$$

zur Folge, also muß $k_2 = 3$ und $k_3 = q$ sein.

Jedes algebraische Gebilde mit der Abbildungsgruppe $\mathfrak{M}(q)$, dessen Geschlecht $p \leqq p(q)$ ist, läßt sich also erzeugen durch eine algebraische Gleichung

$$G(\varphi, z) = 0,$$

die in φ den Grad $\mu(q)$ hat; dabei ist φ in der z-Ebene nur in drei festen Punkten a, b, c verzweigt, und zwar nach dem Schema (k_1, k_2, k_3).

Für $p = p(q)$ gibt es nur das Verzweigungsschema $(2, 3, q)$. Die Funktion z endlich bleibt bei allen Abbildungen aus der Gruppe invariant. Durch eine lineare Transformation von z seien schließlich die drei Verzweigungspunkte a, b, c in $0, 1, \infty$ verlegt.

§ 2.

Wir untersuchen jetzt, in welchen Eigenschaften der Gleichung $G = 0$ die Struktur der Abbildungsgruppe $\mathfrak{M}(q)$ sich spiegelt. Es ist bekannt, daß die Galoissche Gruppe der Gleichung $G = 0$ in bezug auf den Körper der rationalen Funktionen von z mit dieser Abbildungsgruppe isomorph sein muß. Die Funktionen $\varphi | A_i$ sind nämlich ebenfalls rational auf dem Gebilde und eindeutig, also durch φ, z rational ausdrückbar

$$\varphi | A_i = R_i(\varphi, z) \qquad i = 1, \ldots, \mu,$$

und wenn

$$A_i A_l = A_n,$$

so ist

$$\varphi | A_i A_l = R_i(\varphi, z) | A_l = R_i(\varphi | A_l, z),$$

$$R_n(\varphi, z) = R_i(R_l(\varphi, z), z).$$

Die Transformationen

$$\varphi' = R_i(\varphi, z)$$

bilden also bei funktionaler Zusammensetzung eine mit $\mathfrak{M}(q)$ isomorphe Gruppe. Andererseits kann man diese R_i mit der Zusammensetzung von Wegen in der z-Ebene in Verbindung bringen. Die Funktionen $R_i(\varphi, z)$ sind nämlich, da sie verschieden sind, die sämtlichen μ Lösungen von $G = 0$. Setzen wir φ in der z-Ebene längs eines geschlossenen Weges fort, so geht φ in eine ganz bestimmte der Funktionen $R_i(\varphi, z)$ über, umgekehrt gibt es auch, weil die Fläche zusammenhängend ist, stets Wege, bei denen man von φ zu einem gegebenen R_i gelangt.

Alle mit Richtungssinn versehenen Wege, welche von einem festen Punkte M ($\neq 0, 1, \infty$) ausgehend in M enden, verknüpfe man nun so, daß als Weg $W_1 \cdot W_2$ der Weg bezeichnet wird, welcher durch Anfügen von W_2 an W_1 erhalten wird. Entspricht dann W_1 der Operation R_i, W_2 der R_l, so ist $W_1 \cdot W_2$ zugeordnet der Operation $R_i R_l$.

Eine einfache Umkreisung je eines der Punkte $0, 1, \infty$ heiße bzw. W_0, W_1, W_∞, die zugeordneten Operationen mögen etwa R_1, R_2, R_3 sein. Da man jeden Weg im Sinne der obigen Zusammensetzung aus W_0, W_1, W_∞ aufbauen kann, erhält man durch Zusammensetzung der R_1, R_2, R_3 eben-

falls jedes R_i, d. h. die mit $\mathfrak{M}(q)$ isomorphe Gruppe der R_i hat als Erzeugende R_1, R_2, R_3. Zwischen ihnen bestehen folgende Relationen:

$$R_1^{k_1} = 1, \quad R_2^{k_2} = 1, \quad R_3^{k_3} = 1,$$

weil nach Konstruktion in 0, 1, ∞ je k_1, k_2, k_3 Zweige der φ im Zyklus zusammenhängen. Eine einfache Umkreisung aller drei Punkte, dargestellt durch $W_0 \cdot W_1 \cdot W_\infty$, ist aber gleichwertig einer Umkreisung eines passend gewählten regulären Punktes, ändert also φ gar nicht, also ist

$$R_1 R_2 R_3 = 1. \tag{7}$$

Für die Exponenten k_i ergibt sich daraus noch die weitere Einschränkung, daß nur $k_i = q$ oder einem Teiler von $\frac{q-1}{2}$ oder $\frac{q+1}{2}$ gleich sein kann, da Elemente anderer Ordnung in $\mathfrak{M}(q)$ nicht vorkommen.

Es seien jetzt zwei algebraische Gebilde mit der Abbildungsgruppe $\mathfrak{M}(q)$ gegeben, vom selben Geschlecht $p \leqq p(q)$, definiert durch zwei Gleichungen von der oben beschriebenen Normalform

$$G(\varphi, z) = 0 \quad \text{und} \quad H(w, z') = 0.$$

Sie mögen das gleiche Verzweigungssystem haben, und wir wollen feststellen, ob sie birational ineinander transformierbar sind. Wir versuchen es mit $z' = z$, haben damit in w, φ zwei vieldeutige Funktionen von demselben z, die in der Umgebung jeder Stelle der z-Ebene beide gleichartig verzweigt sind. Es ist zu sehen, wann man daraus auf die Übereinstimmung der Verzweigung auch im Großen schließen kann.

Zu den Polynomen G, H gibt es die μ rationalen Operationen

$$\varphi' = R_i(\varphi, z) \ (i = 1, \ldots, \mu) \quad \text{für } G,$$
$$w' = S_i(w, z) \ (i = 1, \ldots, \mu) \quad \text{für } H$$

in einer zunächst willkürlichen Numerierung, jedoch so, daß den Wegen W_0, W_1, W_∞ die drei mit gleichem Index versehenen

$$R_1, R_2, R_3 \quad \text{und} \quad S_1, S_2, S_3$$

entsprechen. Ferner ist wieder

$$\begin{aligned} R_1 R_2 R_3 &= 1, & S_1 S_2 S_3 &= 1, \\ R_i^{k_i} &= 1, & S_i^{k_i} &= 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Die Gruppe der R_i ist isomorph mit der Gruppe der S_i. Es braucht aber trotzdem ein Potenzprodukt der S_i nicht 1 zu sein, wenn das analog gebildete Produkt der R_i 1 ist.

Nur im Falle des Schemas $(2, 3, q)$ läßt sich auf Grund eines am Ende bewiesenen *Hilfssatzes* schließen: Wenn die R und S eine mit $\mathfrak{M}(q)$ isomorphe Gruppe bilden und je drei Elemente R, S mit den Eigenschaften (8) ausgewählt werden, die die ganze Gruppe erzeugen, dann gibt es eine isomorphe Abbildung der R auf die S, wobei R_1, R_2, R_3 und S_1, S_2, S_3 ein-

ander entsprechen. Man kann dann also die Numerierung der S_i für $i > 3$ so abändern, daß bei der geänderten Bezeichnung

$$(9) \qquad R_i R_l = R_n \quad \text{und} \quad S_i S_l = S_n$$

nur gleichzeitig richtig sind.

Damit aber ist die Identität der beiden algebraischen Gebilde gesichert. Denn man bilde eine symmetrische Verbindung, etwa

$$\sum_{i=1}^{\mu} R_i(\varphi, z) \cdot S_i(w, z) = g(z)$$

in der geänderten Indexbezeichnung. Bei Fortsetzung längs W_0 geht φ in $R_1(\varphi, z)$ und w in $S_1(w, z)$ über, also

$$g(z) \mid W_0 = \sum_{i=1}^{\mu} R_i R_1(\varphi, z) \cdot S_i S_1(w, z).$$

Wegen (9) folgt aber aus $R_i R_1 = R_n$ auch $S_i S_1 = S_n$ und daher bleibt $g(z)$ bei W_0 unverändert, ebenso bei W_1, W_∞. D. h. sie ist eine rationale Funktion von z, da sie in der Umgebung jeder z-Stelle eindeutig und ohne wesentliche Singularität ist. Daraus folgt in der bekannten Weise, daß φ rational durch w, z und w durch φ, z ausdrückbar ist, die beiden Gleichungen $G = 0$ und $H = 0$ sind also durch birationale Transformation in einander überzuführen, und der in der Einleitung ausgesprochene Satz ist damit bewiesen.

Für $p < p(q)$ ergibt die obige Schlußweise, daß es höchstens so viele Gebilde dieser Art mit demselben Verzweigungsschema geben kann, als es Möglichkeiten gibt, die drei Elemente R aus $\mathfrak{M}(q)$ mit den Bedingungen (8) zu wählen, also nur endlich viele. Eine rohe Abschätzung liefert dafür eine Schranke von der Gestalt

$$c\, q^3$$

mit einem numerischen c. Jedenfalls ist gezeigt:

Es gibt nur endlich viele algebraische Gebilde mit der Abbildungsgruppe $\mathfrak{M}(q)$, deren Geschlecht $\leqq p(q)$ ist, und nur eines darunter, dessen Geschlecht $= p(q)$.

In dem niedersten Falle $q = 7$ gibt es nach (5) nur das Schema (2, 3, 7). Das zugehörige Geschlecht ist $p = 3$. Bedenken wir weiter, daß jeder Automorphismus eines algebraischen Gebildes für das Periodensystem der Normalintegrale 1. Gattung eine komplexe Multiplikation (auch prinzipale Transformation genannt) der 1. Ordnung zur Folge hat und umgekehrt, so folgt:

Wenn eine (symmetrische) Periodenmatrix von p^2 Elementen in der Normalform eine Gruppe von komplexen Multiplikationen 1. Ordnung gestattet, die mit $\mathfrak{M}(q)$ isomorph ist, so sind diese Perioden, von endlich vielen Ausnahmen abgesehen, nicht Integralperioden 1. Gattung für ein algebraisches Gebilde, sofern $p \leqq p(q)$.

Für $p = 3$ liefern die Integralperioden noch die allgemeinsten Periodensysteme: Hier ist also das Periodensystem der $\Gamma(7)$ durch die Existenz dieser $\mathfrak{M}(7)$, der bekannten Gruppe der Ordnung 168, völlig festgelegt und läßt sich daraus berechnen. Das Resultat ist auf verschiedenen Wegen ganz anders schon lange hergeleitet.

Für $p > 3$ nehme man aber z. B. bei $p = p(11) = 26$ ein System normierter Perioden $\tau_{ik} = \lambda\,\delta_{ik}$ $(i, k = 1, \ldots, p)$ mit beliebigem positiv imaginärem λ. Dieses läßt als komplexe Multiplikation jede beliebige Vertauschung der p Indizes zu, also jedenfalls eine Gruppe von $p!$ Elementen, die wegen $p > 12$ auch eine mit $\mathfrak{M}(11)$ isomorphe Permutationsgruppe in 12 Ziffern enthält; nach dem obigen folgt für $N = 26$: Die N-fache Thetareihe mit dem Exponenten $\lambda \sum\limits_{i=1}^{N} n_i^2$ ist keine Riemannsche Thetareihe, außer für höchstens einen Wert von λ.

Zum Schluß beweise ich den erwähnten

Hilfssatz: Wenn in der Modulargruppe $\mathfrak{M}(q)$ zweimal drei Elemente A_2, A_3, A_q und B_2, B_3, B_q bzw. von den Ordnungen $2, 3, q$ die Eigenschaft haben, daß

$$A_2 A_3 A_q = B_2 B_3 B_q = 1$$

und sowohl die A wie die B die ganze Gruppe $\mathfrak{M}(q)$ erzeugen, dann gibt es einen Automorphismus von $\mathfrak{M}(q)$, bei dem die Elemente A_i den B_i für $i = 2, 3, q$ entsprechen.

Wir denken uns die Elemente von $\mathfrak{M}(q)$ repräsentiert durch die ganzzahligen binären Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bmod q, \quad ad - bc \equiv 1 \pmod q,$$

die nach der Regel der Multiplikation von Matrizen zusammengesetzt werden, wobei aber zwei Matrizen bereits dann als gleich gelten, wenn ihre Elemente sich nur um den gemeinsamen Faktor ± 1 unterscheiden. Wir rechnen dabei im Restklassenkörper mod q.

Den Beweis führen wir durch Konstruktion des gewünschten Automorphismus in folgenden Schritten: Zunächst verteilen sich nach bekannten Eigenschaften der $\mathfrak{M}(q)$ die Elemente q-ter Ordnung in zwei Klassen konjugierter Elemente, repräsentiert durch die Matrizen mod q:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wo l ein quadratischer Nichtrest mod q. Die nicht zu $\mathfrak{M}(q)$ gehörige Matrix

$$S = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

transformiert ein beliebiges Element X aus $\mathfrak{M}(q)$ in

$$S^{-1}XS = Y,$$

das wieder zu $\mathfrak{M}(q)$ gehört; bei dem durch

$$X \to Y$$

definierten Automorphismus geht U' in U über. In jedem Falle gibt es also einen Automorphismus, welcher B_q in U überführt. Es sei also bereits $B_q = U$.

Hier muß nun in

$$B_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$c \neq 0$ sein. Denn B_2 hat dann und nur dann die Ordnung 2, wenn $a + d = 0$ ist. Für $c = 0$ ist also

$$B_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a^2 = -1.$$

Dann erzeugt aber B_2 mit U zusammen nur eine Gruppe der Ordnung $2q$, weil

$$U^n B_2 = \begin{pmatrix} a & b - an \\ 0 & -a \end{pmatrix},$$

$$B_2 U^n = \begin{pmatrix} a & an + b \\ 0 & -a \end{pmatrix}.$$

Soll also aus B_2, U, wie vorausgesetzt, die ganze Modulargruppe erzeugt werden, so ist $c \neq 0$. Durch einen (inneren) Automorphismus, der U fest läßt, führen wir nun B_2 über in

$$U^{-n} B_2 U^n = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix},$$

worin

$$a' = a - nc$$

durch passende Wahl von n zu 0 gemacht ist. Wegen $a' + d' = 0$ ist dann auch $d' = 0$, und wir haben damit durch einen Automorphismus von den ursprüglichen Elementen B_2, B_3, B_q

$$B_q \text{ in } U, \quad B_2 \text{ in } \begin{pmatrix} 0 & -c^{-1} \\ c & 0 \end{pmatrix} = C$$

übergeführt.

Damit nun, wie vorausgesetzt,

$$B_3^{-1} = B_q B_2$$

die Ordnung drei hat, muß

$$UC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c^{-1} \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -c^{-1} \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

die Spur ± 1 haben, d. h. $c = \pm 1$ sein, also

$$C = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sein.

Damit sind durch einen Automorphismus B_2, B_q in die beiden numerisch bestimmten Elemente C, U übergeführt und der Hilfssatz ist bewiesen.

Hamburg, Februar 1935.

Zusatz bei der Korrektur. Es liegt jetzt nahe, zu versuchen, die Perioden der Integrale erster Gattung von $\Gamma(q)$ aus den komplexen Multiplikationen 1. Ordnung zu berechnen, welche den Automorphismen $\mathfrak{M}(q)$ entsprechen. Indes macht sich hier der Unterschied zwischen Riemannschen und Jacobischen Thetafunktionen entscheidend bemerkbar. Es zeigt sich nämlich, daß es bei gegebenem $p = p(q)$ unendlich viele Periodensysteme τ_{ik} gibt, welche ein mit $\mathfrak{M}(q)$ isomorphes System von komplexen Multiplikationen erster Ordnung besitzen. Sie bilden ein System, welches von s stetig veränderlichen Parametern abhängt. Zur Bestimmung von s muß man die Struktur der Integralgruppe von $\Gamma(q)$ kennen, jener linearen Substitutionsgruppe, welche durch die Abbildungen unter den Differentialen erster Gattung induziert wird. Wird diese Integralgruppe in ihre irreduziblen Bestandteile zerlegt und treten dabei diese bzw. in den Multiplizitäten r_ϱ ($\varrho = 1, 2, \ldots$) auf, so ergibt sich

$$s = \tfrac{1}{2} \sum_{\varrho} r_\varrho (r_\varrho + 1), \quad \text{wenn } q \equiv 1 \pmod 4.$$

Ist dagegen $q \equiv 3 \pmod 4$, so tritt zu dieser Summe noch ein Term additiv hinzu, der die Klassenzahl des Körpers $K(\sqrt{-q})$ enthält.

Unter diesen von s Parametern abhängigen Perioden τ_{ik} gibt es nach dem oben bewiesenen Satze nur ein einziges System, welches einem algebraischen Gebilde als System von Integralperioden erster Gattung zugeordnet ist, eben dem Gebilde $\Gamma(q)$. Zur Bestimmung dieses einen braucht man also noch weitere Eigenschaften der τ_{ik}, und da bieten sich zunächst die mehrdeutigen Abbildungen des Gebildes auf sich dar, welche unter dem Namen Modularkorrespondenzen von Hurwitz schon früher untersucht wurden.

(Eingegangen am 23. 2. 1935).

Zur komplexen Multiplikation.

Von

Heinz Söhngen in Hamburg *).

Man kann die komplexe Multiplikation nach zwei Richtungen hin betreiben. Einmal versucht man jeden Klassenkörper K über einem imaginärquadratischen Körper k in einen Körper einzubetten, den man aus k durch Adjunktion von Werten gewinnt, die von gewissen Modulfunktionen für singuläre Moduln angenommen werden. Diese Fragestellung hat Kronecker aufgeworfen. Er vermutete, daß die sogenannte j-Funktion zur Konstruktion ausreicht. Weber hat diese und andere Modulfunktionen für singuläre Moduln untersucht. Eine ausführliche Darstellung findet man in Weber „Lehrbuch der Algebra", III., 2. Aufl., 1908. Die Herren Fueter[1]) und Takagi[2]) erkannten, daß man mit der j-Funktion nur einen Teil der fraglichen Abelschen Körper erhält. Die vollständige Lösung dieses Problems ist Herrn Hasse[3]) gelungen. Es zeigt sich, daß man mit der von Weber eingeführten τ-Funktion und der j-Funktion zum Ziele kommt. Die n-ten τ-Teilwerte $\tau\left(\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{n}; a_1, a_2\right)$ liegen für ein Ideal $\mathfrak{a} = (a_1, a_2)$ von k in dem zur Strahlklasse $\alpha \equiv 1 \pmod{n}$ gehörigen Klassenkörper, und dieser Klassenkörper wird auch von einem gewissen, allerdings nicht beliebigen, Teilwert $\tau\left(\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{n}; a_1, a_2\right)$ zusammen mit $j(\mathfrak{a})$ erzeugt. In der vorliegenden Arbeit untersuche ich die τ-Funktion für singuläre Moduln und zeige, daß für einen Modul $\mathfrak{a} = [a_1, a_2]$ der Ordnung $\mathfrak{o}$ die Werte $\tau\left(\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{n}; a_1, a_2\right)$ in einem Klassenkörper $K_{n\mathfrak{o}}$ über k liegen und diesen Körper mit $j(\mathfrak{a})$ zusammen auch erzeugen.

Die zweite Richtung fragt nach den Werten, die eine Modulfunktion $f(w_1, w_2)$ n-ter Stufe für singuläre Moduln annimmt. Auch mit dieser Frage beschäftige ich mich. Allerdings werden nur ganze Modulfunktionen in Betracht gezogen, die zur Hauptkongruenzstufe gehören. Weiter wird vorausgesetzt, um überhaupt eine algebraische Untersuchung möglich zu machen, daß die Modulfunktion in allen Spitzen q-Entwicklungen mit Koeffizienten aus $R(\zeta_n)$ besitzt. Diese Einschränkung scheint mir nicht

*) Diese Arbeit ist von der math.-naturw. Fakultät der Universität Hamburg als Dissertation angenommen worden.

[1]) Crelle Journ. 130; Math. Annalen 75.

[2]) Journ. of the College of Sience, Imp. Univ. of Tokyo 46.

[3]) Crelle Journ. 157.

wesentlich zu sein, da sich voraussichtlich alle ganzen Modulfunktionen aus derartigen Funktionen linear kombinieren lassen, so daß es also nur noch auf die Koeffizienten der Linearkombination ankommt. Diese kann man aber nach dem q-Entwicklungsprinzip bestimmen. Ich zeige, daß eine beliebige ganze Modulfunktion n-ter Stufe, die den oben genannten Bedingungen genügt, für singuläre Moduln der Ordnung $\mathfrak{o}$ nur Werte aus dem Körper $K_{n\mathfrak{o}}$ annimmt. Daraus wird sich dann ergeben, daß für eine oder endlich viele derartige Funktionen fester Stufe der Kroneckersche Jugendtraum nicht möglich ist.

Die j-Funktion hat Weber untersucht. Ich benutze hier allerdings eine Fassung, wie sie Herr Artin in seiner Vorlesung über komplexe Multiplikation gegeben hat und stelle daher die Ergebnisse in § 1 noch einmal kurz zusammen. Die Arbeit von Herrn Hasse setze ich als bekannt voraus.

Die Anregung zu dieser Arbeit erhielt ich von Herrn Artin, dem ich auch für weitere wertvolle Vorschläge dankbar bin.

I. Untersuchung der τ-Funktion für singuläre Moduln.

§ 1.

Es sollen zunächst kurz die Ergebnisse der Modultheorie imaginärquadratischer Körper zusammengestellt werden.

Einen Modul, der von den Elementen a_1, a_2 aufgespannt wird, bezeichnen wir mit $[a_1, a_2]$.

1. Ein Modul $\mathfrak{m}$ des imaginärquadratischen Körpers k mit der Diskriminante d läßt sich stets in der Form

$$T\left[A, \frac{-B+\sqrt{D}}{2}\right]$$

darstellen. Dabei ist

$$D = B^2 - 4AC = Q^2 d,$$

A, B, C, Q sind ganz rational, $(A, B, C) = 1$, und T ist rational.

2. Die Gesamtheit der Elemente α aus k, für die $\alpha\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$, bildet einen Modul $\mathfrak{o}$. Er heißt die Ordnung des Moduls $\mathfrak{m}$ und hat die Darstellung

$$\left[1, \frac{-D+\sqrt{+D}}{2}\right].$$

D ist die Diskriminante, Q die Invariante der Ordnung. Der Modul $\mathfrak{m}$ gehört genau zu der Ordnung $\mathfrak{o}$, wenn $(A, B, C) = 1$.

3. Zu jedem Modul $\mathfrak{m}$ der Ordnung $\mathfrak{o}$ existiert ein eindeutig bestimmter inverser Modul $\mathfrak{m}^{-1}$ der Ordnung. Er besteht aus genau den Elementen α von k, für die $\alpha\,\mathfrak{m} \subset \mathfrak{o}$. Es ist

$$\mathfrak{m}^{-1} = \frac{1}{T^2 A}\cdot\mathfrak{m}', \quad \mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}^{-1} = \mathfrak{m}^{-1}\cdot\mathfrak{m} = \mathfrak{o},$$

wenn mit $\mathfrak{m}'$ der zu $\mathfrak{m}$ konjugierte Modul $T\left[A; \frac{-B-\sqrt{D}}{2}\right]$ bezeichnet wird.

4. Die zu einer Ordnung gehörigen Moduln bilden eine multiplikative Gruppe.

Es werden im folgenden, wenn nicht ausdrücklich anders gesagt, nur Moduln derselben Ordnung $\mathfrak{o}$ betrachtet.

Ein Modul $\mathfrak{a}$ der Ordnung $\mathfrak{o}$ heißt ganz, wenn $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}$.

5. Gilt für zwei ganze Moduln $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der Ordnung $\mathfrak{o}$ die Relation $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, so gibt es einen eindeutig bestimmten ganzen Modul $\mathfrak{c}$ derselben Ordnung, so daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$.

6. Bezeichnet man mit $\mathfrak{o}_0$ die Ordnung aller ganzen Zahlen von k, so liefert die Zuordnung $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}\,\mathfrak{o}_0$ eine homomorphe Abbildung der Moduln einer Ordnung auf eine gewisse Idealmenge.

Für eine gewisse Teilmenge aller Moduln einer Ordnung kann diese Abbildung zu einer Isomorphie gemacht werden. Um diese Teilmenge zu beschreiben, bezeichnet man mit $\bar{\mathfrak{o}}$ die Menge aller Zahlen von k, die man aus dem Ring $\mathfrak{o}$ durch Division mit zu Q primen Zahlen aus $\mathfrak{o}$ erhält. Die so bestimmte Zahlmenge ist dann zwar kein Modul mehr, denn der Nennervorrat ist ja nicht beschränkt, dagegen gilt:

7. $\bar{\mathfrak{o}}$ ist ein Ring, er besteht aus genau den Elementen von k, die modulo Q additiv kongruent einer ganzen rationalen Zahl sind. Innerhalb von $\bar{\mathfrak{o}}$ betrachtet man weiter die Elemente α, die zu Q prim sind, und erhält eine Teilmenge $\mathfrak{s}$.

8. $\mathfrak{s}$ ist eine multiplikative Gruppe, sie besteht aus genau den Elementen $\alpha \subset k$, die modulo Q additiv kongruent einer ganzen rationalen zu Q primen Zahl sind.

Damit ist es nun möglich, eine bestimmte Menge von Moduln der Ordnung $\mathfrak{o}$ zu charakterisieren, die isomorph auf gewisse Ideale von k abgebildet werden, falls man noch den Begriff des regulären Moduls einführt. Dazu wird verlangt, daß 1. der Modul in $\bar{\mathfrak{o}}$ liegt und 2. das Bild des Moduls ein zu Q primes Ideal ist.

9. In der Definition des regulären Moduls kann die Forderung 2. durch die Forderung ersetzt werden, daß der Modul eine zu Q prime Zahl enthält.

Dann gilt:

10. Die regulären Moduln einer Ordnung bilden eine multiplikative Gruppe.

11. Die regulären Moduln werden durch Multiplikation mit $\mathfrak{o}_0$ genau auf die zu Q primen Ideale abgebildet. Diese Zuordnung ist eine Iso-

morphie. Ist $\mathfrak{a}_0$ ein zu Q primes Ideal, so ist der Durchschnitt $[\mathfrak{a}_0, \bar{\mathfrak{o}}]$ der reguläre Modul der Ordnung $\mathfrak{o}$, dessen Bild $\mathfrak{a}_0$ ist.

12. Nennt man zwei Moduln der Ordnung $\mathfrak{o}$ äquivalent, wenn sie durch Multiplikation mit einer Zahl aus k auseinander hervorgehen, so gelangt man zu einer Einteilung der Moduln der Ordnung in endlich viele Klassen $\bar{\mathfrak{k}}$.

Insbesondere erhält man also eine Einteilung der regulären Moduln in Klassen $\mathfrak{k}$, denn es gilt:

13. Zwei reguläre Moduln sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie durch Multiplikation mit einer Zahl aus $\mathfrak{s}$ auseinander hervorgehen. Da nun in jeder Klasse $\bar{\mathfrak{k}}$ ein regulärer ganzer Modul liegt, so ändert sich die Klassenzahl nicht.

Die isomorphe Abbildung der regulären Moduln auf Ideale liefert uns eine Einteilung der zu Q primen Ideale in Klassen $\mathfrak{k}_0$. Die Hauptklasse H_0 besteht genau aus den Idealen, die von Zahlen α aus $\mathfrak{s}$ erzeugt werden. Das ist eine Klasseneinteilung im Sinne der Klassenkörpertheorie, denn H_0 enthält insbesondere den Strahl $\alpha \equiv 1 \pmod{Q}$ und besteht nur aus zu Q primen Zahlen. H_0 ist also eine Komplexion von Strahlenklassen. Man nennt die so gewonnenen Klassen Ringklassen, da sie dem Ring $\mathfrak{o}$ entspringen.

In der komplexen Multiplikation wird nun gezeigt:

14. Ist $\mathfrak{m}$ irgendein Modul der Ordnung $\mathfrak{o}$, so ist $k(j(\mathfrak{m}))$ der zu $\mathfrak{s}$ gehörige Ringklassenkörper.

Man kann hier für $\mathfrak{m}$ einen beliebigen Modul der Ordnung zulassen, da in jeder absoluten Modulklasse nach 13. reguläre Moduln liegen und $j(w_1, w_2)$ für äquivalente Moduln gleiche Werte liefert.

§ 2.

Einer Ordnung $\mathfrak{o}$ eines imaginärquadratischen Körpers ordnen wir die Funktion

$$\tau(u; \mathfrak{w}) = g^{(e)}(\mathfrak{w})\,(-1)^{\frac{e}{2}}\,\wp^{\frac{e}{2}}(u; \mathfrak{w})$$

zu, wenn e die Anzahl der Einheiten von $\mathfrak{s}$ ist. Es soll sein

$$g^{(2)}(\mathfrak{w}) = 2^7 \cdot 3^5\, \frac{g_2(\mathfrak{w}) \cdot g_3(\mathfrak{w})}{\Delta(\mathfrak{w})},$$

$$g^{(4)}(\mathfrak{w}) = 2^8 \cdot 3^4\, \frac{g_2^2(\mathfrak{w})}{\Delta(\mathfrak{w})},$$

$$g^{(6)}(\mathfrak{w}) = 2^9 \cdot 3^6\, \frac{g_3(\mathfrak{w})}{\Delta(\mathfrak{w})}.$$

Das Verhalten dieser Funktion hat Herr Hasse in den Sätzen 13—19 seiner obengenannten Arbeit festgelegt.

Ist $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2]$ ein ganzer Modul der Ordnung $\mathfrak{o}$ und m ganz rational, so wird in Analogie zu dem von Herrn Hasse gewonnenen Resultat zu vermuten sein, daß gewisse der Teilwerte

$$\tau\left(\frac{x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2}{m}, \alpha_1, \alpha_2\right) \quad ((x_1, x_2, m) = 1)$$

mit $j(\mathfrak{a})$ zusammen einen Klassenkörper über k erzeugen, der zu dem Modulstrahl mod $m\,\mathfrak{o}$ gehört. Dabei steht der multiplikative Kongruenzbegriff für Moduln allerdings noch aus. Wir werden ihn in Anlehnung an den Kongruenzbegriff für Ideale ansetzen und verlangen, daß $\alpha\,\mathfrak{o}$ zu $m\,\mathfrak{o}$ prim ist und $(\alpha - 1)\,\mathfrak{o}$ eine eindeutige Darstellung als Quotient zweier ganzer zu $\mathfrak{o}$ gehöriger Moduln besitzt, deren Zähler durch $m\,\mathfrak{o}$ teilbar ist. Da aber $j(\mathfrak{a})$ im Falle eines Ideals den absoluten Klassenkörper, im Falle eines Moduls dagegen den zu $\mathfrak{s}$ gehörigen Klassenkörper erzeugt, so erscheint es sinnvoll, in die Kongruenzbedingung die Forderung, α liegt in $\mathfrak{s}$, mit aufzunehmen. Das Hineinziehen dieser Forderung in die Kongruenzbedingung wird gleich noch von anderer Seite her seine Berechtigung erfahren. Sehen wir zunächst von der letzten Forderung ab, so haben wir, um eine Kongruenzdefinition aufstellen zu können, erst einmal zu untersuchen, ob zwei ganze Moduln $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ stets einen größten gemeinsamen Teiler haben. Dabei wird unter dem größten gemeinsamen Teiler der Moduln $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ein $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ umfassender kleinster ganzer Modul derselben Ordnung verstanden, falls dieser kleinste Modul eindeutig bestimmt ist. Sodann müßten wir nachsehen, ob sich jeder Modul von $\mathfrak{o}$ eindeutig als Quotient zweier ganzer, teilerfremder zu $\mathfrak{o}$ gehöriger Moduln schreiben läßt. Es zeigt sich aber, daß in beiden Fällen Ausnahmen auftreten. Man könnte vermuten, daß $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ einen Modul mit den Eigenschaften des größten gemeinsamen Teilers liefert. Das ist aber hier nicht wahr, denn $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ kann zu einer umfassenderen Ordnung gehören. Ich will die Verhältnisse an einem Beispiel klarlegen. Dabei wird sich zeigen, daß zwei ganze Moduln einer Ordnung nicht stets einen größten gemeinsamen Teiler haben; weiter werde ich ein Beispiel dafür bringen, daß ein beliebiger Modul nicht stets eine eindeutige Quotientendarstellung haben muß.

Wir betrachten im Körper $R(\sqrt{-3})$ die Ordnung

$$\mathfrak{o} = \left[1, \frac{-12 + \sqrt{-12}}{2}\right] = [1, \sqrt{-3}]$$

mit der Diskriminante $D = -12$. Die Moduln

$$\mathfrak{a} = \left[4, \frac{-2 + \sqrt{-12}}{2}\right] = [4, -1 + \sqrt{-3}] \quad \text{mit } A = 4,\ B = 2,\ C = 1,$$

$$\mathfrak{b} = \left[12, \frac{-6 + \sqrt{-12}}{2}\right] = [12, -3 + \sqrt{-3}] \quad \text{mit } A = 12,\ B = 6,\ C = 1,$$

$$\mathfrak{c} = 2\,\mathfrak{o} = 2\,[1, \sqrt{-3}]$$

gehören zu $\mathfrak{o}$ und sind ganz. Sie sollen auf ihre Teilerfremdheit untersucht werden. Es ist

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = [4, -1 + \sqrt{-3}, \ -3 + \sqrt{-3}] = [2, -3 + \sqrt{-3}] = 2\,\mathfrak{o}_0,$$

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{c} = [2, -1 + \sqrt{-3}] \qquad\qquad = [2, -3 + \sqrt{-3}] = 2\,\mathfrak{o}_0.$$

Die Summen $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ sind also Moduln der $\mathfrak{o}$ umfassenden Ordnung $\mathfrak{o}_0$, d. h., sie sind Ideale. Ich zeige nun, daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ keinen Modul von $\mathfrak{o}$ als Teiler gemein haben. Ein gemeinsamer Teiler $\mathfrak{e}$ muß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ umfassen, da aber $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ kein Modul der Ordnung ist, so muß $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ eine echte Teilmenge von $\mathfrak{e}$ sein, d. h., da $2\,\mathfrak{o}_0 = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \underset{\neq}{\subseteq} \mathfrak{e} \subset \mathfrak{e}\,\mathfrak{o}_0$, es muß $2\,\mathfrak{o}_0$ eine echte Teilmenge von $\mathfrak{e}\,\mathfrak{o}_0$ sein. In $R\,(\sqrt{-3})$ ist aber 2 Primideal, also ist $\mathfrak{e}\,\mathfrak{o}_0 = \mathfrak{o}_0$. Später werden wir zeigen, daß von den ganzen Moduln einer Ordnung $\mathfrak{o}$ nur $\mathfrak{o}$ selbst auf $\mathfrak{o}_0$ abgebildet wird. Daraus ergibt sich die Behauptung $\mathfrak{e} = \mathfrak{o}$. Genau so zeigt man die Teilerfremdheit der Moduln $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$. Weiter soll an diesem Beispiel gezeigt werden, daß sich ein Modul nicht immer eindeutig als Quotient zweier ganzer, teilerfremder Moduln derselben Ordnung darstellen läßt. Wir bilden dazu den Modul $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$.

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} = 2\,[12, -3 + \sqrt{-3}] = [24, -6 + 2\sqrt{-3}] \subset [4, -1 + \sqrt{-3}] = \mathfrak{a},$$

d. h. $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ ist durch $\mathfrak{a}$ teilbar, $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{d}$, obwohl weder $\mathfrak{b}$ noch $\mathfrak{c}$ Teiler mit $\mathfrak{a}$ gemein haben. Dabei ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{d} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}^{-1} &= 2\,[12, -3 + \sqrt{-3}] \cdot \tfrac{1}{4}\,[4, -1 - \sqrt{-3}] \\ &= [24, -6 + 2\sqrt{-3}, \ 6 + 6\sqrt{-3}, \ 3 + \sqrt{-3}] \\ &= [24, -6 + 2\sqrt{-3}, \ 3 + \sqrt{-3}, \ 4\sqrt{-3}] = [12, 3 + \sqrt{-3}] = \mathfrak{b}' \neq \mathfrak{b} \end{aligned}$$

und $\mathfrak{c} + \mathfrak{d} = \mathfrak{c} + \mathfrak{b}' = \mathfrak{c}' + \mathfrak{b}' = (\mathfrak{c} + \mathfrak{b})' = 2\,\mathfrak{o}_0$; wie oben gezeigt wurde, haben dann $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ keinen Teiler in $\mathfrak{o}$ gemein. Man kann also den Modul $\dfrac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \dfrac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}}$ auf zwei Arten als Quotient teilerfremder, ganzer Moduln schreiben. Man wird also auf eine allgemeine Kongruenzdefinition verzichten müssen. Schließlich bleibt noch zu zeigen, daß es über zwei ganzen Moduln einer Ordnung keinen eindeutig bestimmten kleinsten Modul derselben Ordnung zu geben braucht, d. h., zwei ganze Moduln einer Ordnung haben nicht stets einen größten gemeinsamen Teiler. Wir bilden dazu noch die Moduln $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}\,\mathfrak{d} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}\,\mathfrak{d}$. Gemeinsame Teiler von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$ sind $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$. Nehmen wir an, es existiere ein größter gemeinsamer Teiler $\mathfrak{e}$, so gilt $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{e}$ und $\mathfrak{d} \supset \mathfrak{e}$, oder $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1\,\mathfrak{b}$, $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_2\,\mathfrak{d}$. Setzt man noch $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{e}\,\bar{\mathfrak{a}}_1$ und $\bar{\mathfrak{b}}_1 = \mathfrak{e}\,\bar{\mathfrak{b}}_1$, so ergibt sich

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{e}_1\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{a}}_1 = \mathfrak{e}_2\,\mathfrak{d}\,\bar{\mathfrak{a}}_1 = \mathfrak{a}\,\mathfrak{d} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{c}, \quad \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{e}_1\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{b}}_1 = \mathfrak{e}_2\,\mathfrak{d}\,\bar{\mathfrak{b}}_1 = \mathfrak{b}\,\mathfrak{d}$$

und

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{e}_2\,\bar{\mathfrak{a}}_1, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{e}_2\,\bar{\mathfrak{b}}_1, \quad \mathfrak{c} = \mathfrak{e}_1\,\bar{\mathfrak{a}}_1, \quad \mathfrak{d} = \mathfrak{e}_1\,\bar{\mathfrak{b}}_1;$$

da aber $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ keinen Teiler in $\mathfrak{o}$ gemein haben, so muß $\mathfrak{e}_2 = \mathfrak{o}$, d. h. $\mathfrak{e} = \mathfrak{d}$ sein. Genau so sieht man, daß $\mathfrak{e} = \mathfrak{b}$ sein muß. Das ist aber ein Widerspruch, wie man sich leicht überzeugt, denn es ist $\mathfrak{d} = \mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{b}$ ist von seinem konjugierten Modul verschieden. Es gibt mithin mehrere kleinste Moduln der Ordnung, die $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$ umfassen. Auf diesem Wege können wir also auch nicht zu einer Definition des größten gemeinsamen Teilers gelangen.

In dem Beispiel wurde eine Aussage benutzt, die uns auch später noch nützlich sein wird.

15. Bei der in 6. beschriebenen Abbildung wird von den ganzen Moduln der Ordnung $\mathfrak{o}$ nur $\mathfrak{o}$ selbst auf $\mathfrak{o}_0$ abgebildet.

Der ganze Modul $\mathfrak{a} = T\left[A, \frac{-B+\sqrt{D}}{2}\right]$ werde auf $\mathfrak{o}_0$ abgebildet. Soll aber $\mathfrak{a}$ ganz sein, so muß T ganz rational sein. Da weiter $\mathfrak{a}\,\mathfrak{o}_0 = \mathfrak{o}_0$ ist und der zweite Faktor auch auf ein ganzes Ideal abgebildet wird, so ergibt sich $T = 1$. Dann ist $\mathfrak{a}$ gleich dem größten gemeinsamen Idealteiler von A und $\frac{-B+\sqrt{D}}{2}$. Wegen

$$(A\,C) = \tfrac{1}{2}(-B+\sqrt{D})\cdot\tfrac{1}{2}(-B-\sqrt{D}) = \tfrac{1}{4}(D-B^2)$$

sind A und $\frac{1}{2}(-B+\sqrt{D})$ dann und nur dann teilerfremd, wenn $A = 1$, d. h. $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$.

Es gelingt also nicht, wie aus dem Beispiel hervorgeht, den multiplikativen Kongruenzbegriff in der üblichen Fassung auf Moduln zu übertragen. Wir nehmen daher, wie oben schon angedeutet, die Forderung, daß α in $\mathfrak{s}$ liegt, hinzu. Dann liegt $\alpha - 1$ in $\bar{\mathfrak{o}}$ und hat einen regulären Nenner, da wir aber nur die Quotientendarstellung derartiger Elemente benötigen, so können wir uns bei der Untersuchung des größten gemeinsamen Teilers auf den Fall beschränken, daß der eine der beiden Moduln regulär ist. Noch ein wenig allgemeiner können wir sagen:

16. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ganze Moduln der Ordnung $\mathfrak{o}$ der Diskriminante $D = Q^2 d$ und enthält $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ eine zu Q prime Zahl, so ist $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ ein regulärer Modul derselben Ordnung, und er hat die Eigenschaften des größten gemeinsamen Teilers.

Die Voraussetzungen dieses Satzes sind insbesondere erfüllt, wenn der eine der beiden Moduln regulär ist.

Beweis: Enthält $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ eine zu Q prime Zahl, so ist $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\,\mathfrak{o}_0$ ein zu Q primes Ideal, d. h. aber, $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\,\mathfrak{o}_0$ ist das Bild eines regulären Moduls der Ordnung $\mathfrak{o}$, nach 11. ist $[(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\mathfrak{o}_0, \mathfrak{o}]$ dieser Modul der Ordnung $\mathfrak{o}$. Der Modul $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ gehöre nun zu der Ordnung $\mathfrak{o}_1$, diese muß $\mathfrak{o}$ umfassen, die Invariante Q_1 von $\mathfrak{o}_1$ ist mithin ein Teiler der Invariante Q von $\mathfrak{o}$, da aber weiter auch $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{o}$ liegt, so ist $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ ein regulärer Modul seiner Ordnung. Sein Bild ist auch $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\,\mathfrak{o}_0$. Daraus wollen wir schließen, daß $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ schon zu $\mathfrak{o}$ gehört.

Es ist

$$[(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\,\mathfrak{o}_0, \bar{\mathfrak{o}}] \supset \mathfrak{a}+\mathfrak{b} = [(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\,\mathfrak{o}_0, \bar{\mathfrak{o}}_1] \supset [(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\,\mathfrak{o}_0, \bar{\mathfrak{o}}].$$

Damit ist

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = [(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\,\mathfrak{o}_0, \bar{\mathfrak{o}}]$$

gezeigt. Nach der oben gemachten Bemerkung ergibt sich daraus die Behauptung. Daß nun $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ auch die Eigenschaften des größten gemeinsamen Teilers hat, ist unmittelbar zu sehen.

Ein regulärer ganzer Modul und ein beliebiger ganzer Modul derselben Ordnung sind also dann und nur dann teilerfremd, wenn ihre Summe gleich der Ordnung ist. Weiter sieht man, daß unter allen Umständen aus $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ folgt, daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ teilerfremd sind. Umgekehrt ergibt sich aber aus der Teilerfremdheit zweier ganzer Moduln einer Ordnung $\mathfrak{o}$ nur, daß entweder $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ oder $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ zu einer $\mathfrak{o}$ umfassenden Ordnung gehört.

Damit haben wir ein für unsere Zwecke ausreichendes Kriterium für die Existenz des größten gemeinsamen Teilers gefunden. Wir ziehen noch eine Folgerung.

17. Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ ganze Moduln der Ordnung $\mathfrak{o}$ und ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$, so ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c} + \mathfrak{b}$, gleichgültig, zu welchen Ordnungen die Moduln $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}$ gehören.

Es ist

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{c} = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) \subset \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a} + \mathfrak{c},$$

$$\mathfrak{b} + \mathfrak{c} = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) \subset \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{b} \subset \mathfrak{b} + \mathfrak{c}.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung.

Wir kommen nun zu unserer zweiten Aufgabe, nämlich der Darstellung eines Moduls als Quotient zweier ganzer Moduln derselben Ordnung.

18. Ist $\mathfrak{a}$ ein Modul der Ordnung $\mathfrak{o}$, der in $\bar{\mathfrak{o}}$ liegt, so gibt es zwei eindeutig bestimmte ganze Moduln $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1$ derselben Ordnung, so daß $\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{b}_1}$ mit $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{o}$. Wir nennen dies die reduzierte Darstellung. Der ganze Modul $\mathfrak{b}_1$ ist überdies regulär.

Da $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2]$ in $\bar{\mathfrak{o}}$ liegt, so kann man schreiben $\alpha_1 = \frac{a_1}{b}$ und $\alpha_2 = \frac{a_2}{b}$, wo a_1 und a_2 in $\mathfrak{o}$ liegen, b ganz rational und zu Q prim ist. Dann ist $b\,\mathfrak{o}$ regulär, und $\mathfrak{c} = b\,\mathfrak{a}$ liegt in $\mathfrak{o}$. Die Moduln $\mathfrak{c}$ und $b\,\mathfrak{o}$ haben mithin nach 16. einen größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{d} = b\,\mathfrak{o} + \mathfrak{c}$. Wir setzen $b\,\mathfrak{o} = \mathfrak{b}_1\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{d}$ ($\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1$ ganze zu $\mathfrak{o}$ gehörige Moduln). Der Modul $\mathfrak{b}_1$ ist als Teiler von $b\,\mathfrak{o}$ regulär. Weiter ist

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{d} + \mathfrak{b}_1\mathfrak{d} = (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1)\,\mathfrak{d}, \quad \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{o}.$$

Daraus ergibt sich der eine Teil der Behauptung.

Ist nun $\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{b}_2}$ eine beliebige Darstellung von $\mathfrak{a}$ mit ganzen Moduln $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{b}_2$, so ergibt sich aus $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{o}$ nach 17.

$\mathfrak{b}_1 \supset \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 \supset \mathfrak{b}_2$, d. h. $\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}$. Sind noch $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{b}_2$ teilerfremd — es braucht nicht $\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{o}$ zu sein — so muß $\mathfrak{c} = \mathfrak{o}$ sein, q. e. d.

Ein regulärer Modul $\mathfrak{a}$ heißt zu einem beliebigen ganzen Modul $\mathfrak{m}$ prim, wenn in der reduzierten Darstellung von $\mathfrak{a}$ Zähler und Nenner zu $\mathfrak{m}$ teilerfremd sind, d. h. ist $\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{b}_1}$ mit $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{o}$, so soll $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{m} = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{m} = \mathfrak{o}$.

19. Ein regulärer Modul $\mathfrak{a}$ ist dann und nur dann zu dem ganzen Modul $\mathfrak{m}$ prim, wenn $\mathfrak{a}\mathfrak{o}_0$ zu $\mathfrak{m}\mathfrak{o}_0$ prim ist.

Ist $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{m}$ prim, so ist wegen $\mathfrak{a}_1\mathfrak{o}_0 + \mathfrak{m}\mathfrak{o}_0 = (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{m})\mathfrak{o}_0 = \mathfrak{o}_0$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{o}_0 + \mathfrak{m}\mathfrak{o}_0 = (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{m})\mathfrak{o}_0 = \mathfrak{o}_0$ auch $\mathfrak{a}\mathfrak{o}_0$ zu $\mathfrak{m}\mathfrak{o}_0$ prim. Ist umgekehrt $\mathfrak{a}\mathfrak{o}_0$ zu $\mathfrak{m}\mathfrak{o}_0$ prim, so ist, da $\frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{o}_0}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{o}_0}$ die reduzierte Idealdarstellung von $\mathfrak{a}\mathfrak{o}_0$ ist, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{o}_0 + \mathfrak{m}\mathfrak{o}_0 = \mathfrak{o}_0$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{o}_0 + \mathfrak{m}\mathfrak{o}_0 = \mathfrak{o}_0$. Nach 15. ergibt sich $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{m} = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{m} = \mathfrak{o}$.

Damit sind wir nun in der Lage, einen Kongruenzbegriff für die Elemente von $\mathfrak{s}$ aufzustellen.

Ist $\mathfrak{m}$ ein ganzer Modul der Ordnung $\mathfrak{o}$, so nennen wir eine Zahl α des zu $\mathfrak{o}$ gehörigen Strahles $\mathfrak{s}$ kongruent 1 modulo $\mathfrak{m}$,

$$\alpha \equiv 1 \, [\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}],$$

wenn α den folgenden Bedingungen genügt:

1. $\alpha \subset \mathfrak{s}$,
2. $\alpha\mathfrak{o}$ prim zu $\mathfrak{m}$,
3. $(\alpha - 1)\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{m}}{\mathfrak{b}}$, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ganz, $\mathfrak{m} + \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$.

Diese Forderungen haben einen Sinn, da $\alpha\mathfrak{o}$ regulär und $(\alpha - 1)\mathfrak{o} \subset \bar{\mathfrak{o}}$. Weiter zeigen wir, daß $(\alpha - 1)\mathfrak{o}$ dann und nur dann eine Darstellung der Form 3. hat, wenn die reduzierte Darstellung schon von dieser Form ist. Sei $(\alpha - 1)\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{m}}{\mathfrak{b}}$ und $\mathfrak{b} + \mathfrak{m} = \mathfrak{o}$, $(\alpha - 1)\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{b}_1}$ sei die reduzierte Darstellung, d. h. $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{o}$. Dann ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{c}$. Wir wollen zeigen, daß $\mathfrak{c}$ ein Teiler von $\mathfrak{a}$ ist. Aus $\mathfrak{m} + \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ ergibt sich $\mathfrak{o} = \mathfrak{m} + \mathfrak{b}_1\mathfrak{c} \subset \mathfrak{m} + \mathfrak{c} \subset \mathfrak{o}$, $\mathfrak{m} + \mathfrak{c} = \mathfrak{o}$; da nun noch $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{c}$, so erhalten wir $\mathfrak{c} \supset \mathfrak{a}_1\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{m} + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{c} \supset \mathfrak{a}$,

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}_2;$$

$$\mathfrak{m}\mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{c}; \quad \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{a}_2;$$

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{m}\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{m} + \mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{o}; \quad \mathfrak{m} + \mathfrak{b}_1 = 0.$$

Die reduzierte Darstellung hat also auch die Form 3., q. e. d. Man sieht, daß diese Definition der Kongruenz mit dem gewöhnlichen Kongruenzbegriff zusammenfällt, wenn der Modul ein Ideal ist, denn dann ist $Q = 1$ und $\mathfrak{s}$ besteht aus sämtlichen Zahlen von k.

Wir zeigen:

20. Die Elemente $\alpha \equiv 1$ [mod $\mathfrak{m}$] bilden eine multiplikative Gruppe. Sei $\alpha_1 \equiv 1$ [mod $\mathfrak{m}$], also

$$\alpha_1\,\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{b}_1} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{m} = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{m} = \mathfrak{o},$$

$$(\alpha_1 - 1)\,\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{m}}{\mathfrak{b}} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{a}\,\mathfrak{m} + \mathfrak{b} = \mathfrak{m} + \mathfrak{b} = \mathfrak{o};$$

da die Elemente von $\mathfrak{s}$ eine multiplikative Gruppe bilden, so liegt auch $\frac{1}{\alpha_1}$ in $\mathfrak{s}$ und ist zu $\mathfrak{m}$ prim. Damit sind die beiden ersten Kongruenzbedingungen erfüllt. Weiter ist

$$\left(\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1}\right)\mathfrak{o} = \left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right)\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}_1\cdot\mathfrak{m}}{\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}_1}.$$

Da aber $\mathfrak{b}(\alpha_1 - 1) = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{m}$, d. h. $\mathfrak{b}\,\alpha_1 + \mathfrak{b} \supset \mathfrak{b}(\alpha_1 - 1) = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{m}$,

$$\mathfrak{b}\cdot\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{b}_1} + \mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}\,\mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{b} \supset \mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b}_1 \supset \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{m}\,\mathfrak{b}_1,$$

$\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}$ wegen 17. und $\mathfrak{a}\,\mathfrak{m} + \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ ist,

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{b} \supset \mathfrak{b} + \mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{b} \supset \mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}\,\mathfrak{c}.$$

Dann ist

$$\left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}_1} \qquad \text{mit } \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{m} = \mathfrak{o}, \text{ q. e. d.}$$

Weiter sei noch

$$\alpha_2 \equiv 1 \text{ [mod } \mathfrak{m}]$$

$$(\alpha_2 - 1)\,\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{m}}{\mathfrak{b}_2}, \quad \mathfrak{m} + \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{o};$$

da

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{b}_1\cdot\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{m} + \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{m} + \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{o},$$

so kann man annehmen

$$(\alpha_1 - 1)\,\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{m}}{\mathfrak{b}}, \quad (\alpha_2 - 1)\,\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{m}}{\mathfrak{b}}, \quad \mathfrak{m} + \mathfrak{b} = \mathfrak{o},$$

d. h.

$$\alpha_1 - 1 \subset \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{b}}, \quad \alpha_2 - 1 \subset \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{b}}$$

oder

$$\alpha_1 = 1 + \lambda_1, \quad \alpha_2 = 1 + \lambda_2 \quad \text{mit} \quad \lambda_1, \lambda_2 \subset \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{b}},$$

dann ist aber

$$(\alpha_1\,\alpha_2 - 1) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\cdot\lambda_2 \subset \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{b}^2},$$

$$(\alpha_1\,\alpha_2 - 1)\,\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{m}}{\mathfrak{b}^2}$$

und

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{b}^2 = \mathfrak{m} + \mathfrak{b} = 0,$$

da aber die erste und zweite Kongruenzbedingung auch erfüllt sind, so liegt mit zwei Elementen auch das Produkt im Modulstrahl.

Betrachtet man nun die von diesen Elementen erzeugten Hauptmoduln $\alpha\mathfrak{o}$, so bilden auch diese eine multiplikative Gruppe $H^*(\mathfrak{m})$. Es ist zu vermuten, daß die so konstruierte Gruppe $H^*(\mathfrak{m})$ bei der Abbildung auf Ideale die gesuchte Hauptklasse $H_0^*(\mathfrak{m})$ liefert. Dazu haben wir zunächst einmal zu untersuchen, ob das Bild von $H^*(\mathfrak{m})$ überhaupt eine Hauptklasse im Sinne der Klassenkörpertheorie ist. Daß $H_0^*(\mathfrak{m})$ wieder eine Gruppe ist, ist wegen der Isomorphie der Abbildung — wir bilden ja nur reguläre Moduln ab — evident.

Es muß mithin noch festgestellt werden, daß $H_0^*(\mathfrak{m})$ alle Hauptideale enthält, die von den Zahlen aus einem noch zu bestimmenden Idealstrahl erzeugt werden, und daß $H_0^*(\mathfrak{m})$ nur solche Hauptideale enthält, die zu dem Führer des Strahls prim sind. Da nun $H_0^*(\mathfrak{m})$ nur aus Idealen besteht, die zu $\mathfrak{m}\mathfrak{o}_0$ und zur Invariante Q der Ordnung von $\mathfrak{o}$ prim sind, so ist anzunehmen, daß $H_0^*(\mathfrak{m})$ modulo $Q\mathfrak{m}\mathfrak{o}_0$ erklärbar ist.

21. Ist $\alpha \equiv 1 \pmod{Q\mathfrak{m}\mathfrak{o}_0}$, so ist $\alpha \equiv 1\,[\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}]$. Aus der Kongruenz $\alpha \equiv 1 \pmod{Q\mathfrak{m}\mathfrak{o}_0}$ ergibt sich, daß α in $\mathfrak{s}$ liegt und $\alpha\mathfrak{o}$ zu $\mathfrak{m}$ prim ist, denn $\alpha\mathfrak{o}_0$ ist ja zu $\mathfrak{m}\mathfrak{o}_0$ prim. Die Kongruenz besagt aber weiter, daß für $(\alpha-1)\mathfrak{o}_0$ eine Darstellung

$$(\alpha-1)\,\mathfrak{o}_0 = \frac{\mathfrak{a}_0 Q\mathfrak{m}\mathfrak{o}_0}{\mathfrak{b}_0}$$

mit $\mathfrak{a}_0 Q\mathfrak{m}\mathfrak{o}_0 + \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{o}_0$ existiert, da aber $\alpha - 1$ in $\bar{\mathfrak{o}}$ liegt, so hat $(\alpha-1)\,\mathfrak{o}$ eine reduzierte Darstellung

$$(\alpha-1)\,\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}, \quad \mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$$

mit einem regulären Nenner $\mathfrak{b}$. Es ist also

$$\mathfrak{a}_0 Q\mathfrak{m}\mathfrak{o}_0 = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{o}_0, \quad \mathfrak{b}\mathfrak{o}_0 = \mathfrak{b}_0$$

und

$$\frac{\mathfrak{a}}{Q\mathfrak{m}}\mathfrak{o}_0 \subset \mathfrak{o}_0, \quad \frac{\mathfrak{a}}{Q\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{o}_0.$$

Liegt aber ein Modul in $\mathfrak{o}_0$, so liegt das Q-fache dieses Moduls in $\mathfrak{o}$, d. h.

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}.$$

Wegen $\mathfrak{m}\mathfrak{o}_0 + \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{o}_0$ ist aber auch $\mathfrak{m}+\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$, denn $\mathfrak{b}$ ist ja regulär. Damit ist die Behauptung bewiesen.

In dem Fall, daß $\mathfrak{m}$ selbst ein regulärer Modul ist, läßt sich die Aussage 21. verschärfen.

22. Ist $\mathfrak{m}$ regulär, $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}\mathfrak{o}_0}$ und $\alpha \subset \mathfrak{s}$, so ist auch

$$\alpha \equiv 1\,[\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}].$$

Es ist $(\alpha-1)\,\mathfrak{o}_0 = \frac{\mathfrak{a}_0\mathfrak{m}\mathfrak{o}_0}{\mathfrak{b}_0}$ mit $\mathfrak{a}_0\mathfrak{m}\mathfrak{o}_0 + \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{o}_0$. Da aber α in $\mathfrak{s}$ liegen soll, so muß auch $(\alpha-1)\,\mathfrak{o}_0$ einen zu Q primen Nenner haben,

$$\mathfrak{b}_0 + Q\mathfrak{o}_0 = \mathfrak{o}_0.$$

Andererseits haben wir für $\alpha - 1$ eine reduzierte Darstellung, denn $\alpha - 1 \subset \bar{\mathfrak{o}}$,

$$(\alpha - 1)\,\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}}, \quad \mathfrak{c} + \mathfrak{d} = \mathfrak{o},$$

dabei ist $\mathfrak{d}$ regulär.

$$(\alpha - 1)\,\mathfrak{o}_0 = \frac{\mathfrak{c}\,\mathfrak{o}_0}{\mathfrak{d}\,\mathfrak{o}_0}, \quad \mathfrak{c}\,\mathfrak{o}_0 + \mathfrak{d}\,\mathfrak{o}_0 = \mathfrak{o}_0.$$

$$\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{o}_0 = \mathfrak{c}\,\mathfrak{o}_0, \quad \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{d}\,\mathfrak{o}_0.$$

Da $\mathfrak{m}$ ein regulärer Modul sein soll, so gilt

$$\mathfrak{c} \subset [\mathfrak{c}\,\mathfrak{o}_0, \bar{\mathfrak{o}}] = [\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{m}, \bar{\mathfrak{o}}] \subset [\mathfrak{m}\,\mathfrak{o}_0, \bar{\mathfrak{o}}] = \mathfrak{m},$$

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{m}.$$

Schließlich ist noch

$$\mathfrak{m}_0 + \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{m}\,\mathfrak{o}_0 + \mathfrak{d}\,\mathfrak{o}_0 = (\mathfrak{m} + \mathfrak{d})\,\mathfrak{o}_0 = \mathfrak{o}_0,$$

nach 15. ist also $\mathfrak{m} + \mathfrak{d} = \mathfrak{o}$, denn $\mathfrak{m} + \mathfrak{d}$ gehört zu $\mathfrak{o}$.

Für reguläre Moduln haben wir also die Hauptklasse $H_0^*(\mathfrak{m})$ genau beschrieben, denn aus $\alpha \equiv 1$ [mod $\mathfrak{m}$] ergibt sich unmittelbar $\alpha \equiv 1$ (mod $\mathfrak{m}\,\mathfrak{o}_0$). Allgemein ergibt sich aus den Sätzen 21. und 22.:

23. Ist $\mathfrak{m}$ ein ganzer Modul, so bilden die von den Elementen $\alpha \equiv 1$ [mod $\mathfrak{m}$] erzeugten Hauptideale eine Hauptklasse im Sinne der Klassenkörpertheorie, sie ist mod $Q\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{o}_0$ erklärbar.

§ 3.

Wir nennen zwei Moduln derselben Ordnung äquivalent, wenn ihr Quotient ein Hauptmodul der Ordnung ist. So ergibt sich eine Einteilung sämtlicher Moduln der Ordnung in Klassen $\bar{\mathfrak{k}}$ mit der Hauptklasse $\bar{H}$. In jeder Klasse $\bar{\mathfrak{k}}$ liegen reguläre ganze Moduln. Da nun zwei reguläre Moduln dann und nur dann äquivalent sind, wenn sie sich um einen von $\mathfrak{s}$ erzeugten Hauptmodul unterscheiden, so ergibt sich eine Einteilung der regulären Moduln in Klassen $\mathfrak{k}$ mit der Hauptklasse H der von $\mathfrak{s}$ erzeugten Hauptmoduln. Die Klassenzahl ändert sich dabei nicht. Die Abbildung der regulären Moduln auf die zu Q primen Ideale von k liefert eine Einteilung der zu Q primen Ideale in Klassen $\mathfrak{k}_0$ mit der Hauptklasse H_0. Diese besteht aus den von $\mathfrak{s}$ erzeugten Hauptidealen.

Aus der Hauptklasse H sondern wir durch die Bedingung $\alpha \equiv 1$ [mod $\mathfrak{m}$] eine neue Hauptklasse $H^*(\mathfrak{m})$ aus und teilen die regulären und zu $\mathfrak{m}$ primen Moduln danach ein. Jede Klasse $\mathfrak{k}$ zerfällt dann in gleichviel Klassen $\mathfrak{k}^*$ und zwar in genau $(H : H^*(\mathfrak{m}))$, denn in jeder Klasse $\mathfrak{k}$ gibt es zu $\mathfrak{m}$ prime Moduln, da es in der zugeordneten Idealklasse $\mathfrak{k}_0$ zu $\mathfrak{m}\,\mathfrak{o}_0$ prime Ideale gibt. Der ganze Modul $\mathfrak{m}$ liegt in einer eindeutig bestimmten Hauptmodulklasse $\bar{\mathfrak{k}}(\mathfrak{m})$, in dieser liegt eine und nur eine Klasse $\mathfrak{k}(\mathfrak{m})$

regulärer Moduln. Wir ordnen der Klasse $\mathfrak{k}$ diejenigen Klassen $\mathfrak{k}^*$ zu, in die $\mathfrak{k}^{-1}\mathfrak{k}(\mathfrak{m})$ zerfällt. Dann ist auch umgekehrt $\mathfrak{k}$ durch $\mathfrak{k}^*$ eindeutig bestimmt.

Entsprechend betrachten wir die Gruppe der von den Zahlen $\alpha \equiv 1$ [mod $\mathfrak{m}$] erzeugten Hauptideale. Diese bilden nach 23. eine Hauptklasse $H_0^*(\mathfrak{m})$. Sie entsteht durch die isomorphe Abbildung aus $H^*(\mathfrak{m})$ und liefert eine Einteilung der zu Q und $\mathfrak{m}\,\mathfrak{o}_0$ primen Ideale in Klassen $\mathfrak{k}_0^*$. Genau wie oben ordnen wir der Klasse $\mathfrak{k}_0$ diejenigen Klassen $\mathfrak{k}_0^*$ zu, in die $\mathfrak{k}_0^{-1}\mathfrak{k}_0(\mathfrak{m})$ zerfällt, unter $\mathfrak{k}_0(\mathfrak{m})$ ist das Bild der Modulklasse $\mathfrak{k}(\mathfrak{m})$ zu verstehen. Den Klassen $\mathfrak{k}_0^*$ sollen nun dadurch Invarianten zugeordnet werden, daß wir Invarianten der Klassen $\mathfrak{k}^*$ bilden. Aus der der Klasse $\mathfrak{k}^*$ zugeordneten Klasse $\bar{\mathfrak{k}}$ wählen wir irgendeinen Modul $\mathfrak{a}$, aus der Klasse $\mathfrak{k}^*$ nehmen wir einen ganzen Modul $\mathfrak{r}$. Dann ist $\frac{\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}}$ ein Hauptmodul $\varrho\,\mathfrak{o}$:

$$\frac{\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}} = \varrho \cdot \mathfrak{o}.$$

Der Klasse $\mathfrak{k}^*$ wird dann der Wert $\tau(\varrho, \mathfrak{a})$ zugeordnet, wo diejenige τ-Funktion zu nehmen ist, die zur betrachteten Ordnung gehört. Wir wollen zeigen, daß die so gewonnenen Funktionswerte Invarianten der Klassen sind.

Wir beweisen:

24. Ist $\varrho\,\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}}$, $\varrho_1\,\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}_1}$, wobei

1. $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}_1$ ganze Moduln, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_1$ reguläre ganze Moduln derselben Ordnung $\mathfrak{o}$ sind und $\mathfrak{a}$ ein beliebiger Modul von $\mathfrak{o}$ ist,

2. $\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{r} + \mathfrak{m} = \mathfrak{o}$,

so ist dann und nur dann $\tau(\varrho, \mathfrak{a}) = \tau(\varrho_1, \mathfrak{a})$, wenn $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1$, und $\mathfrak{r}_1$ mit $\mathfrak{r}$ in derselben Modulklasse nach $\mathfrak{m}$ liegt.

Es ist dann und nur dann

$$\tau(\varrho, \mathfrak{a}) = \tau(\varrho_1, \mathfrak{a}),$$

wenn

$$\varrho = \varepsilon\,\varrho_1 + a,$$

wo $a \subset \mathfrak{a}$ und ε eine Ringeinheit ist; da aber $\varrho\,\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{a}$ liegt, so muß das auch für $\varrho_1\,\mathfrak{m}$ gelten, d. h. $\frac{\mathfrak{r}_1}{\mathfrak{m}_1}\,\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a}$, $\frac{\mathfrak{r}_1}{\mathfrak{m}_1}\,\mathfrak{m} \subset \mathfrak{o}$, $\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_1$; wegen $\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{o}$ ist dann weiter

$$\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{m} + \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_1, \quad \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_1.$$

Ebenso sieht man, daß $\mathfrak{m}_1$ in $\mathfrak{m}$ liegt. Mithin ergibt sich aus der Gleichheit der τ-Werte, daß $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1$, dann ist aber $\varrho\,\mathfrak{r}_1 = \varrho_1\,\mathfrak{r}$, d. h. $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_1$ liegen in derselben Klasse $\bar{\mathfrak{k}}$, da aber $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_1$ regulär sind, so müssen sie schon in derselben Klasse $\mathfrak{k}$ liegen, denn $\bar{\mathfrak{k}}$ enthält nur eine Klasse $\mathfrak{k}$.

Wir wollen zeigen, daß die Moduln sogar in derselben Strahlklasse nach $\mathfrak{m}$ liegen.

$$(\varrho - \varepsilon\varrho_1)\,\mathfrak{o} \subset \mathfrak{a}$$

$$(\varrho - \varepsilon\varrho_1)\,\mathfrak{o} = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}$$

$$\left(\frac{\varrho - \varepsilon\varrho_1}{\varrho}\right)\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{c}\,\mathfrak{m}}{\mathfrak{r}},$$

da nun $\mathfrak{m} + \mathfrak{r} = \mathfrak{o}$ und $\frac{\varepsilon\varrho_1}{\varrho}\,\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{r}_1}{\mathfrak{r}}$ zu $\mathfrak{m}$ prim ist und schließlich noch $\frac{\varepsilon\varrho_1}{\varrho}$ wegen der Äquivalenz der Moduln $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_1$ in $\mathfrak{s}$ liegt, so ist

$$\frac{\varepsilon\varrho_1}{\varrho} \equiv 1\ [\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}].$$

Damit ist die eine Richtung bewiesen.

Die Umkehrung soll ein wenig allgemeiner bewiesen werden. Sei $\varrho\,\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}}$, $\varrho_1\,\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{r}_1\cdot\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}}$ mit $\mathfrak{r}_1 = \alpha\,\mathfrak{r}$, dabei sollen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_1$ nur ganz und $\alpha \equiv 1\ [\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}]$ sein; dann ist $\tau(\varrho; \mathfrak{a}) = \tau(\varrho_1; \mathfrak{a})$.

Es ist $(\alpha - 1)\,\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}}$ mit $\mathfrak{m}\,\mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{o}$, also $(\varrho_1 - \varrho)\,\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{r}$, $\mathfrak{c}\,(\varrho_1 - \varrho) \subset \mathfrak{a}$. Andererseits gilt $\mathfrak{m}\,(\varrho_1 - \varrho) \subset \mathfrak{a}$, und wegen $\mathfrak{m} + \mathfrak{c} = \mathfrak{o}$ erhalten wir $\varrho_1 - \varrho \subset \mathfrak{a}$. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Demnach sind also die den Klassen zugeordneten Funktionen von der Auswahl von $\mathfrak{r}$ in seiner Klasse $\mathfrak{k}^*$ unabhängig; da τ homogen von der Dimension Null ist, kann man auch ϱ durch eine beliebige Ring-assoziierte ersetzen. Aus demselben Grunde hängt der τ-Wert, was $\mathfrak{a}$ anbetrifft, nur von der Klasse $\bar{\mathfrak{k}}$ ab. Man kann also z. B. verlangen, daß $\mathfrak{a}$ ganz und regulär ist.

Der Wert $\tau(\varrho, \mathfrak{a})$ ist eine Invariante der Klasse $\mathfrak{k}^*$, wir schreiben

$$\tau(\varrho, \mathfrak{a}) = \tau(\mathfrak{k}^*).$$

Zu jeder Klasse $\mathfrak{k}^*$ gehört eine eindeutig bestimmte Idealklasse $\mathfrak{k}_0^*$ und umgekehrt. Wir können also auch $\tau(\varrho, \mathfrak{a})$ als Invariante von $\mathfrak{k}_0^*$ bezeichnen.

Satz 24 liefert nun unmittelbar:

25. Die Invarianten $\tau(\mathfrak{k}^*)$, die zu derselben Klasse $\mathfrak{k}$ gehören, sind verschieden.

Ist m die kleinste in $\mathfrak{m}$ gelegene ganze rationale Zahl, so ist

$$\varrho\,\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{b}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}}{m}$$

mit ganzem $\mathfrak{b}$. Erzeugen a_1, a_2 den Modul $\mathfrak{a}$, so kann man schreiben

$$\varrho = \frac{x_1 a_1 + x_2 a_2}{m} \qquad (x_1, x_2 \text{ ganz rational})$$

mit $(x_1, x_2, m) = d = 1$. Denn ist $d \neq 1$, so gilt

$$\varrho\, \mathfrak{o} = \frac{d\,\mathfrak{r}_1 \mathfrak{a}}{d\,m_1} = \frac{\mathfrak{r}_1 \mathfrak{a}}{m_1} = \frac{\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}}, \qquad \frac{\mathfrak{r}_1}{m_1} = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{m}}.$$

Da aber $\mathfrak{r}$ regulär und zu $\mathfrak{m}$ prim ist, so müßte $m_1 \subset \mathfrak{m}$ (nach 18.). Das ist ein Widerspruch.

Die Klasseninvarianten $\tau(\mathfrak{k}^*)$ sind also spezielle m-te τ-Teilwerte. In Satz 21 beweist Herr Hasse:

Die Teilungsgleichung

$$T_m(t, j(w_1, w_2)) = \prod_{\substack{x_1, x_2 \bmod m \\ (x_1, x_2, m) = 1}} \left(t - \tau\left(\frac{x_1 w_1 + x_2 w_2}{m};\; w_1, w_2\right)\right)$$

ist ein Polynom in t und $j(w_1, w_2)$ mit rationalen Koeffizienten, in deren Nennern höchstens Primteiler von m aufgehen.

Da aber $j(w_1, w_2)$ für jeden singulären Modul ganz algebraisch ist, so erhalten wir:

26. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiger Modul der Ordnung $\mathfrak{o}$, so sind die m-ten τ-Teilwerte $\tau\left(\frac{x_1 a_1 + x_2 a_2}{m};\; a_1, a_2\right)$ der $\mathfrak{o}$ zugeordneten τ-Funktionen algebraische Zahlen, in deren reduzierten Nennern höchstens Primteiler von m aufgehen.

Um zu zeigen, daß $k(j(\mathfrak{k}), \tau(\mathfrak{k}^*))$ der zu $H_0^*(\mathfrak{m})$ gehörige Klassenkörper $K_\mathfrak{m}$ ist, bildet man die Differenzen

$$\delta_{P_\nu}(x_1, x_2;\; w_1, w_2) = \tau^p\left(\frac{x_1 w_1 + x_2 w_2}{m};\; w_1, w_2\right) - \tau\left(\frac{p(x_1 a_1 + x_2 a_2)}{m};\; P_\nu\binom{w_1}{w_2}\right)$$
$$\text{mit } (x_1, x_2, m) = 1$$

für eine Primzahl p, die teilerfremd ist

1. zu der Diskriminante $Q^2 d$ von $\mathfrak{o}$,
2. zu der Norm von $\mathfrak{m}$,
3. zu den Relativdiskriminanten der sämmtlichen Körper

$$k\left(\tau\left(\frac{x_1 a_1 + x_2 a_2}{m};\; a_1, a_2\right)\right),$$

wo $\mathfrak{a} = [a_1, a_2]$ ein vollständiges Repräsentantensystem der absoluten Modulklassen von $\mathfrak{o}$ durchläuft und für x_1, x_2 ein System von modulo m inkongruenten Wertepaaren zu nehmen ist.

Weiter verlangen wir, daß p in k in Primideale ersten Grades zerfällt:

$$(p) = \mathfrak{p}_0 \mathfrak{p}_0'.$$

Dann zerfällt auch der Modul $p \cdot \mathfrak{o}$ in zwei verschiedene Moduln:

$$p\,\mathfrak{o} = \mathfrak{p}\mathfrak{p}', \quad \mathfrak{p} = [\mathfrak{p}_0, \bar{\mathfrak{o}}], \quad \mathfrak{p}' = [\mathfrak{p}_0', \bar{\mathfrak{o}}].$$

Die P_ν sollen ein vollständiges Repräsentantensystem von Transformationen p-ten Grades durchlaufen:

$$P_\nu = \begin{pmatrix} 1, & \nu \\ 0, & p \end{pmatrix} \quad \nu = 0, 1, \ldots, p: \quad P_{p+1} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Herr Hasse zeigt im Beweis von Satz 23: Ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_0$, $\mathfrak{a}_0$ ein Ideal und $\bar{P}$ eine normierte Transformation p-ten Grades, die die Basis a_1, a_2 von $\mathfrak{a}_0$ in eine Basis von $\mathfrak{p}_0' \mathfrak{a}_0$ überführt, so ist

$$\delta_{\bar{P}}(x_1, x_2; \; a_1, a_2) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_0}.$$

Bei dem Beweise wird von der Tatsache, daß $\mathfrak{a}_0$ Ideal ist, nur gebraucht: Ist

$$\Phi(t, j(w_1, w_2)) = \prod_\nu \left(t - \varphi_{P_\nu}(w_1, w_2)\right) \left(\varphi_{P_\nu}(w_1, w_2) = \frac{\Delta\left(\frac{P_\nu\binom{w_1}{w_2}}{p}\right)}{\Delta(w_1, w_2)} \right),$$

so ist $\Phi'(\varphi_{\bar{P}}(w_1, w_2); \; j(w_1, w_2))$ für ein Ideal $\mathfrak{a}_0$ von k eine ganze algebraische nicht durch $\mathfrak{p}_0$ teilbare Zahl.

Das gilt aber auch für Moduln der Ordnung $\mathfrak{o}$, falls unter $\bar{P}$ eine normierte Transformation p-ten Grades verstanden wird, die die Basis a_1, a_2 des Moduls $\mathfrak{a}$ in eine Basis des Moduls $\mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{a}$ überführt.

27. Es ist $\delta_{\bar{P}}(x_1, x_2; \; a_1, a_2) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_0}$, wenn $\mathfrak{a} = [a_1, a_2]$ ein Modul von $\mathfrak{o}$ ist, p in k in Primideale ersten Grades zerfällt und nicht aufgeht

1. in der Diskriminante von $\mathfrak{o}$,
2. in der Norm von $\mathfrak{m}$,
3. in den Relativdiskriminanten der Körper $k\left(\tau\left(\frac{x_1 a_1 + x_2 a_2}{m}; \; \mathfrak{a}\right)\right)$.

Für die Klasseninvarianten ergibt sich daraus:

28. Genügt p den im vorigen Satz gemachten Voraussetzungen, so ist

$$\tau^p(\mathfrak{k}^*) \equiv \tau(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^* \mathfrak{k}^*) \pmod{\mathfrak{p}_0}.$$

Es ist

$$\tau(\mathfrak{k}^*) = \tau\left(\frac{r_1 a_1 + r_2 a_2}{m}; \; \mathfrak{a}\right) = \tau(\varrho; \; \mathfrak{a})$$

und

$$\tau\left(\frac{p(r_1 a_1 + r_2 a_2)}{m}; \; \bar{P}\mathfrak{a}\right) = \tau(p\varrho; \; \mathfrak{p}'\mathfrak{a}) = \tau\left(\varrho, \; \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}}\right) = \tau(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^* \mathfrak{k}^*),$$

dabei wird unter $\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^*$ diejenige Klasse verstanden, die den regulären und zu $\mathfrak{m}$ primen Modul $\mathfrak{p}$ enthält.

Da aber die Klassen $\mathfrak{k}^*$ bei $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}\,\mathfrak{o}_0$ isomorph auf die Idealklassen $\mathfrak{k}_0^*$ abgebildet werden, so folgert man aus 25., 28. und der Tatsache, daß die Invarianten $j(\mathfrak{k})$ alle verschieden sind:

Satz I. *Ist* $\mathfrak{o}$ *eine Ordnung eines imaginärquadratischen Körpers* k, $\mathfrak{m}$ *ein ganzer Modul derselben Ordnung und* $H_0^*(\mathfrak{m})$ *die von den Zahlen*

$$\alpha \equiv 1 \;[\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}]$$

erzeugte Hauptklasse, so ist

$$k(j(\mathfrak{k}),\ \tau(\mathfrak{k}^*)) = K_{\mathfrak{m}}$$

der zu $H_0^*(\mathfrak{m})$ *gehörige Klassenkörper.*

Die τ-Teilwerte, die Klasseninvarianten sind, liegen also im Körper $K_{\mathfrak{m}}$. Wie steht es nun mit beliebigen τ-Teilwerten für Moduln von $\mathfrak{o}$? Wir zeigen, daß die Werte $\tau\left(\frac{x_1 a_1 + x_2 a_2}{m};\ a_1, a_2\right)$ in $K_{m\mathfrak{o}}$ liegen, wenn $\mathfrak{a} = [a_1, a_2]$ zu $\mathfrak{o}$ gehört.

Sei p eine Primzahl, die den Bedingungen des Satzes 27 genügt, weiter sei

$$(p) = \mathfrak{p}_0 \mathfrak{p}_0', \quad \mathfrak{p}_0 \neq \mathfrak{o}_0$$

und $\mathfrak{p}_0$ liege in $H_0^*(m\mathfrak{o})$; da der Erklärungsmodul $m\mathfrak{o}$ rational ist, liegt auch $\mathfrak{p}_0'$ in $H_0^*(m\mathfrak{o})$, mithin ist $p \equiv 1 \pmod{m}$.

Die den Primidealen $\mathfrak{p}_0$ und $\mathfrak{p}_0'$ zugeordneten regulären Moduln $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ liegen in $H^*(m\mathfrak{o})$, d. h. $\mathfrak{p} = \alpha\mathfrak{o}$ mit $\alpha \equiv 1$ [mod $m\mathfrak{o}$]. Nach 27. ist

$$\tau\left(\frac{x_1 a_1 + x_2 a_2}{m};\ a_1, a_2\right)^p \equiv \tau\left(\frac{p(x_1 a_1 + x_2 a_2)}{m};\ \alpha' a_1,\ \alpha' a_2\right)$$
$$\equiv \tau\left(\alpha\,\frac{x_1 a_1 + x_2 a_2}{m};\ a_1, a_2\right) \pmod{\mathfrak{p}_0},$$

denn es ist ja $(p) = (\alpha)\cdot(\alpha')$. Der zweite Teil des Beweises von 24. wurde allgemeiner geführt. Daraus ergibt sich

$$\tau\left(\frac{x_1 a_1 + x_2 a_2}{m};\ a_1, a_2\right) = \tau\left(\alpha\,\frac{x_1 a_1 + x_2 a_2}{m};\ a_1, a_2\right),$$

oder

$$\tau\left(\frac{x_1 a_1 + x_2 a_2}{m};\ a_1, a_2\right)^p \equiv \left(\frac{x_1 a_1 + x_2 a_2}{m};\ a_1, a_2\right) \pmod{\mathfrak{p}_0}.$$

Das gilt für fast alle Primideale $\mathfrak{p}_0$ der Hauptklasse $H_0^*(m\mathfrak{o})$.

Wir betrachten nun den Körper $K_{m\mathfrak{o}}\left(\tau\left(\frac{x_1 a_1 + x_2 a_2}{m};\ a_1, a_2\right)\right)$, $\mathfrak{P}_0$ sei ein Primteiler von $\mathfrak{p}_0$. Die Potenzen von τ bilden dann eine $\mathfrak{P}_0$-Basis über $K_{m\mathfrak{o}}$. Ist also A für $\mathfrak{P}_0$ ganz, so kann man schreiben

$$A \equiv \sum_0^n a_\nu \tau^\nu\left(\frac{x_1 a_1 + x_2 a_2}{m};\ a_1, a_2\right) \pmod{\mathfrak{P}_0}$$

mit ganzen Koeffizienten aus $K_{m\mathfrak{o}}$. Da aber $\mathfrak{p}_0$ in $K_{m\mathfrak{o}}$ vollständig zerfällt, ist

$$a_\nu^p \equiv a_\nu \pmod{\mathfrak{P}_0} \quad (\mathfrak{p}_0 \text{ ist ja vom ersten Grade}),$$

mithin

$$A^p \equiv A \pmod{\mathfrak{P}_0}.$$

Dann kann $\mathfrak{p}_0$ aber nur in Primteiler $\mathfrak{P}_0$ vom ersten Grade zerfallen. Es zerfallen also fast alle Primideale aus $H_0^*(m\,\mathfrak{o})$ im Kompositum vollständig. Weiter liegen auch die Normen sämtlicher Ideale des Kompositums in der Hauptklasse $H_0^*(m\,\mathfrak{o})$, denn das Kompositum enthält ja den zu $H_0^*(m\,\mathfrak{o})$ gehörigen Klassenkörper $K_{m\mathfrak{o}}$. Aus diesen beiden Resultaten ergibt sich, daß $K_{m\mathfrak{o}}\left(\tau\left(\frac{x_1 a_1 + x_2 a_2}{m};\, a_1, a_2\right)\right)$ auch Klassenkörper zu $H_0^*(m\,\mathfrak{o})$ ist. Daraus folgt die Behauptung. Da man aber aus $j(m\,\mathfrak{o})$ und einigen der τ-Teilwerte den Körper schon aufbauen kann — die Klasseninvarianten sind ja m-te Teilwerte — so können wir sagen:

Satz II. *Durchläuft* $\mathfrak{a} = [a_1, a_2]$ *die Moduln der Ordnung* $\mathfrak{o}$, x_1, x_2 *alle modulo* m *inäquivalenten Wertepaare* $(x_1, x_2, m) = 1$, *und adjungiert man die verschiedenen der Werte*

$$\tau\left(\frac{x_1 a_1 + x_2 a_2}{m};\, a_1, a_2\right) \quad \textit{und} \quad j(m\,\mathfrak{o})$$

zu dem zu $\mathfrak{o}$ *gehörigen imaginärquadratischen Körper* k, *so erhält man den Klassenkörper* $K_{m\mathfrak{o}}$.

Ist $\mathfrak{a}_0$ ein Ideal und γ ein rationaler Zwischenpunkt des von $\mathfrak{a}_0$ aufgespannten Gitters, der aber selbst kein Gitterpunkt ist, so läßt sich immer ein ganzes Ideal $\mathfrak{m}_0$ so finden, daß $\tau(\gamma, \mathfrak{a}_0)$ eine zu $\mathfrak{m}_0$ gehörige Klasseninvariante $\tau(\mathfrak{k}^*)$ ist, d. h. $\tau(\gamma, \mathfrak{a}_0)$ und $j(\mathfrak{a}_0)$ erzeugen den Strahlklassenkörper modulo $\mathfrak{m}_0$. Das braucht aber für Moduln nicht zu gelten, denn nehmen wir $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$, so müßte sich ein regulärer Modul $\mathfrak{r}$ und ein ganzer Modul $\mathfrak{m}$ finden lassen, so daß $\gamma\,\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{m}}$ und $\mathfrak{r} + \mathfrak{m} = \mathfrak{o}$, d. h. $\gamma\,\mathfrak{o}$ muß eine eindeutige Zerlegung in Zähler und Nenner besitzen. Nach dem Beispiel braucht das aber für Moduln durchaus nicht der Fall zu sein, d. h. $\tau(\varrho, \mathfrak{a})$ braucht nicht Klasseninvariante zu sein, trotzdem erzeugt es natürlich mit $j(\mathfrak{a})$ zusammen einen Klassenkörper. Es läßt sich hier nur nicht unmittelbar entscheiden, welcher Klassenkörper es ist.

II. Untersuchung der singulären Werte ganzer Modulfunktionen höherer Stufe.

Es sollen beliebige ganze zur Hauptkongruenzgruppe $\mathfrak{S}_n$ n-ter Stufe gehörige Modulfunktionen untersucht werden, die in allen Spitzen Ent-

wicklungen nach $q^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{2\pi i}{n}\frac{w_1}{w_2}}$ mit Koeffizienten aus dem n-ten Kreiskörper $R(\zeta_n)$ besitzen.

Sei $f(w_1, w_2)$ eine derartige Funktion. Um $f(w_1, w_2)$ in allen rationalen Spitzen zu untersuchen, wählt man sich bekanntlich irgendein vollständiges Vertretersystem $S_1, \ldots, S_r$ der Gruppe $\mathfrak{S}$ aller Modulsubstitutionen nach der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ und betrachtet dann die Funktion

$$f\left(S_i\binom{w_1}{w_2}\right) = g(S_i;\ w_1, w_2)$$

in ihrer Abhängigkeit von w_1, w_2 im Punkte $\tau = i\,\infty$, wo $\tau = \frac{w_1}{w_2}$ gesetzt ist. Die so gewonnenen Spitzenfunktionen sind auch gegen Substitutionen aus $\mathfrak{S}_n$ invariant, denn die Gruppe $\mathfrak{S}_n$ ist ja Normalteiler in der Gruppe $\mathfrak{S}$. Die Funktionen sind ganz, denn $f(w_1, w_2)$ ist ja in allen endlichen Punkten der oberen Halbebene in den Ortsuniformisierenden regulär. Bei Anwendung einer beliebigen Modulsubstitution T vertauschen sich die Spitzenfunktionen untereinander:

$$g\left(S_i;\ T\binom{w_1}{w_2}\right) = g(S_i T;\ w_1, w_2) = g(S_k;\ w_1, w_2),$$

denn $S_i T$ durchläuft ja mit S_i auch ein vollständiges Vertretersystem.

Die Funktionen $g(S_i;\ w_1, w_2)$ besitzen als ganze Modulfunktionen im Punkte $i\,\infty$ Entwicklungen nach $q^{\frac{1}{n}}$ mit nur endlich vielen negativen Potenzen:

$$\Sigma a_\mu(S_i)\, q^{\frac{\mu}{n}}.$$

Wir nehmen vorläufig an, daß die $a_\mu(S_i)$ ganz sind aus $R(\zeta_n)$. Die Voraussetzung der Ganzheit ist unwesentlich, denn sie wird nur bei dem q-Entwicklungsprinzip gebraucht. Dafür reicht aber die Ganzheit der ersten N Koeffizienten aus, wo N passend zu bestimmen ist.

Es soll gezeigt werden, daß unter diesen Voraussetzungen die Funktion $f(w_1, w_2)$ für Werte a_1, a_2, die die Basis eines singulären Moduls $\mathfrak{a}$ der Ordnung $\mathfrak{o}$ bilden, Werte aus dem Klassenkörper $K_{n\mathfrak{o}}$ annimmt. Dabei nehmen wir an, daß die Numerierung der Basis schon so getroffen ist, daß $I\left(\frac{a_1}{a_2}\right) > 0$.

f bezeichne einen derartigen Funktionswert, wir werden gleich zeigen, daß er ganz algebraisch ist. Es wird dann behauptet, daß $K_{n\mathfrak{o}}(f)$ auch Klassenkörper zu der Hauptklasse $H_0^*(n\,\mathfrak{o})$ über k ist, wenn $\mathfrak{o}$ in dem imaginärquadratischen Körper k liegt.

Dazu hat man zu zeigen:

1. Die Ideale des Kompositums entsenden ihre Normen in die Hauptklasse,

2. fast alle Primideale der Hauptklasse zerfallen im Kompositum vollständig.

Die erste Bedingung ist trivialerweise erfüllt, da das Kompositum ja den zu $H_0^*(n\,\mathfrak{o})$ gehörigen Klassenkörper enthält.

Um das Erfülltsein der zweiten Bedingung zu zeigen, genügt es, sich auf Primideale ersten Grades der Hauptklasse zu beschränken.

Liegt $\mathfrak{p}_0$ in der Hauptklasse und gilt für jeden Primteiler $\mathfrak{P}_0$ von $\mathfrak{p}_0$ im Kompositum und für jedes für $\mathfrak{P}_0$ ganze A aus $K_{n\,\mathfrak{o}}(f)$ die Kongruenz

$$A^p \equiv A \pmod{\mathfrak{P}_0},$$

so kann $\mathfrak{p}_0$ nur in Primteiler vom ersten Absolutgrade zerfallen, also erst recht vom ersten Relativgrade bezüglich k. Diese Kongruenz ist aber dann und nur dann erfüllt, wenn

$$f^p \equiv f \pmod{\mathfrak{P}_0},$$

denn die Potenzen von f bilden eine $\mathfrak{P}_0$-Basis bezüglich $K_{n\,\mathfrak{o}}$, und für $\mathfrak{P}_0$ ganze Elemente dieses Körpers genügen der Kongruenz, da $\mathfrak{p}_0$ hier ja vollständig zerfällt.

Der Nachweis ist also erbracht, wenn wir zeigen:

Für fast alle Primideale $\mathfrak{p}_0$ ersten Grades der Hauptklasse gilt

$$f^p \equiv f \pmod{\mathfrak{P}_0},$$

wenn $\mathfrak{P}_0$ irgendein Primteiler von $\mathfrak{p}_0$ im Kompositum ist. Man kann noch verlangen, daß $\mathfrak{p}_0$ zu einem festen Ideal prim ist.

Es liegt mit $\mathfrak{p}_0$ auch $\mathfrak{p}_0'$ in $H_0^*(n\,\mathfrak{o})$ und es ist $p \equiv 1 \pmod{n}$.

Der Modul $p\,\mathfrak{o}$ zerfällt ganz entsprechend:

$$p\,\mathfrak{o} = \mathfrak{p}\,\mathfrak{p}', \quad \mathfrak{p} = [\mathfrak{p}', \bar{\mathfrak{o}}], \quad \mathfrak{p}' = [\mathfrak{p}_0', \bar{\mathfrak{o}}], \quad \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'.$$

Wir beweisen die Kongruenz für die Funktionen $g(S_i;\, w_1, w_2)$. Der Ausdruck

$$T(t;\, w_1, w_2) = \prod_{S_i} (t - g(S_i;\, w_1, w_2))$$

ist ein Polynom in t, dessen Koeffizienten gegen Modulsubstitutionen invariant sind. Andererseits sind sie Funktionen von w_1, w_2, die homogen von der Dimension Null, in den endlichen Punkten der oberen Halbebene regulär sind und Entwicklungen nach $q^{\frac{1}{n}}$ mit nur endlich vielen negativen Potenzen besitzen. Die Koeffizienten dieser Entwicklungen sind ganz aus $R(\zeta_n)$. Nach dem q-Entwicklungsprinzip sind also die Koeffizienten des Polynoms in t Polynome in $j(w_1, w_2)$ mit ganzen Koeffizienten

aus $R(\zeta_n)$. Da aber der höchste Koeffizient des Polynoms in t gleich 1 und $j(w_1, w_2)$ für einen singulären Modul ganz algebraisch ist, so erhalten wir:

Ist a_1, a_2 Basis eines singulären Moduls, so ist $g(S_i; a_1, a_2)$ ganz algebraisch.

Wir kommen nun zu dem Beweis der Kongruenz.

Es ist zweckmäßig, nicht die Funktion $g^p(S_i; w_1, w_2)$ direkt mit der Funktion $g(S_i; w_1, w_2)$ zu vergleichen, sondern noch die Funktionen

$$g\left(S_i;\ P\binom{w_1}{w_2}\right)$$

dazwischen zu schieben, um einen Ausgleich für die p-te Potenz zu haben. P soll dabei eine Transformation p-ten Grades bedeuten. Wir nennen zwei derartige Transformationen äquivalent, wenn $P = T \cdot P'$, wo T eine Modulsubstitution ist. Auf Seite 317 ist ein vollständiges Vertretersystem angegeben. Dabei darf ν noch $\operatorname{mod} p$ abgeändert werden. Der Transformation P_ν ordnen wir die Transformation $P_{\bar\nu}$ zu, wo $\bar\nu \equiv \nu \pmod p$ und $\bar\nu \equiv 0 \pmod n$. Das ist möglich, da $(p, n) = 1$. P_{p+1} lassen wir ungeändert.

Damit bilden wir die Funktionen

$$g\left(S_i;\ P_{\bar\nu}\binom{w_1}{w_2}\right).$$

Ist T eine Modulsubstitution und $P_{\bar\nu} T = T_1 P_{\bar\nu'}$, so ist wegen $T \equiv T_1 \pmod n$

$$g\left(S_i;\ P_{\bar\nu}\, T\binom{w_1}{w_2}\right) = g\left(S_i T;\ P_{\bar\nu'}\binom{w_1}{w_2}\right).$$

Für die Differenz

$$d_{P_{\bar\nu}}(S_i; w_1, w_2) = g^p(S_i; w_1, w_2) - g\left(S_i;\ P_{\bar\nu}\binom{w_1}{w_2}\right)$$

ergibt sich

$$d_{P_{\bar\nu}}\left(S_i;\ T\binom{w_1}{w_2}\right) = d_{P_{\bar\nu'}}\left(S_i T;\ \binom{w_1}{w_2}\right), \quad \text{wenn } P_{\bar\nu} T = T_1 \cdot P_{\bar\nu'}.$$

Wir erhalten also wieder eine Differenz.

Die Funktionen $d_{P_{\bar\nu}}(S_i; w_1, w_2)$ vertauschen sich mithin nur untereinander. Speziell geht die Gesamtheit der Funktionen $d_{P_{\bar\nu}}(S_i; w_1, w_2)$ mit festem $P_{\bar\nu}$ bei Anwendung der Modulsubstitution T in die Gesamtheit der Funktionen $d_{P_{\bar\nu'}}(S_i; w_1, w_2)$ über, wenn $P_{\bar\nu} T \backsim P_{\bar\nu'}$.

Bildet man bei festem $P_{\bar\nu}$ die K-te symmetrische Grundfunktion $d_{P_{\bar\nu}}^{(K)}(w_1, w_2)$ so gehorcht diese dem Gesetz:

$$d_{P_{\bar\nu}}^{(K)}\left(T\binom{w_1}{w_2}\right) = d_{P_{\bar\nu'}}^{(K)}(w_1, w_2).$$

Die Funktionen

$$\varphi_{P_\nu}(w_1, w_2) = p^{12}\frac{\Delta\left(P_\nu\binom{w_1}{w_2}\right)}{\Delta(w_1, w_2)} = \varphi_{P_\nu}(w_1, w_2)$$

sind demselben Gesetz unterworfen.

Für die $d_{P_\nu}(S_i;\, w_1, w_2)$ existieren Entwicklungen $B_{P_{\bar\nu}}(S_i)$,

$$B_{P_{\bar\nu}}(S_i) = (\Sigma a_\mu(S_i)\, q^{\frac{\mu}{n}})^p - \Sigma a_\mu(S_i)\,(\zeta_p^{\frac{\bar\nu}{n}}\, q^{\frac{1}{p\, n}})^\mu \qquad \bar\nu \neq p+1,$$

$$B_{P_{p+1}}(S_i) = (\Sigma a_\mu(S_i)\, q^{\frac{\mu}{n}})^p - \Sigma a_\mu(S_i)\, q^{\frac{p\cdot\mu}{n}}.$$

Der Exponent von ζ_p ist ganz, da $\bar\nu \equiv 0\,(n)$. Die Koeffizienten der q-Entwicklungen sind ganz und liegen in $R(\zeta_n, \zeta_p)$. Da $(p, n) = 1$, so werden die Automorphismen von $R(\zeta_n, \zeta_p)$ über $R(\zeta_n)$ gekennzeichnet durch $\zeta_p \to \zeta_p^C$. Dabei vertauschen sich die Entwicklungen der $d_{P_{\bar\nu}}(S_i)$ nur untereinander.

Ist $\bar\nu \neq p+1$, so unterscheidet sich $B_{P_\nu}(S_i)$ von $B_{P_0}(S_i)$ nur durch den Exponenten von ζ_p, d. h.

$$B_{P_{\bar\nu}}(S_i) \equiv B_{P_0}(S_i) \pmod{1-\zeta_p}.$$

Für $B_{P_{p+1}}(S_i)$ gilt die Kongruenz

$$B_{P_{p+1}}(S_i) \equiv 0 \pmod{p},$$

denn in $R(\zeta_n)$ zerfällt p vollständig; ist also $\overline{\mathfrak{P}}_0$ irgendein Primteiler von p in $R(\zeta_n)$, so ist

$$a_\mu^p(S_i) \equiv a_\mu(S_i) \pmod{\overline{\mathfrak{P}}_0},$$

wegen des unverzweigten Zerfalls gilt dann die Kongruenz auch mod p. Daraus folgert man die Behauptung.

Für die Entwicklungen $B_{P_{\bar\nu}}^{(K)}$ der $d_{P_{\bar\nu}}^{(K)}(w_1, w_2)$ erhalten wir

$$B_{P_{\bar\nu}}^{(K)} \equiv B_{P_0}^{(K)} \pmod{1-\zeta_p} \qquad \bar\nu \neq p+1,$$

$$B_{P_{p+1}}^{(K)} \equiv 0 \pmod{p},$$

d. h. es gelten ganz analoge Kongruenzen, wie für die Entwicklungen A_ν der φ_{P_ν}:

$$A_\nu \equiv A_0 \pmod{1-\zeta_p} \qquad \nu \neq p+1,$$

$$A_{p+1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Dabei ist A_ν für $\nu \neq p+1$ eine Potenzreihe nach $\zeta_p^\nu q^{\frac{1}{p}}$, A_{p+1} eine solche nach q mit ganzen rationalen Koeffizienten und nur endlich vielen negativen Potenzen.

Bei einem Automorphismus von $R(\zeta_n, \zeta_p)$ über $R(\zeta_n)$ vertauschen sich also die A_ν und $B_{P_\nu}^{(K)}$ in gleicher Weise.

Bildet man die Interpolationsformel

$$D^{(K)}(t;\, w_1, w_2) = \sum_{\nu} \frac{\Phi_p(t;\, j(w_1, w_2))}{t - \varphi_{P_\nu}(w_1, w_2)}\, d_{P_\nu}^{(K)}(w_1, w_2)$$

mit

$$\Phi_p(t;\, j(w_1, w_2)) = \prod_{P_\nu} (t - \varphi_{P_\nu}(w_1, w_2)),$$

so überzeugt man sich leicht, daß $D^{(K)}(t;\, w_1, w_2)$ ein Polynom in t und $j(w_1, w_2)$ ist mit ganzen Koeffizienten aus $R(\zeta_n, \zeta_p)$. Da aber mit ζ_p auch sämtliche Konjugierten in die Koeffizienten symmetrisch eingehen so liegen diese schon in $R(\zeta_n)$.

Für die t, q-Entwicklung von $D^{(K)}(t;\, w_1, w_2)$ findet man

$$(t - A_1) \ldots (t - A_p) \cdot B_{P_{p+1}}^{(K)} + (t - A_{p+1}) \cdot \sum_{\nu \neq p+1} \frac{\prod\limits_{l \neq p+1} (t - A_l)}{t - A_\nu} B_{P_\nu}^{(K)}$$

$$\equiv (t - A_1)^p \cdot B_{P_{p+1}}^{(K)} + p(t - A_{p+1}) \cdot (t - A_1)^{p-1} \cdot B_{P_0}^{(K)} \equiv 0 \pmod{1 - \zeta_p},$$

d. h. die Koeffizienten der t, q-Entwicklung von $D^{(K)}(t;\, w_1, w_2)$ sind durch $1 - \zeta_p$ teilbar. Da die Koeffizienten aber andererseits in $R(\zeta_n)$ liegen, so gilt die Kongruenz auch mod $1 - \zeta_p^\nu$. In $R(\zeta_p)$ zerfällt p in $\prod(1-\zeta_p^\nu)$. Ist also $\overline{\mathfrak{P}}_0$ irgendein Primteiler von p in $R(\zeta_n, \zeta_p)$, so gilt

$$D^{(K)}(t;\, w_1, w_2) \equiv 0 \pmod{\overline{\mathfrak{P}}_0}$$

und damit $D^{(K)}(t;\, w_1, w_2) \equiv 0 \pmod{\overline{\overline{\mathfrak{P}}}_0}$, wenn $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}_0$ der zu $\overline{\mathfrak{P}}_0$ gehörige Primteiler von p in $R(\zeta_n)$ ist. Da aber p in $R(\zeta_n)$ unverzweigt zerfällt, so erhalten wir:

Ist $p \equiv 1 \pmod{n}$, so ist $D^{(K)}(t;\, w_1, w_2)$ ein Polynom $D^{(K)}(t;\, j(w_1, w_2))$ in t und $j(w_1, w_2)$ mit ganzen durch p teilbaren Koeffizienten aus $R(\zeta_n)$. Wir lassen t gegen $\varphi_{P_\nu}(w_1, w_2)$ streben und erhalten schließlich noch die Darstellung

$$d_{P_\nu}^{(K)}(w_1, w_2) = \frac{D^{(K)}(\varphi_{P_\nu}(w_1, w_2);\, j(w_1, w_2))}{\Phi_p'(\varphi_{P_\nu}(w_1, w_2);\, j(w_1, w_2))}.$$

Es ist

$$\Phi_p(t;\, j(w_1, w_2)) \equiv t^{p+1} \pm S(w_1, w_2)\, t \pmod{p}$$

mit

$$S(w_1, w_2) = p^{12} \sum_{\bar{\nu}} \frac{1}{\varphi_{P_{\bar{\nu}}}(w_1, w_2)} \text{[4]}.$$

Sei nun $\mathfrak{a} = [a_1, a_2]$ ein Modul der Ordnung $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}_0$ ein Primideal aus $H_0^*(n\,\mathfrak{o})$, das prim zur Diskriminante von $\mathfrak{o}$ und vom ersten Absolutgrade ist. $\bar{P}$ sei eine normierte Transformation p-ten Grades, die die Basis a_1, a_2 von $\mathfrak{a}$ in eine Basis von $\mathfrak{p}'\mathfrak{a}$ überführt, wenn $\mathfrak{p}$ der zu $\mathfrak{p}_0$ gehörige reguläre Modul ist. Eine solche Transformation gibt es, da $\mathfrak{p}$ ein ganzer Modul sein muß, denn er ist regulär und sein Bild ist ganz. Ist P diejenige Transformation, die die Basis a_1, a_2 in eine Basis von $\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}$ überführt, so gilt

$$(\varphi_P(\mathfrak{a})) = \mathfrak{p}_0'^{12}; \qquad (\varphi_{\bar{P}}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{p}_0^{12}.$$

Da aber die $\varphi_{P_\nu}(\mathfrak{a})$ ganze algebraische Zahlen sind und $\Pi\,\varphi_{P_{\bar{\nu}}}(\mathfrak{a}) = p^{12}$, so müssen die restlichen $\varphi_{P_{\bar{\nu}}}(\mathfrak{a})$ Einheiten sein, d. h. $S(\mathfrak{a})$ ist eine zu $\mathfrak{p}_0$ prime ganze algebraische Zahl. Wegen $\Phi_p'(\varphi_{\bar{P}}(\mathfrak{a}), j(\mathfrak{a})) \equiv S(\mathfrak{a}) \pmod{\mathfrak{p}_0}$ ist $\Phi_p'(\varphi_P(\mathfrak{a}), j(\mathfrak{a}))$ zu $\mathfrak{p}_0$ prim. Andererseits ist $D^{(K)}(\varphi_{\bar{P}}(\mathfrak{a}), j(\mathfrak{a}))$ eine ganze algebraische durch p teilbare Zahl, also

$$d_{\bar{P}}^{(K)}(a_1, a_2) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_0},$$

ganz algebraisch ist diese Zahl auch, da sie sich aus solchen Zahlen ganz rational aufbaut.

$d_{\bar{P}}(S_i;\, a_1, a_2)$ genügt also einer Gleichung, deren höchster Koeffizient 1, deren übrige Koeffizienten ganz und durch $\mathfrak{p}_0$ teilbar sind. Vermeidet man mit $\mathfrak{p}_0$ noch endlich viele Diskriminantenteiler, so muß $d_{\bar{P}}(S_i;\, a_1, a_2)$ selbst durch $\mathfrak{p}_0$ teilbar sein.

Für fast alle Primideale $\mathfrak{p}_0$ der Hauptklasse $H_0^*(n\,\mathfrak{o})$ gilt

$$g^p(S_i;\, a_1, a_2) \equiv g\left(S_i;\, \bar{P}\binom{a_1}{a_2}\right) \pmod{\mathfrak{p}_0}.$$

Schließlich bleibt noch der Zusammenhang von $g(S_i;\, a_1, a_2)$ und $g\left(S_i,\, \bar{P}\binom{a_1}{a_2}\right)$ zu ermitteln. Wir behaupten: $g\left(S_i;\, \bar{P}\binom{a_1}{a_2}\right) = g(S_i;\, a_1, a_2)$. Dabei wird wesentlich benutzt werden, daß $\mathfrak{p}_0 \equiv 1\,[n\,\mathfrak{o}]$. Bisher kamen wir mit $p \equiv 1\,(n)$ aus.

$\bar{P}\binom{a_1}{a_2}$ liefert eine Basis des Moduls $\mathfrak{p}'\mathfrak{a}$. $\mathfrak{p}$ liegt in $H^*(n\,\mathfrak{o})$ d. h. $\mathfrak{p} = \alpha\,\mathfrak{o}$ mit $\alpha \equiv 1\,[\mathrm{mod}\, n\,\mathfrak{o}]$. Da aber $\mathfrak{p}$ ganz ist und $\alpha \subset \mathfrak{s}$, so liegt α in $\mathfrak{o}$. Die Kongruenz besagt weiter, daß dann $\alpha - 1 \subset n\,\mathfrak{o}$. Es muß eine Modulsubstitution T so geben, daß $\bar{P}\binom{a_1}{a_2} = T\binom{\alpha a_1}{\alpha a_2}$. Sei

[4]) Siehe § 3 der oben genannten Arbeit von Hasse.

$\overline{P} = \begin{pmatrix} a, & b \\ 0, & d \end{pmatrix}$ mit $a = d = 1 \pmod{n}$ und $b = 0 \pmod{n}$. Da a, b, d ganze rationale Zahlen sind, so gilt die Kongruenz auch modulo $n\mathfrak{o}$. Setzt man $T = \begin{pmatrix} x, & y \\ u, & v \end{pmatrix}$, so soll

$$(a - \alpha' x) a_1 + (b - \alpha' y) a_2 = 0; \qquad (d - \alpha' v)\cdot a_2 - \alpha' u \cdot a_1 = 0$$

sein. Dann gilt aber wegen der Kongruenzen mod $n\mathfrak{o}$

$$(1-x) a_1 - y a_2 \subset n\mathfrak{o}, \qquad ((1-x) a_1 - y a_2)\cdot \mathfrak{o} = n \cdot \mathfrak{b},$$

wo $\mathfrak{b}$ ein ganzer zu $\mathfrak{o}$ gehöriger Modul ist, denn wir dürfen wegen der Nullhomogenität von $f(w_1, w_2)$ annehmen, daß $\mathfrak{a}$ ein ganzer, regulärer und zu $n\mathfrak{o}$ primer Modul ist, da in der Klasse $\bar{\mathfrak{k}}$ von $\mathfrak{a}$ sicherlich solche Moduln liegen. Die Zahl liegt andererseits in $\mathfrak{a}$,

$$((1-x) a_1 - y a_2)\mathfrak{o} = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c},$$

da $\mathfrak{a} + n\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}\cdot n \subset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{a} + \mathfrak{b} n = \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$, d. h.

$$((1-x) a_1 - y a_2)\mathfrak{o} = \mathfrak{a}\cdot n \cdot \mathfrak{b}, \qquad \left(\frac{1-x}{n} a_1 - \frac{y}{n}\cdot a_2\right) \subset \mathfrak{a}.$$

Dann müssen aber $\frac{1-x}{n}$ und $\frac{y}{n}$ ganze rationale Zahlen sein. Ebenso zeigt man, daß $u \equiv 0 \pmod{n}$ und $v \equiv 1 \pmod{n}$ ist. Damit ist die Kongruenz

$$f^{p}(a_1, a_2) \equiv f(a_1, a_2) \pmod{\mathfrak{p}_0}$$

vollständig bewiesen.

Satz III. *Ist $f(w_1, w_2)$ eine zur Hauptkongruenzgruppe n-ter Stufe gehörige ganze Modulfunktion, die in allen Spitzen Entwicklungen nach $q^{\frac{1}{n}}$ mit Koeffizienten aus dem n-ten Kreiskörper besitzt, so liegen die Werte, die $f(w_1, w_2)$ für singuläre Moduln der Ordnung $\mathfrak{o}$ des Körpers k annimmt, in dem Klassenkörper $K\, n\mathfrak{o}$ über k.*

Im vorigen Abschnitt haben wir gezeigt, wie man diese Klassenkörper mit Werten, die die τ- und j-Funktionen für die Moduln der Ordnung annehmen, konstruieren kann.

Der Satz gestattet noch eine Aussage über ganze Modulformen $g(w_1, w_2)$ n-ter Stufe, die in allen Spitzen q-Entwicklungen haben, deren Koeffizienten bis auf den Faktor $\left(\frac{2\pi i}{w_2}\right)^S$ in $R(\zeta_n)$ liegen. Eine derartige Form nullhomogenisiere man mit $\Delta_{12}^S(w_1, w_2)$[5]), wenn $-S$ die Dimension von $g(w_1, w_2)$ ist. $f(w_1, w_2) = \frac{g(w_1, w_2)}{\Delta_{12}^S(w_1, w_2)}$ ist dann eine ganze

[5]) Unter Δ_{12} wird diejenige 12-te Wurzel aus Δ verstanden, die im Punkte $i\infty$ durch die unten angegebene q-Entwicklung ausgezeichnet ist.

Modulfunktion der Stufe $a \cdot n$, dabei ist $a \cdot n$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $\frac{12}{(12, S)} = a_1$ und n, denn Δ_{12}^{S} nimmt bei einer Modulsubstitution $T = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ den Faktor

$$\chi(T) = e^{\frac{2\pi i}{12} S \{([\alpha + \beta + 3]\gamma + 6)\gamma^2 + [(\beta - \gamma + 3)\delta - 3](1 - \gamma^2)\}}$$

an, das ist eine a_1-te Einheitswurzel und es ist $\chi(T) = 1$, wenn $T \equiv E \pmod{a_1}$. Da aber

$$\Delta_{12}(w_1, w_2) = \left(\frac{2\pi i}{w_2}\right) q^{\frac{1}{12}} \prod^{\infty} (1 - q^{\nu})^2$$

ist, so sieht man, daß $f(w_1, w_2)$ in allen Spitzen q-Entwicklungen mit Koeffizienten aus $R\zeta_{an}$ hat. $g(w_1, w_2)$ nimmt also für singuläre Moduln der Ordnung $\mathfrak{o}$ Werte an, die bis auf den Faktor $\Delta_{12}^{S}(w_1, w_2)$ in $K n a \mathfrak{o}$ liegen. Der transzendente Bestandteil von $g(w_1, w_2)$ steckt also schon in $\Delta_{12}^{S}(w_1, w_2)$.

Den Faktor a kann man durch passende Nullhomogenisierung noch herunterdrücken. Im Fall gerader Dimension wird man zweckmäßig eine Potenz von $\frac{g_2 \cdot g_3}{\Delta}$ verwenden, allerdings muß man dann die Hauptordnungen von $R(\sqrt{-1})$ und $R(\sqrt{-3})$ ausschließen.

Im Falle ungerader Dimension zerlege man s in $s_1 + s_2$, wo $s_2 \equiv 0\,(2)$, und s_1 einen möglichst großen gemeinsamen Teiler mit 12 hat.

Weiter läßt sich zeigen, daß der Kroneckersche Jugendtraum mit einer festen Modulfunktion n-ter Stufe, die in allen Spitzen q-Entwicklungen mit Koeffizienten aus $R(\zeta_n)$ besitzt, sich nicht verwirklichen läßt, denn dann müßte sich ein Klassenkörper K über einem imaginärquadratischen Körper k erst recht in einen Körper Ω einbetten lassen, der durch Komposition von Körpern $K n \mathfrak{o}$, wo $\mathfrak{o}$ Ordnungen des Körpers k durchläuft, und Adjunktion von Einheitswurzeln entsteht. Ein Kompositum von Körpern $K n \mathfrak{o}$ läßt sich aber immer in einen Körper $K n \mathfrak{o}_1$ einbetten. Man nehme für die Invariante Q_1 von $\mathfrak{o}_1$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der bei der Komposition verwandten Ordnungsinvarianten. Ist Q/Q_1, so folgt aus $\alpha \equiv 1\,[n\,\mathfrak{o}_1]$ auch $\alpha \equiv 1\,[n\,\mathfrak{o}]$, wenn $\mathfrak{o}$ die Ordnung der Invariante Q ist. Dasselbe gilt auch für die Einheitswurzeln. Es genügt also zu zeigen, daß sich nicht jeder Klassenkörper K über k in einen Körper Ω einbetten läßt, der durch Komposition von $K n \mathfrak{o}$ und ζ_Q entsteht. Wir nehmen für K den zu $\alpha \equiv 1 \pmod{m}$ gehörigen Strahlklassenkörper über k, wo $(n, m) = 1$. Dann gilt nicht stets $K \subset K n \mathfrak{o}(\zeta_Q)$. Nach den oben gemachten Bemerkungen kann man

annehmen, daß $m \mid Q$. Die Körper $k = R(\sqrt{-1})$, $R(\sqrt{-3})$ schließen wir aus. Aus den Kongruenzen

$$\alpha \equiv 1 \, [\mathrm{mod}\, n\, \mathfrak{o}], \quad \alpha^2 \equiv 1 \, (\mathrm{mod}\, Q)$$

folgt dann nicht stets $\alpha \equiv 1 \, (\mathrm{mod}\, m)$, wie man auch Q wählt. Um das Nichtbestehen zu zeigen, kann man sich auf rationale $\alpha = r$ beschränken. Für solche α besagen die Kongruenzen aber nur

$$r \equiv 1 \, (\mathrm{mod}\, n), \quad r^2 \equiv 1 \, (\mathrm{mod}\, Q),$$

denn wegen $r \equiv 1 \, (\mathrm{mod}\, Q)$ ist schon r zu Q prim, liegt also in $\mathfrak{s}$. $r - 1$ hat einen durch n teilbaren Zähler. Es hat dann, da es sich um rationale Zahlen handelt, auch $(r-1)\,\mathfrak{o}$ einen durch $n\,\mathfrak{o}$ teilbaren Zähler, d. h. $r \equiv 1 \, [n\, \mathfrak{o}]$. Man zeigt dann wie üblich, daß r nicht stets kongruent $1 \, (\mathrm{mod}\, m)$ zu sein braucht, wie man auch Q wählt.

Satz IV. *Es gibt keine ganze Modulfunktion $f(w_1, w_2)$ n-ter Stufe, die in allen Spitzen q-Entwicklungen mit Koeffizienten aus dem n-ten Kreiskörper hat, der Art, daß man jeden Klassenkörper K über einem imaginärquadratischen Körper k in einen Körper Ω einbetten kann, der aus k durch Adjunktion von zu k gehörigen singulären f-Werten und Einheitswurzeln entsteht.*

Genau so sieht man, daß auch eine endliche Anzahl von Modulfunktionen der oben besprochenen Art zur Konstruktion nicht ausreicht.

Hamburg, im Januar 1935.

(Eingegangen am 12. 1. 1935.)

Die Darstellung der inhomogenen Modulargruppe mod q^n durch die ganzen Modulformen gerader Dimension.

Von

Heinz Spies in Hamburg*).

Herr Hecke hat in zwei Arbeiten[1]) das Verhalten der Integranden erster Gattung in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen von Primzahlstufe q bei Anwendung von beliebigen Modulsubstitutionen untersucht. Die Ergebnisse sind von Herrn Feldmann[2]) auf Modulformen beliebiger ganzzahliger Dimension übertragen worden. Inzwischen wurden gleichzeitig von den Herren Praetorius und Rohrbach[3]) die einfachen Charaktere der Modulargruppen mod q^2 berechnet.

In der vorliegenden Arbeit wird für die Darstellung $\mathfrak{S}_{2k}$ der inhomogenen Modulargruppe mod q^n durch die ganzen Modulformen einer geraden Dimension $-2k$ der Charakter berechnet. Das geschieht — anders als in den drei zuerst genannten Arbeiten — ohne Zuhilfenahme der einfachen Charaktere, die für $n \geqq 3$ noch unbekannt sind, auf Grund folgender Überlegung:

Der Charakter ist eine Funktion der Klassen konjugierter Elemente und sein Wert für ein Element die Summe der charakteristischen Wurzeln der entsprechenden Darstellungsmatrix. Es genügt daher zur Berechnung,

---

*) Diese Arbeit ist von der math. naturw. Fakultät der Hamburgischen Universität als Dissertation angenommen worden.

[1]) E. Hecke, Über ein Fundamentalproblem aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Hamb. Abh. **6** (1928), S. 235—257 und Über das Verhalten der Integrale erster Gattung bei Abbildungen, insbesondere in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Hamb. Abh. **8** (1931), S. 271—281. — Für allgemeine algebraische Gebilde mit Transformationen in sich ist die Darstellung der Transformationsgruppe durch die Integrale erster Gattung des Gebildes zuerst von Hurwitz behandelt worden [Über algebraische Gebilde mit Transformationen in sich, Math. Annalen **41** (1893), S. 403—442 = Gesammelte Werke 1, S. 391—430]. Neuerdings sind darüber die folgenden beiden Arbeiten erschienen: C. Chevalley und A. Weil, Über das Verhalten der Integrale 1. Gattung bei Automorphismen des Funktionenkörpers, Hamb. Abh. **10** (1934), S. 358—361 und A. Weil, Über Matrizenringe auf Riemannschen Flächen und den Riemann-Rochschen Satz, ebenda **11** (1935).

[2]) H. Feldmann, Über das Verhalten der Modulfunktionen von Primzahlstufe bei beliebigen Modulsubstitutionen, Hamb. Abh. **8** (1931), S. 323—341.

[3]) H. W. Praetorius, Die Charaktere der Modulargruppen der Stufe q^2, Hamb. Abh. **9** (1933), S. 365—394, im folgenden zitiert mit P.; H. Rohrbach, Die Charaktere der binären Kongruenzgruppen mod p^2, Schriften d. Math. Sem. d. Univ. Berlin **1**, Heft 2 (1932), im folgenden zitiert mit R.

aus jeder Klasse konjugierter Elemente einen Vertreter A der Ordnung g herauszugreifen und für jede g-te Einheitswurzel ω die Vielfachheit zu bestimmen, mit der sie unter den charakteristischen Wurzeln der Darstellungsmatrix, die ja g-te Einheitswurzeln sind, vorkommt. Diese Vielfachheit ist nun identisch mit der Anzahl linear unabhängiger ganzer Modulformen, die bei Anwendung von A den Faktor ω aufnehmen. Existiert überhaupt eine solche Form, so liefert der Riemann-Rochsche Satz die genaue Anzahl; die Existenzfrage muß in jedem Fall geklärt werden.

Bei der Anwendung des Riemann-Rochschen Satzes treten die Geschlechter gewisser Untergruppen $\mathfrak{U}$ der Modulgruppe mit abelscher Faktorgruppe $\mathfrak{U}/\Gamma(q^n)$ auf. Die Berechnung derartiger Geschlechter, die bisher sehr umständlich war, wird in dem vorbereitenden § 1 auf einfachere Art vorgenommen. In § 1 wird ferner ein volles Vertretersystem für die Klassen konjugierter Elemente aufgestellt.

Die Abzählung der charakteristischen Wurzeln erfolgt in § 2. Die Rechnung hat folgendes Ergebnis: Die Werte des Charakters von $\mathfrak{S}_{2k}$ sind im allgemeinen rationale Zahlen. Nur im Fall $q \equiv 3\,(4)$ ergeben sich für die Charaktere der parabolischen Substitutionen, also für die Konjugierten von $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und ihre Potenzen, Zahlen des Körpers $K(\sqrt{-q})$, in deren Imaginärteil als Faktor von $\sqrt{-q}$ ein Vielfaches der Klassenzahl von $K(\sqrt{-q})$ auftritt. Die Klassenzahl kommt allein durch die Dirichletsche Klassenzahlformel hinein bei der zur Anwendung des Riemann-Rochschen Satzes nötigen Bestimmung der Nullstellenanzahl gewisser ganzer Modulformen, gemessen in den zu einer Obergruppe von $\Gamma(q^n)$ gehörigen Ortsuniformisierenden.

Durch den Charakter ist im Sinne der Darstellungstheorie, also bis auf äquivalente Darstellungen, die Darstellung $\mathfrak{S}_{2k}$ vollkommen bestimmt; eine Zerlegung in irreduzible Bestandteile ist also möglich, sobald die einfachen Charaktere bekannt sind.

Ohne Kenntnis der einfachen Charaktere ergeben sich für die Zerlegung die beiden Tatsachen:

Irreduzible Darstellungen treten in $\mathfrak{S}_{2k}$ gleich oft auf, wenn ihre Charaktere konjugiert sind in bezug auf $K(\sqrt{-q})$, und

Die Differenz der Multiplizitäten, mit denen zwei irreduzible Darstellungen mit konjugiert komplexen Charakteren in $\mathfrak{S}_{2k}$ vorkommen, ist ein ganzzahliges Vielfaches der Klassenzahl von $K(\sqrt{-q})$.

Für die Stufe q^2 wird in § 3 die Zerlegung durchgeführt.

Herrn Hecke bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für wertvolle Ratschläge zu Dank verpflichtet.

§ 1.

Vorbereitendes.

A. Die Berechnung der Geschlechter gewisser Untergruppen von $\Gamma(1)$.

Es sei $\Gamma(1)$ die inhomogene Modulgruppe, $\Gamma(m)$ die Hauptkongruenzuntergruppe mod m; dann ist $\mathfrak{M}(m) = \Gamma(1)/\Gamma(m)$ die Modulargruppe mod m von der Ordnung $\mu = \mu(m)$. Es sei ferner $\mathfrak{U}$ eine Untergruppe von $\Gamma(1)$, die für irgendein m Obergruppe von $\Gamma(m)$ ist. Die Faktorgruppe $\mathfrak{U}_m = \mathfrak{U}/\Gamma(m)$, im Sinne der Isomorphie eine Untergruppe von $\mathfrak{M}(m)$, sei eine *abelsche* Gruppe der Ordnung g.

Das topologische Geschlecht (des Fundamentalbereichs) von $\mathfrak{U}$ ist nach der Eulerschen Polyederformel

$$p = 1 + \frac{\mu'}{12} - \frac{\nu_3}{3} - \frac{\nu_1}{4} - \frac{\nu_0}{2},$$

wobei $\mu' = \frac{\mu}{g}$ der Index von $\mathfrak{U}$ in $\Gamma(1)$,

ν_0 die Anzahl der inäquivalenten rationalen Fixpunkte von $\mathfrak{U}$,

ν_1 die Anzahl der inäquivalenten Fixpunkte von $\mathfrak{U}$ aus dem Körper $K(\sqrt{-1})$,

ν_3 die Anzahl der inäquivalenten Fixpunkte von $\mathfrak{U}$ aus dem Körper $K(\sqrt{-3})$

ist.

Die Berechnung von ν_1 geschieht in der folgenden Weise: Es gibt dann und nur dann für $\mathfrak{U}$ einen Fixpunkt aus $K(\sqrt{-1})$, wenn es in $\mathfrak{U}$ eine mit $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ konjugierte Substitution gibt. Die Anzahl aller inäquivalenten Fixpunkte dieser Art ist die Anzahl aller mod $\mathfrak{U}$ verschiedenen Modulsubstitutionen M, für die MTM^{-1} zu $\mathfrak{U}$ gehört. Diese Substitutionen müssen insbesondere mod $\Gamma(m)$ verschieden sein; die Abzählung ist daher in $\mathfrak{M}(m)$ durchzuführen. Sind $A_1, A_2, \ldots, A_r$ alle mit T konjugierten Elemente von $\mathfrak{U}_m$, so haben wir die Anzahl der mod $\mathfrak{U}_m$ verschiedenen Substitutionen zu bestimmen, für die

$$(1) \qquad MTM^{-1} \equiv A_i \pmod{m}$$

bei festem i ist, und die Summe der Ergebnisse für alle i zu bilden.

Ist M eine feste Lösung von (1) und durchläuft L alle mod $\mathfrak{U}_m$ verschiedenen Lösungen von

$$(2) \qquad LA_iL^{-1} \equiv A_i \pmod{m},$$

so durchläuft offenbar LM alle und nur die mod $\mathfrak{U}_m$ verschiedenen Lösungen von (1).

Die Kongruenz (2) wird von den Elementen des Normalisators von A_i und nur von diesen erfüllt, und da $\mathfrak{U}_m$ als abelsche Gruppe dem Normalisator jedes ihrer Elemente als Untergruppe angehört, so ist die Anzahl der mod $\mathfrak{U}_m$ verschiedenen Lösungen von (2) gleich $\frac{\mu}{g \cdot J(A_i)}$, wo $J(A)$ den Index des Normalisators von A in $\mathfrak{M}(m)$ bedeuten soll. Nach einem bekannten Satz der Gruppentheorie ist $J(A)$ die Anzahl der mit A konjugierten Elemente von $\mathfrak{M}(m)$. Nach Voraussetzung ist aber A_i mit T konjugiert, also $J(A_i) = J(T)$ und damit

$$\nu_1 = \frac{\mu \cdot r}{g \cdot J(T)}. \tag{3}$$

Analog ergibt sich

$$\nu_2 = \frac{\mu \cdot s}{g \cdot J(W)}, \tag{4}$$

wo $W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und s die Anzahl der mit W konjugierten Elemente von $\mathfrak{U}_m$ ist.

Es sei $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ist dann $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine Modulsubstitution, so heiße $\frac{a}{c}$ rationale Spitze (des Fundamentalbereichs) von $\mathfrak{U}$ von der Breite β, wenn β die kleinste positive Zahl ist, für die $M P^{\beta} M^{-1}$ zu $\mathfrak{U}$ gehört. Sind $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ $(\beta_i < \beta_{i+1})$ alle für $\mathfrak{U}$ möglichen Breiten, so gilt stets

$$\beta_i \mid \beta_{i+1}; \qquad \beta_n \mid m. \tag{5}$$

Je β_i mod $\mathfrak{U}$ verschiedene Substitutionen M liefern dieselbe Spitze der Breite β_i; daher ist die Anzahl aller Spitzen der Breite β_i der β_i-te Teil der Anzahl derjenigen mod $\mathfrak{U}$ verschiedenen Substitutionen M, für die

$$M P^{\beta_i} M^{-1} \subset \mathfrak{U}, \qquad M P^{\beta'} M^{-1} \not\subset \mathfrak{U} \quad \text{für ein positives } \beta' < \beta_i.$$

Die zweite Bedingung ist für $i = 1$ inhaltlos, für $i > 1$ ist sie wegen (5) gleichbedeutend mit

$$M P^{\beta_{i-1}} M^{-1} \not\subset \mathfrak{U}.$$

Die Abzählung ist wieder in $\mathfrak{M}(m)$ zu erledigen, da die Substitutionen insbesondere mod $\Gamma(m)$ verschieden sein müssen.

Es seien $C_1^{(\beta_i)}, C_2^{(\beta_i)}, \ldots, C_{\nu(\beta_i)}^{(\beta_i)}$ alle mit P^{β_i} konjugierten Elemente von $\mathfrak{U}_m$, ferner seien $D_1^{(\nu)}, D_2^{(\nu)}, \ldots, D_{\gamma_\nu(\beta_i)}^{(\nu)}$ alle Elemente von $\mathfrak{U}_m$, deren $\frac{\beta_i}{\beta_{i-1}}$-te Potenz $C_\nu^{(\beta_i)}$ ist und die mit $P^{\beta_{i-1}}$ konjugiert sind, $\gamma_\nu(\beta_1) = 0$. Dann ist die Anzahl der mod $\mathfrak{U}_m$ verschiedenen Lösungen von

$$M P^{\beta_i} M^{-1} \equiv C_\nu^{(\beta_i)} \pmod{m}. \tag{6}$$

die gleichzeitig keiner der Kongruenzen

(7) $$M P^{\beta_i - 1} M^{-1} \equiv D_k^{(\nu)} \pmod{m}, \quad k = 1, 2, \ldots, \gamma_\nu(\beta_i),$$

genügen, das β_i-fache der Anzahl $H(C_\nu^{(\beta_i)})$ derjenigen Spitzen der Breite β_i, die Fixpunkte von Substitutionen $\equiv C_\nu^{(\beta_i)} \pmod{m}$ sind.

Die Anzahl der mod $\mathfrak{U}_m$ verschiedenen Lösungen von (6) ist $\frac{\mu}{g \cdot J(P^{\beta_i})}$, davon sind $\frac{\mu \gamma_\nu(\beta_i)}{g \cdot J(P^{\beta_i - 1})}$ gleichzeitig Lösungen von (7); es ist also

(8) $$H(C_\nu^{(\beta_i)}) = \frac{1}{\beta_i}\left(\frac{\mu}{g \cdot J(P^{\beta_i})} - \frac{\mu \gamma_\nu(\beta_i)}{g \cdot J(P^{\beta_i - 1})}\right)$$

und

(9) $$\nu_0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{v(\beta_i)} \frac{v(\beta_i)}{\beta_i}\left(\frac{\mu}{g \cdot J(P^{\beta_i})} - \frac{\mu \gamma_\nu(\beta_i)}{g \cdot J(P^{\beta_i - 1})}\right).$$

B. Die Einteilung von $\mathfrak{M}(q^n)$ in Klassen konjugierter Elemente[4]).

Es sei von nun an $m = q^n$, q eine Primzahl > 3.

Die Gruppe $\mathfrak{M}(q^n)$ der Ordnung $\mu = q^{3n-2}\frac{q^2-1}{2}$ enthält eine einzige Folge von ineinander geschachtelten Normalteilern (Hauptreihe):

$$\mathfrak{M}(q^n) \supset \mathfrak{N}_1 \supset \mathfrak{N}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{N}_{n-1} \supset \mathfrak{N}_n = E,$$

wo die Elemente von $\mathfrak{N}_i$ die Form haben:

$$N = E + q^i \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

N gehört nicht zu $\mathfrak{N}_{i+1}$, wenn $(a, b, c, d, q) = 1$.

Man setze $a d - b c = -\pi(N)$.

Für die Zugehörigkeit zweier Elemente von $\mathfrak{M}(q^n)$ zu derselben Klasse konjugierter Elemente gelten die Kriterien:

a) Zwei Substitutionen $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ und $M_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}$, die nicht zu $\mathfrak{N}_1$ gehören und die die Spuren $2\varkappa(M)$, $2\varkappa(M_1)$ haben, sind konjugiert, wenn $\varkappa(M) \equiv \varkappa(M_1) \pmod{q^n}$ und dabei $\varkappa(M) \not\equiv 1 \pmod{q}$ ist. Ist dagegen $\varkappa(M) \equiv 1 \pmod{q}$, so ist außer $\varkappa(M) \equiv \varkappa(M_1)$ noch erforderlich, daß eine der Größen $\left(\frac{\beta}{q}\right)$, $\left(\frac{-\gamma}{q}\right)$ denselben Wert ergibt wie $\left(\frac{\beta_1}{q}\right)$, $\left(\frac{-\gamma_1}{q}\right)$.

b) Zwei Substitutionen aus $\mathfrak{N}_i - \mathfrak{N}_{i+1}$, $N = E + q^i\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $N_1 = E + q^i\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, sind konjugiert, wenn $\pi(N) \equiv \pi(N_1) \pmod{q^{n-i}}$

---

[4]) Vgl. hierzu P., S. 366—371; R., S. 35—50.

und dabei $\pi(N) \not\equiv 0 \pmod q$ ist. Ist dagegen $\pi(N) \equiv 0 \pmod q$, so muß außerdem noch eine der Größen $\left(\frac{b}{q}\right)$, $\left(\frac{-c}{q}\right)$ denselben Wert ergeben wie $\left(\frac{b_1}{q}\right)$ oder, falls $b_1 \equiv 0 \pmod q$, wie $\left(\frac{-c_1}{q}\right)$.

Es gibt nun in $\mathfrak{M}(q^n)$ ein Element R der Ordnung $q^{n-1}\frac{q-1}{2}$ und ein Element S der Ordnung $q^{n-1}\frac{q+1}{2}$. Die Potenzen dieser Elemente sind Vertreter für alle Klassen, für die $\varkappa \not\equiv 1 \pmod q$ bzw. $\pi \not\equiv 0 \pmod q$ ist, und zwar charakterisieren diejenigen Potenzen R^a (S^b), für die $a \not\equiv 0 \left(\bmod \frac{q-1}{2}\right)$ $\left(b \not\equiv 0 \left(\bmod \frac{q+1}{2}\right)\right)$ ist, Klassen von Elementen, die nicht zu $\mathfrak{N}_1$ gehören. Die Potenzen R^a (S^b) mit $a = \frac{q-1}{2} q^{i-1} a_i$, $(a_i, q) = 1$ $\left(b = \frac{q+1}{2} q^{i-1} b_i, (b_i, q) = 1\right)$ ergeben Vertreter für Klassen von $\mathfrak{N}_i - \mathfrak{N}_{i+1}$. R^a und R^{-a} repräsentieren dabei stets dieselbe Klasse, ebenso S^b und S^{-b}.

Für einige von diesen Klassen geben wir noch die Anzahlen $J(A)$ der Konjugierten von A an:

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
J(R^a) &= q^{2n-1}(q+1),\\
&\qquad \text{falls } a \not\equiv 0 \left(\bmod \tfrac{q-1}{2}\right) \text{ und } a \neq q^{n-1}\tfrac{q-1}{4},\\
J\left(R^{q^{n-1}\frac{q-1}{4}}\right) &= q^{2n-1}\frac{q+1}{2},\\
&\qquad \text{falls } q \equiv 1 \pmod 4 \; (\varkappa \equiv 0),\\
J(S^b) &= q^{2n-1}(q-1),\\
&\qquad \text{falls } b \not\equiv 0 \left(\bmod \tfrac{q+1}{2}\right) \text{ und } b \neq q^{n-1}\tfrac{q+1}{4},\\
J\left(S^{q^{n-1}\frac{q+1}{4}}\right) &= q^{2n-1}\frac{q-1}{2},\\
&\qquad \text{falls } q \equiv 3 \pmod 4 \; (\varkappa \equiv 0).
\end{aligned}
$$

Es fehlen noch Vertreter der $2q^{n-1}$ Klassen mit je $q^{2n-2}\frac{q^2-1}{2}$ Elementen aus $\mathfrak{M}(q^n) - \mathfrak{N}_1$, für die $\varkappa \equiv 1\,(q)$ ist, und der $2q^{i-1}$ Klassen mit je $q^{2i-2}\frac{q^2-1}{2}$ Elementen aus $\mathfrak{N}_{n-i} - \mathfrak{N}_{n-i+1}$, für die $\pi \equiv 0$ ist.

Vertreter für die Klassen der ersten Art sind offenbar die Elemente

$$A_\lambda^{(l)} = \begin{pmatrix} 2+\lambda q^l & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B_\lambda^{(l)} = \begin{pmatrix} 2+\lambda q^l & \nu \\ -\nu^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$\lambda \bmod q^{n-l}$; $(\lambda, q) = 1$; $l = 1, 2, \ldots, n$; ν irgendein quadratischer Nichtrest mod q; $\nu\nu^{-1} \equiv 1 \pmod q$.

An Stelle von $A_1^{(n)}$, $B_1^{(n)}$ werden auch die Elemente $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ als Vertreter ihrer Klassen gewählt werden.

Es sei

$$a_m = \sum_{\alpha=1}^{m} \binom{m+\alpha}{2\alpha-1} (\lambda q^l)^{\alpha-1} = m+1+\binom{m+2}{3}\lambda q^l + \dots$$

$$a_1 = 2+\lambda q^l, \quad a_0 = 1, \quad a_{-1} = 0.$$

Dann ist

$$(11) \quad A_\lambda^{(l)m} = \begin{pmatrix} a_m & a_{m-1} \\ -a_{m-1} & -a_{m-2} \end{pmatrix}; \qquad B_\lambda^{(l)m} = \begin{pmatrix} a_m & \nu a_{m-1} \\ -\nu^{-1} a_{m-1} & -a_{m-2} \end{pmatrix}.$$

Die Folge a_m erfüllt nämlich die Gleichung

$$(12) \qquad a_{m+1} = a_m a_1 - a_{m-1} \quad (m \geqq 0),$$

wie sich unmittelbar aus der Beziehung

$$\binom{m+\alpha+1}{2\alpha-1} = 2\binom{m+\alpha}{2\alpha-1} + \binom{m+\alpha-1}{2\alpha-3} - \binom{m+\alpha-1}{2\alpha-1}$$

ergibt. Aus (12) folgt die Behauptung (11) durch Induktion.

Ist $m = q^i$, so sind die Binomialkoeffizienten

$$\binom{m+\alpha}{2\alpha-1}, \ \binom{m-1+\alpha}{2\alpha-1}, \ \binom{m-2+\alpha}{2\alpha-1}$$

für $\alpha = 2$ durch q^i, für $\alpha = 3$ durch q^{i-1} teilbar, wie man durch Ausrechnen bestätigt. Für $\alpha \geqq 4$ sind sie durch $q^{i-\alpha+3}$ teilbar; denn der Zähler enthält den Faktor q^i, und es ist $2\alpha - 1 \leqq q^{\alpha-3}$. Für $q = 5$, $\alpha = 4$ gilt allerdings diese Ungleichung nicht, aber auch hier rechnet man die geforderte Teilbarkeit leicht nach.

Es ist also

$$A_\lambda^{(l)q^i} \equiv \begin{pmatrix} 1+q^i & q^i \\ -q^i & 1-q^i \end{pmatrix}, \quad B_\lambda^{(l)q^i} \equiv \begin{pmatrix} 1+q^i & \nu q^i \\ -q^i \nu^{-1} & 1-q^i \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\, q^{i+1}),$$

d. h.: Die q^i-ten Potenzen der Substitutionen $A_\lambda^{(l)}$, $B_\lambda^{(l)}$ liegen in $\mathfrak{N}_i$, aber nicht in $\mathfrak{N}_{i+1}$, und die Ordnung aller dieser Elemente innerhalb $\mathfrak{M}(q^n)$ ist q^n.

Wir wollen noch untersuchen, welche von diesen q^i-ten Potenzen untereinander konjugiert sind. Darüber gibt die Determinante

$$-\pi(A_\lambda^{(l)q^i}) = -\pi(B_\lambda^{(l)q^i}) = -\frac{1}{q^{2i}}(a_{q^i} - a_{q^i-2} - 2);$$

$$-\pi(P^{q^i}) = -\pi(Q^{q^i}) = 0$$

Aufschluß.

Es ist

$$a_m - a_{m-2} - 2 = \sum_{\alpha=2}^{m} \frac{m}{\alpha-1}\binom{m+\alpha-2}{2\alpha-3}(\lambda q^l)^{\alpha-1} = m^2 \lambda q^l + \ldots \quad (m \geqq 1).$$

Der Koeffizient von λ in der Summe ist für $m = q^i$ durch q^{2i+l}, der von λ^2 durch q^{2i+2l} teilbar, wie man wieder durch Ausrechnen bestätigt. Für $\alpha > 3$ folgt aus der eben behandelten Teilbarkeit der Binomialkoeffizienten die Teilbarkeit des Koeffizienten von $\lambda^{\alpha-1}$ durch q^{2i+2l}. Daher ist

$$\pi = \lambda q^l + q^{2l} \sum_{\alpha=2}^{m-1} c_\alpha^{(l)} \lambda^\alpha.$$

Damit zwei der betrachteten Substitutionen konjugiert sind, muß also

$$(13)\qquad \lambda_1 q^{l_1} + q^{2l_1} \sum_{\alpha=2}^{m-1} c_\alpha^{(l_1)} \lambda_1^\alpha \equiv \lambda_2 q^{l_2} + q^{2l_2} \sum_{\alpha=2}^{m-1} c_\alpha^{(l_2)} \lambda_2^{(\alpha)} \pmod{q^{n-i}}$$

sein. Diese Kongruenz ist stets erfüllt, wenn l_1 und $l_2 \geqq n - i$ sind. Alle Substitutionen $A_\lambda^{(l)q^i}$ fallen dann in dieselbe Klasse, und zwar ist dies wegen $\pi \equiv 0 \pmod{q^{n-i}}$ die von P^{q^i} bestimmte Klasse; alle Substitutionen $B_\lambda^{(l)q^i}$ faller ebenso in die von Q^{q^i} bestimmte Klasse, wenn $l \geqq n - i$ ist.

Für $l < n - i$ ist die Kongruenz (13) dann und nur dann erfüllt, venn $l_1 = l_2$ und $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \pmod{q^{n-i-l}}$ ist. Durchläuft also l alle Zahlen $1, 2, \ldots, n - i - 1$, so durchlaufen die Zahlen π alle Restklassen mod q^{n-i} mit $\pi \equiv 0 \pmod q$. Unter den Substitutionen $A_\lambda^{(l)q^i}$, $B_\lambda^{(l)q^i}$ kommen daher Vertreter für alle Klassen von $\mathfrak{N}_i - \mathfrak{N}_{i+1}$ mit $\pi \equiv 0\,(q)$, $\pi \not\equiv 0\,(q^{n-i})$ vor, und zwar repräsentieren alle $A_\lambda^{(l)q^i}$ und ebenso alle $B_\lambda^{(l)q^i}$ mit mod q^{n-i-l} kongruenten λ dieselbe Klasse.

Wie bereits auf S. 334 angegeben wurde, ist

$$(14)\qquad J(A_\lambda^{(l)q^i}) = J(B_\lambda^{(l)q^i}) = J(P^{q^i}) = J(Q^{q^i}) = q^{2(n-i-1)} \frac{q^2-1}{2} \quad (i < n).$$

Wir wollen jetzt die Ergebnisse des ersten Teiles dieses Paragraphen auf einige Obergruppen von $\Gamma(q^n)$ anwenden.

Es sei $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(A)$ die Gruppe aller Modulsubstitutionen

$$M \equiv A^m \pmod{q^n}, \qquad m = 1, 2, \ldots.$$

Die Gruppe $\mathfrak{U}_{q^n}$ ist dann die von A innerhalb $\mathfrak{M}(q^n)$ erzeugte zyklische Gruppe. Das Geschlecht von $\mathfrak{U}$ sei $p(A)$.

1. Es sei $A = R^{q^i \cdot t}$ oder $A = S^{q^i \cdot t}$, $t \mid \frac{q \mp 1}{2}$, $0 \leqq i \leqq n-1$, $g = q^{n-i-1} \frac{q \mp 1}{2t}$.

Wenn $\frac{q \mp 1}{2t} \not\equiv 0 \pmod 2$ ist, sind mit T keine Elemente von $\mathfrak{U}_{q^n}$ konjugiert; im andern Fall ist nur das Element $R^{q^{n-1}\frac{q-1}{4}}$ bzw. $S^{q^{n-1}\frac{q+1}{4}}$ mit T konjugiert, also nach (3) und (10)

$$\nu_1 = \begin{cases} 2q^l t, & \text{wenn } \frac{q \mp 1}{2t} \equiv 0 \pmod 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn $\frac{q \mp 1}{2t} \not\equiv 0 \pmod 3$ ist, sind mit W keine Elemente konjugiert, im anderen Fall sind es die Elemente $R^{q^{n-1}\frac{q-1}{6}}$ und $R^{q^{n-1}\frac{q-1}{3}}$ bzw. $S^{q^{n-1}\frac{q+1}{6}}$ und $S^{q^{n-1}\frac{q+1}{3}}$, also nach (4) und (10)

$$\nu_3 = \begin{cases} 2q^l t, & \text{wenn } \frac{q \mp 1}{2t} \equiv 0 \pmod 3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da mit P^β für $\beta < q^n$ keine Elemente von $\mathfrak{U}_{q^n}$ konjugiert sind, haben alle Spitzen die Breite q^n; es ist daher

$$\nu_0 = \frac{\mu}{g \cdot q^n} = q^{n+l-1}(q \pm 1) \cdot t.$$

Wir gebrauchen später nur die Geschlechter:

$$(15)\quad p(R) \text{ bzw. } p(S) = 1 + \frac{q^{2n-1}(q \pm 1)}{12} - \frac{1 \pm \varepsilon_3}{3} - \frac{1 \pm \varepsilon}{4} - \frac{q^{n-1}(q \pm 1)}{2}.$$

Dabei ist $\varepsilon = (-1)^{\frac{q-1}{2}}$ und $\varepsilon_3 = \left(\frac{-3}{q}\right)$.

2. Es sei $A = A_\lambda^{(l)}$. Mit T und W sind dann keine Elemente von $\mathfrak{U}$ konjugiert, d. h. $\nu_1 = \nu_3 = 0$. Da ferner mit P^β für $\beta < q^{n-l}$ keine Elemente konjugiert sind, kommen für die Breite der Spitzen nur die Werte $q^{n-l}, q^{n-l+1}, \ldots, q^n$ in Frage.

Mit P^{q^r} $(n - l \leq r \leq n)$ sind alle Elemente $A_\lambda^{(l)q^r \cdot \varrho}$ konjugiert, wo ϱ die quadratischen Reste mod q^{n-r} durchläuft, also

$$v(q^r) = \begin{cases} q^{n-r-1}\frac{q-1}{2} & \text{für } r < n, \\ 1 & \text{für } r = n. \end{cases}$$

Für die Elemente $D_k^{(\nu)}$ sind die Substitutionen $A_\lambda^{(l)q^{r-1}\varrho'}$ in (7) einzusetzen, ϱ' mod q^{n-r+1}, $\varrho' \equiv \varrho \pmod{q^{n-r}}$, also

$$\gamma_\nu(q^r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r = n - l, \\ q & \text{für } n - l < r < n, \\ \frac{q-1}{2} & \text{für } r = n. \end{cases}$$

Es gibt daher nach (8) und (14)

$$(16)\qquad \begin{array}{lllll} \text{für} & r < n - l & r = n - l & n - l < r < n & r = n \\ & 0 & q^{n-l} & q^{r-1}(q-1) & q^{n-1}\frac{q-1}{2} \end{array}$$

Spitzen der Breite q^r, die Fixpunkte von Substitutionen $\equiv A_1^{(l)\,q^r\cdot\varrho} \pmod{q^n}$ sind, und nach (9) ist

$$\nu_0 = q^{n-1}(q-1) + (l-1)\,q^{n-2}\frac{(q-1)^2}{2}.$$

Für $\mathfrak{U}(B_1^{(l)})$ ist dieselbe Rechnung zu machen, nur ist überall an Stelle von ϱ ein Nichtrest einzusetzen. Das ändert nichts am Resultat; es ist also

$$(17)\qquad p(A_1^{(l)}) = p(B_1^{(l)}) = 1 + \frac{q^{2n-2}(q^2-1)}{24} - q^{n-1}\frac{q-1}{2} - (l-1)\,q^{n-2}\frac{(q-1)^2}{4}.$$

§ 2.

Die Darstellung $\mathfrak{S}_{2k}(q^n)$.

Es sei

$$f_1(\tau), f_2(\tau), \ldots, f_N(\tau), \quad N = N(q^n) = (2k-1)\frac{q^{2n-2}(q^2-1)}{24} + \frac{q^{2n-2}(q^2-1)}{4}$$

ein volles System linear unabhängiger ganzer Modulformen der Dimension $-2k$ zur Stufe q^n. Ist dann $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine beliebige Modulsubstitution, so ist

$$\frac{f_\mu\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)}{(c\tau+d)^{2k}} = \sum_{\nu=1}^{N} A_{\mu\nu} f_\nu(\tau)$$

wieder eine ganze Modulform derselben Art und daher eine Linearkombination der $f_\nu(\tau)$. Die Matrizen $(A_{\mu\nu})$ bilden die Darstellung $\mathfrak{S}_{2k}(q^n)$ von $\mathfrak{M}(q^n)$.

Für die Charaktere $\chi(A)$ dieser Darstellung gilt der folgende Satz, der in dem vorliegenden Paragraphen bewiesen wird:

Alle reellen Charaktere von $\mathfrak{S}_{2k}$ sind rational, komplexe Charaktere gehören dem Körper $K(\sqrt{-q})$ an.

Daraus folgt unmittelbar:

Bei der Zerlegung von $\mathfrak{S}_{2k}$ in irreduzible Bestandteile treten irreduzible Darstellungen, deren Charaktere konjugiert in bezug auf $K(\sqrt{-q})$ sind, gleich oft auf.

Der Beweis verläuft folgendermaßen:

Es sei A ein Element der Ordnung g innerhalb $\mathfrak{M}(q^n)$. Die charakteristischen Wurzeln der Matrix $(A_{\mu\nu})$ sind dann g-te Einheitswurzeln. Der Charakter $\chi(A)$ ist rational, wenn algebraisch konjugierte Einheitswurzeln, also für jedes $t|g$ alle primitiven t-ten Einheitswurzeln, gleich oft als charakteristische Wurzeln auftreten. Da ein volles System primitiver Einheitswurzeln beim Potenzieren mit einer festen Zahl in volle Systeme primitiver Einheitswurzeln zerfällt, so sind dann auch die Charaktere $\chi(A^m)$ für alle m rational; denn die charakteristischen Wurzeln von $(A_{\mu\nu})_m$ sind ja die m-ten Potenzen der charakteristischen Wurzeln von $(A_{\mu\nu})$.

Treten bei einer Substitution nicht alle algebraisch konjugierten Einheitswurzeln gleich oft auf, so wird der Imaginärteil des Charakters berechnet.

Die Multiplizität $Z_t^{(q^n)}(A)$ einer bestimmten primitiven t-ten Einheitswurzel $\omega^{g/t}$ (ω eine primitive g-te Einheitswurzel) unter den charakteristischen Wurzeln von $(A_{\mu\nu})$ ist nun offenbar die Maximalzahl linear unabhängiger Formen $F_1(\tau), F_2(\tau), \ldots, F_z(\tau)$ mit der Eigenschaft

$$(18)\qquad \frac{F_j(A\,\tau)}{(c\,\tau+d)^{2k}} = \omega^{g/t} F_j(\tau).$$

Die Funktionen $1, \frac{F_2}{F_1}, \frac{F_3}{F_1}, \ldots, \frac{F_z}{F_1}$ sind Modulfunktionen zu der Untergruppe $\mathfrak{U}(A) \subset \Gamma(1)$. Ihre Pole sind höchstens die Nullstellen von $F_1(\tau)$. Die Maximalzahl linear unabhängiger Funktionen mit dieser Eigenschaft ist identisch mit der gesuchten Anzahl $Z_t(A)$, sofern überhaupt eine Form mit der Eigenschaft (18) existiert. Die Existenz solcher Formen wollen wir zunächst annehmen und nachträglich beweisen. (Den oberen Index q^n bei $Z_t^{(q^n)}(A)$ lassen wir in diesem Paragraphen, wo wir es nur mit Formen der Stufe q^n zu tun haben, weg.)

Die Anzahl z linear unabhängiger Funktionen zu $\mathfrak{U}$ mit höchstens m Polen ist nach dem Riemann-Rochschen Satz:

$$(19)\qquad z = m - p + 1, \quad \text{wenn} \quad m \geqq 2p - 2.$$

Dabei ist p das Geschlecht von $\mathfrak{U}$.

In unserem Fall ist m die Anzahl der Nullstellen von $F_1(\tau)$, gemessen in den zu $\mathfrak{U}$ gehörigen Ortsuniformisierenden, also $\frac{2\mu' k}{12}$, vermindert um die für alle $F_j(\tau)$ gleichen Bruchbestandteile der Nullstellenordnung in den elliptischen Ecken und parabolischen Spitzen des Fundamentalbereichs von $\mathfrak{U}$. Bruchbestandteile treten nur in Punkten auf, in denen die Ortsuniformisierenden für $\mathfrak{U}$ und $\Gamma(q^n)$ voneinander verschieden sind.

1. Es sei $A = R$ oder $A = S$, $g = q^{n-1}\frac{q \mp 1}{2}$, $\mu' = q^{2n-1}(q \pm 1)$. Da $\mathfrak{U}$ in diesem Fall nur Spitzen der Breite q^n hat, können Bruchbestand-

teile der Nullstellenordnung höchstens in den elliptischen Ecken auftreten.

Es sei G eine ganze Modulform erster Stufe der Dimension $-2k$. Für $k=1$ nehme man statt dessen etwa $\frac{g_2 g_3}{\Delta}$. In den elliptischen Ecken aus $K(\sqrt{-1})$ hat G bis auf eine ganze Zahl die Nullstellenordnung $\frac{k}{2}-\left[\frac{k}{2}\right]$, in den Ecken aus $K(\sqrt{-3})$ $\frac{2k}{3}-\left[\frac{2k}{3}\right]$. $\frac{F_j}{G}=\varphi(\tau)$ ist eine Funktion zu $\Gamma(q^n)$, die bei Anwendung von R bzw. S den Faktor $\omega^{g/t}$ aufnimmt.

Es sei jetzt $\omega^{q^{n-l-1}\frac{q\mp1}{2t}}$ eine primitive $q^l\cdot t$-te Einheitswurzel, $t\left|\frac{q\mp1}{2}\right.$. Wir untersuchen zunächst die Nullstellenordnung in den Ecken aus $K(\sqrt{-1})$. Ihre Anzahl ist $1\pm\varepsilon$. Der Fall $1\pm\varepsilon=0$ ist trivial; es sei also $1\pm\varepsilon=2$. Die Substitutionen, deren Fixpunkte die Ecken i_ν sind, seien $R_\nu\equiv R^{q^{n-1}\frac{q-1}{4}}$ bzw $S_\nu\equiv S^{q^{n-1}\frac{q+1}{4}}\pmod{q^n}$.

$\varphi(\tau)$ besitzt als Funktion zu $\Gamma(q^n)$ in i_ν eine Entwicklung

$$\varphi(\tau)=\Sigma\, a_m T_\nu^m,\quad T_\nu=\frac{\tau-i_\nu}{\tau-\bar{i}_\nu}. \tag{20}$$

In i_ν ist T_ν^2 Ortsuniformisierende für $\mathfrak{U}$. Bei Anwendung von R_ν bzw. S_ν nimmt die linke Seite von (20) den Faktor

$$\omega^{q^{n-l-1}\frac{q\mp1}{2}q^{n-1}\frac{q\mp1}{4}}=(-1)^{\frac{q\mp1}{2t}}$$

auf. T_ν ändert bei Anwendung von R_ν bzw. S_ν das Vorzeichen. In der Entwicklung (20) treten daher, falls $\frac{q\mp1}{2t}$ gerade ist, nur gerade, im anderen Fall nur ungerade Potenzen von T_ν auf. Im ersten Fall ist die Nullstellenordnung in T_ν^2 gemessen g', im anderen $g'+\frac{1}{2}$, wo g' eine ganze Zahl bedeutet. Berücksichtigt man die oben angegebene Nullstellenordnung von G, so ergibt sich für $F_j(\tau)$:

$$g''+\frac{1-(-1)^{\frac{q\mp1}{2t}}}{4}+\left(\frac{k}{2}-\left[\frac{k}{2}\right]\right).$$

Der Bruchbestandteil dieser Zahl ist, wie man leicht nachrechnet,

$$\frac{1\pm\varepsilon}{2}\,\frac{1-(-1)^{\frac{q\mp1}{2t}}}{4}+(1\pm\varepsilon)(-1)^{\frac{q\mp1}{2t}}\left(\frac{k}{2}-\left[\frac{k}{2}\right]\right),$$

wobei der Fall $1\pm\varepsilon=0$ mitberücksichtigt ist.

Die Anzahl der Ecken aus $K(\sqrt{-3})$ ist $1\pm\varepsilon_3$. Der Fall $1\pm\varepsilon_3=0$ ist trivial; es sei also $1\pm\varepsilon_3=2$. Die Ecken seien $\varrho_1=L_1(\varrho)$ und

$\varrho_2 = L_2(\varrho)$ mit $\varrho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Ortsuniformisierende für $\mathfrak{U}$ in ϱ_ν ist T_ν^3 mit $T_\nu = \frac{\tau - \varrho_\nu}{\tau - \bar{\varrho}_\nu}$. Bei Anwendung von $W_\nu' = L_\nu W L_\nu^{-1}$ auf τ ändert sich T_ν um den Faktor ϱ^2. Von den beiden Substitutionen W_ν' ist eine $\equiv W'' = R^{q^{n-1}\frac{q-1}{6}}$ bzw. $S^{q^{n-1}\frac{q+1}{6}}$ (mod q^n), die andere $\equiv W''^2$; denn wären etwa beide $\equiv W''$, so müßte $L_1 L_2^{-1} W'' \equiv W'' L_1 L_2^{-1}$ (mod q^n) sein, $L_1 L_2^{-1}$ also dem Normalisator von W'' angehören. Dieser stimmt aber, wie aus (10) hervorgeht, mit der von R bzw. S erzeugten zyklischen Gruppe überein; L_1 und L_2 wären also mod $\mathfrak{U}$ nicht verschieden, ϱ_1 und ϱ_2 äquivalente Fixpunkte.

$\varphi(\tau)$ besitzt in ϱ_ν eine Entwicklung

$$\varphi(\tau) = \Sigma\, b_m T_\nu^m. \tag{21}$$

Bei Anwendung von W_ν' nimmt die linke Seite von (21) für ein ν den Faktor $\omega^{q^{n-l-1}\frac{q\mp 1}{2t}q^{n-1}\frac{q\mp 1}{6}}$, für das andere das Quadrat dieses Faktors auf. Der Faktor, der auf der linken Seite aufgenommen wird, ist also

$$= \begin{cases} 1, \text{ wenn } \frac{q \mp 1}{2t} \equiv 0 \pmod 3 \\ \varrho \text{ in der einen Ecke, } \varrho^2 \text{ in der anderen sonst.} \end{cases}$$

Im ersten Fall können, da T_ν den Faktor ϱ^2 aufnimmt, auf der rechten Seite von (21) nur ganze Potenzen von T_ν^3 auftreten; im anderen Fall treten in der einen Ecke nur Exponenten $m \equiv 1\,(3)$, in der anderen nur Exponenten $m \equiv 2\,(3)$ auf. Berücksichtigen wir gleich noch die Nullstellen von G, so folgt daraus:

Die Nullstellenordnung von $F_j(\tau)$ ist

$$\text{in der einen Ecke: } g'' + \left(\frac{2k}{3} - \left[\frac{2k}{3}\right]\right) + \frac{1}{3}a\left(\frac{q\mp 1}{2}, t\right),$$

$$\text{in der anderen: } g'' + \left(\frac{2k}{3} - \left[\frac{2k}{3}\right]\right) + \frac{2}{3}a\left(\frac{q\mp 1}{2}, t\right),$$

wo

$$a = a(m, t) = \begin{cases} 0, \text{ falls } \frac{m}{t} \equiv 0 \pmod 3, \\ 1 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die Summe der Bruchbestandteile läßt sich, wenn wir den Fall $1 \pm \varepsilon_3 = 0$ noch mit berücksichtigen, in der Gestalt schreiben:

$$\frac{1 \pm \varepsilon_3}{2}\left(1 - a\left(\frac{q \mp 1}{2}, t\right)\right) + \frac{1 \pm \varepsilon_3}{2}\,\frac{3a-1}{2}\left(\frac{2k}{3} - \left[\frac{2k}{3}\right]\right).$$

Damit ist dann schließlich

$$m = 2kq^{2n-1}\frac{q\pm 1}{12} - (1\pm\varepsilon)(-1)^{\frac{q\mp 1}{2t}}\left(\frac{k}{2} - \left[\frac{k}{2}\right]\right)$$

$$- (1\pm\varepsilon_3)\frac{3a-1}{2}\left(\frac{2k}{3} - \left[\frac{2k}{3}\right]\right) - \frac{1-(-1)^{\frac{q\mp 1}{2t}}}{2}\,\frac{1\pm\varepsilon}{2} - (1-a)\frac{1\pm\varepsilon_3}{2}.$$

Nach (15) ist ferner

$$p-1=q^{2n-1}\frac{q\pm 1}{12}-\frac{1\pm\varepsilon}{4}-\frac{1\pm\varepsilon_3}{3}-\frac{q^{n-1}(q\pm 1)}{2}\leqq\frac{m}{2}.$$

Daraus ergibt sich nach (19)

$$(22)\quad Z_{q^i\cdot t}(R \text{ bzw. } S)=(2k-1)\left\{\frac{q^{2n-1}(q\pm 1)}{12}-\frac{1\pm\varepsilon}{2}\frac{(-1)^{\frac{q\mp 1}{2t}}}{2}-\frac{1\pm\varepsilon_3}{2}\frac{3a-1}{3}\right\}$$
$$+\frac{q^{n-1}(q\pm 1)}{2}+\left[\frac{k}{2}\right](1\pm\varepsilon)(-1)^{\frac{q\mp 1}{2t}}+\left[\frac{2k}{3}\right]\frac{1\pm\varepsilon_3}{2}(3a-1)$$

für jede primitive $q^i t$-te Einheitswurzel.

Diese Zahlen sind die richtigen Multiplizitäten der charakteristischen Wurzeln, wenn es zu jeder Einheitswurzel mindestens eine Form mit der Eigenschaft (18) gibt, außer für den Fall, wo auch die hier errechnete Zahl verschwindet. Gibt es eine solche Form nicht, so verschwindet die zugehörige Multiplizität, während wir eine ihrer Natur nach nicht negative Zahl berechnet haben. Unsere Zahlen $Z_{q^i t}$ geben also obere Schranken für die gesuchten Multiplizitäten. Da die Summe aller Wurzelvielfachheiten gleich dem Grad N der Darstellung sein muß, so müßte, falls einmal zwar die berechnete Zahl $Z_{q^i t}\neq 0$ sein sollte, obwohl eine zugehörige Form nicht existiert, die Ungleichung

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{t\left|\frac{q\mp 1}{2}\right.}\varphi(q^i t)Z_{q^i t}>N$$

gelten. Nun ergibt sich aber unter Berücksichtigung von

$$\sum_{t\left|\frac{q\mp 1}{2}\right.}(-1)^{\frac{q\mp 1}{2t}}\varphi(t)=0;\qquad \sum_{t\left|\frac{q\mp 1}{2}\right.}\left(1-a\left(\frac{q\mp 1}{2},t\right)\right)\varphi(t)=0$$

leicht

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{t\left|\frac{q\mp 1}{2}\right.}\varphi(q^i t)Z_{q^i t}=N.$$

$Z_{q^i t}$ ist also tatsächlich die Vielfachheit jeder primitiven $q^i t$-ten Einheitswurzel unter den charakteristischen Wurzeln der Matrix $(R_{\mu\nu})$ bzw. $(S_{\mu\nu})$. Durch Angabe von $Z_{q^i t}(R)$ und $Z_{q^i t}(S)$ ist der Charakter von $\mathfrak{S}_{2k}$ für alle Substitutionen R^m und S^m $(m=1,2,\ldots)$ bestimmt, insbesondere ergibt sich:

Die Charaktere $\chi(R^m)$ und $\chi(S^m)$ sind für alle m ganze rationale Zahlen.

2. Es sei $A=A_\lambda^{(l)}$. In diesem Fall enthält $\mathfrak{U}(A)$ keine elliptischen Substitutionen, und in den parabolischen Spitzen der Breite q^n stimmen

die Ortsuniformisierenden für $\mathfrak{U}$ und $\Gamma(q^n)$ überein. Wir haben also nur die Nullstellenordnung von $F_j(\tau)$ in den Spitzen der Breite q^r für $r < n$ zu untersuchen. Es sei $\omega = e^{\frac{2\pi i}{q^n}}$, und $\omega^{\mu q^{n-s}}$, $(\mu, q) = 1$, sei eine primitive q^s-te Einheitswurzel. Es sei ferner $T = e^{\frac{2\pi i \tau}{q^n}}$ In einer parabolischen Spitze $\frac{a}{c}$ der Breite q^r, die Fixpunkt einer Substitution $M P^{q^r} M^{-1} \equiv A_\lambda^{(l) q^r \varrho} \pmod{q^n}$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sei, ist T^{n-r} Ortsuniformisierende, wenn das Verhalten von $F_j(\tau)$ im Punkte $\frac{a}{c}$ durch die Reihe

$$(23) \qquad \frac{F_j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)}{(c\tau + d)^{2k}} = \sum c_m T^m$$

beschrieben wird. Nun ist

$$\frac{F_j(M P^{q^r} \tau)}{(c P^{q^r} \tau + d)^{2k}} = \frac{F_j(M P^{q^r} M^{-1} M \tau)}{(c\tau + d)^{2k}} = \omega^{\mu \varrho q^{n-s+r}} \frac{F_j(M\tau)}{(c\tau + d)^{2k}}.$$

Die linke Seite der Gleichung (23) nimmt also bei Anwendung von P^{q^r} auf τ den Faktor $\omega^{\mu \varrho q^{n-s+r}}$ auf. T^m ändert sich bei P^{q^r} um den Faktor $e^{\frac{2\pi i m}{q^{n-r}}}$. Es dürfen daher in der Entwicklung (23) nur Exponenten $m \equiv \mu \varrho q^{n-s} \pmod{q^{n-r}}$ vorkommen.

Daraus folgt, daß für $r \geqq s$ die Nullstelle von $F_j(\tau)$ in $\frac{a}{c}$ eine ganzzahlige Ordnung hat, für $r < s$ dagegen beträgt die Nullstellenordnung $g' + \frac{\mu \varrho}{q^{s-r}}$. ϱ durchläuft die quadratischen Reste $\bmod q^{n-r}$.

Bezeichnet $R(x)$ den Bruchbestandteil von x, so ist also die Summe der Bruchbestandteile für die Spitzen der Breite q^r, $r < s$:

$$B_r = H \sum_{\substack{\varrho \bmod q^{n-r} \\ \left(\frac{\varrho}{q}\right) = 1}} R\left(\frac{\mu \varrho}{q^{s-r}}\right).$$

Dabei bedeutet (vgl. (16))

$$H = H(A_\lambda^{(l) q^r \cdot \varrho}) = \begin{cases} q^{n-l} & \text{für } r = n - l, \\ q^{l-1}(q-1) & \text{für } n - l < r \leqq n - 1 \end{cases}$$

die Anzahl derjenigen Spitzen der Breite q^r, die Fixpunkte von Substitutionen $\equiv A_\lambda^{(l) q^r \cdot \varrho} \pmod{q^n}$ mit demselben ϱ sind.

Es ist stets $n - r \geqq s - r$, also

$$B_r = H\, q^{n-s} \frac{1}{2\, q^{s-r}} \sum_{\substack{\nu \bmod q^{s-r} \\ (\nu,\, q) = 1}} \nu(1 + \chi(\mu\nu)); \quad \chi(\nu) = \left(\frac{\nu}{q}\right). \tag{24}$$

Es ist aber

$$\frac{1}{2\, q^k} \sum_{\substack{\nu \bmod q^k \\ (\nu,\, q) = 1}} \nu(1 + \chi(\mu\nu)) = \sum_{\nu=1}^{q-1} \sum_{\lambda=0}^{q^{k-1}-1} (\nu(1 + \chi(\mu\nu)) + \lambda q)$$

$$= \frac{q^{k-1}(q-1)}{4} - \frac{h}{2}\left(\frac{\mu}{q}\right),$$

wo $h = -\frac{1}{q} \sum_{\nu=1}^{q-1} \nu\, \chi(\nu)$ für $q \equiv 1 \pmod 4$ verschwindet, für $q \equiv 3$ (4) aber die Klassenzahl des Körpers $K(\sqrt{-q})$ darstellt.

Damit ergibt sich

$$B_r = 0 \quad \text{für} \quad s \leqq n - l \quad \text{oder} \quad r \geqq s,$$

$$B_{n-l} = \frac{q^{n-1}(q-1)}{4} - q^{2n-l-s}\left(\frac{\mu}{q}\right)\frac{h}{2}, \quad s > n - l,$$

$$B_r = \frac{q^{n-2}(q-1)^2}{4} - q^{n+r-s-1}(q-1)\left(\frac{\mu}{q}\right)\frac{h}{2} \quad \text{für} \quad n - l < r < s.$$

Die Summe aller Bruchbestandteile ist also

$$\frac{q^{n-1}(q-1)}{4} + (s - 1 - (n-l))\frac{q^{n-2}(q-1)^2}{4} - q^{n-1}\left(\frac{\mu}{q}\right)\frac{h}{2} \quad \text{für} \quad s > n - l,$$

$$0 \quad \text{für} \quad s \leqq n - l.$$

Für $A = B_\lambda^{(l)}$ ist dieselbe Rechnung zu machen, nur ist überall statt des Restes ϱ ein Nichtrest einzusetzen. Das ergibt eine Vorzeichenänderung bei $\chi(\nu)$ in (24). Die Summe aller Bruchbestandteile ist daher in diesem Fall:

$$\frac{q^{n-1}(q-1)}{4} + (s - 1 - (n-l))\frac{q^{n-2}(q-1)^2}{4} + q^{n-1}\left(\frac{\mu}{q}\right)\frac{h}{2} \quad \text{für} \quad s > n - l,$$

$$0 \quad \text{für} \quad s \leqq n - l.$$

Daraus ergibt sich jetzt

$$m = \begin{cases} \frac{2\,k}{12}\frac{q^{2n-2}(q^2-1)}{2} - \frac{q^{n-1}(q-1)}{4} - (s - 1 - (n-l))\frac{q^{n-2}(q-1)^2}{4} \\ \qquad \pm\left(\frac{\mu}{q}\right) q^{n-1}\frac{h}{2} \quad \text{für} \quad s > n - l, \\ \frac{2\,k}{12}\frac{q^{2n-2}(q^2-1)}{2} \quad \text{für} \quad s \leqq n - l. \end{cases}$$

Nach (17) ist ferner

$$p - 1 = \frac{q^{2n-2}(q^2-1)}{24} - \frac{q^{n-1}(q-1)}{2} - (l-1)\frac{q^{n-2}(q-1)^2}{4} \leqq \frac{m}{2},$$

also:

$$(25)\quad \left.\begin{array}{l} Z_{q^s}(A_\lambda^{(l)}) \\ \\ Z_{q^s}(B_\lambda^{(l)}) \end{array}\right\} = \begin{cases} (2k-1)\dfrac{q^{2n-2}(q^2-1)}{24} + \dfrac{q^{n-1}(q-1)}{4} \\ \quad + (n-l)\dfrac{q^{n-2}(q-1)^2}{4} \pm q^{n-1}\left(\dfrac{\mu}{q}\right)\dfrac{h}{2} & \text{für } s > n-l, \\ (2k-1)\dfrac{q^{2n-2}(q^2-1)}{24} + \dfrac{q^{n-1}(q-1)}{2} \\ \quad + (l-1)\dfrac{q^{n-2}(q-1)^2}{4} & \text{für } s \leqq n-l. \end{cases}$$

Dies sind zunächst wieder nur obere Schranken für die Multiplizitäten der charakteristischen Wurzeln von $(A_{\lambda\,\mu\nu}^{(l)})$ bzw. $(B_{\lambda\,\mu\nu}^{(l)})$; bilden wir jedoch wieder die Summe für alle q^n-ten Einheitswurzeln und beachten, daß es genau so viele primitive q^s-te Einheitswurzeln mit $\left(\frac{\mu}{q}\right) = +1$ gibt, wie solche mit $\left(\frac{\mu}{q}\right) = -1$, so ergibt sich auch hier der Grad der Darstellung.

Im Fall $q \equiv 1\,(4)$ treten wegen $h = 0$ alle primitiven q^s-ten Einheitswurzeln gleich oft auf, d. h. die Charaktere $\chi(A_\lambda^{(l)m})$ und $\chi(B_\lambda^{(l)m})$ sind rational für alle m.

Für $q \equiv 3\,(4)$ wollen wir die Imaginärteile der Charaktere für $A_\lambda^{(l)\,q^i}$, $B_\lambda^{(l)\,q^i}$ berechnen.

Es treten alle primitiven q^s-ten Einheitswurzeln mit $\left(\frac{\mu}{q}\right) = 1$ und ebenso alle mit $\left(\frac{\mu}{q}\right) = -1$ gleich oft als charakteristische Wurzeln auf. Da für $s \geqq 2$

$$\sum_{\substack{\mu \bmod q^s \\ \left(\frac{\mu}{q}\right)=+1}} e^{\frac{2\pi i\mu}{q^s}} = \sum_{\substack{\mu \bmod q^s \\ \left(\frac{\mu}{q}\right)=-1}} e^{\frac{2\pi i\mu}{q^s}} = 0$$

ist, kann der Charakter nur dann einen Imaginärteil haben, wenn nicht alle q-ten Einheitswurzeln gleich oft vorkommen. Dieser Fall tritt nach (25) nur für diejenigen Potenzen $A_\lambda^{(l)\,q^i}$, $B_\lambda^{(l)\,q^i}$ ein, für die $i \geqq n-l$ ist, die also mit den entsprechenden Potenzen von P und Q konjugiert sind. Wegen

$$\sum_{\left(\frac{\mu}{q}\right)=+1} e^{\frac{2\pi i\mu}{q}} = \frac{-1+\sqrt{-q}}{2}; \qquad \sum_{\left(\frac{\mu}{q}\right)=-1} e^{\frac{2\pi i\mu}{q}} = \frac{-1-\sqrt{-q}}{2},$$

und da je q^i q^{i+1}-te Einheitswurzeln beim Potenzieren mit q^i dieselbe q-te Einheitswurzel ergeben, ist

$$\mathfrak{Im}\,(\chi(P^{q^i})) = q^{n+i-1}\,\frac{h}{2}\,\sqrt{-q}$$

und $\qquad\qquad (0 \leqq i < n),$

$$\mathfrak{Im}\,(\chi(Q^{q^i})) = -\,q^{n+i-1}\,\frac{h}{2}\,\sqrt{-q}$$

da P^{-q^i} und Q^{q^i} konjugiert sind, also $\chi(Q^{q^i}) = \overline{\chi(P^{q^i})}$ ist.

Damit haben wir das Endresultat:

Für $q \equiv 3 \pmod 4$ *sind die Charaktere* $\chi(P^{q^i})$, $\chi(Q^{q^i})$ *Zahlen des Körpers* $K(\sqrt{-q})$; *alle übrigen Charaktere sind rational.*

Für $q \equiv 1 \pmod 4$ *sind alle Charaktere rational,* w. z. b. w.

Sind nun $\chi_1(A)$ und $\chi_2(A)$ zwei konjugiert komplexe einfache Charaktere von $\mathfrak{M}(q^n)$ und treten die zugehörigen irreduziblen Darstellungen in $\mathfrak{S}_{2k}$ mit den Vielfachheiten r_1 und r_2 auf, so ist bekanntlich

$$r_i = \frac{1}{\mu} \sum_A \chi(A^{-1}) \chi_i(A),$$

also

$$\text{(I)} \qquad r_1 - r_2 = \frac{1}{\mu} \sum_A \chi(A^{-1}) (\chi_1(A) - \chi_2(A)),$$

ebenso

$$\text{(II)} \qquad r_1 - r_2 = \frac{1}{\mu} \sum_A \chi(A) (\chi_1(A^{-1}) - \chi_2(A^{-1})).$$

Da nach Voraussetzung $\chi_1(A) = \overline{\chi_2(A)} = \chi_2(A^{-1})$ und $\chi(A) = \overline{\chi(A^{-1})}$ ist, so läßt sich (II) auch schreiben als

$$\text{(III)} \qquad r_1 - r_2 = -\frac{1}{\mu} \sum_A \overline{\chi(A^{-1})} (\chi_1(A) - \chi_2(A)).$$

Durch Addition von (I) und (III) folgt

$$r_1 - r_2 = \frac{1}{\mu} \sum_A (\chi_1(A) - \chi_2(A)) \{\Im\mathrm{m}(\chi(A^{-1}))\}.$$

Beachten wir, daß nur für $A = P^{q^i}, Q^{q^i}$ $\Im\mathrm{m}(\chi(A))$ von Null verschieden ist, daß ferner $\chi_k(Q^{q^i}) = \overline{\chi_k(P^{q^i})}$ ist und mit jedem P^{q^i} bzw. Q^{q^i} $q^{2(n-i-1)} \frac{q^2-1}{2}$ Elemente konjugiert sind, so folgt

$$\text{(26)} \qquad r_1 - r_2 = -h \frac{\sqrt{-q}}{q} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{q^i} (\chi_1(P^{q^i}) - \chi_2(P^{q^i})).$$

Da mit P^{q^i} alle Substitutionen $P^{q^i m^2}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ konjugiert sind, so kommen in *jeder* Darstellungsmatrix für P^{q^i} unter den charakteristischen Wurzeln alle in bezug auf $K(\sqrt{-q})$ konjugierten q^r-ten Einheitswurzeln gleich oft vor, und die primitiven q-ten Einheitswurzeln treten in einer durch q^i teilbaren Anzahl auf; ferner liefern nur die letzteren einen Beitrag zu $\chi_1(P^{q^i}) - \chi_2(P^{q^i})$. Die Summe in (26) ist also eine Summe von ganzzahligen Vielfachen von $\sqrt{-q}$. Daraus folgt:

Für $q \equiv 3 \pmod 4$ *ist die Differenz der Multiplizitäten zweier irreduzibler Darstellungen mit konjugiert komplexen Charakteren ein ganzzahliges Vielfaches der Klassenzahl von* $K(\sqrt{-q})$.

Jede ganze Modulform der Dimension $-2k$ läßt sich linear kombinieren aus Eisensteinreihen und Formen, die in allen rationalen Punkten verschwinden ($k = 1$: $\wp$-Teilwerte und Integranden erster Gattung). Da die Eisensteinreihen bzw. die $\wp$-Teilwerte sich bei Anwendung von beliebigen Modulsubstitutionen nur untereinander permutieren, also eine Darstellung von $\mathfrak{M}(q^n)$ mit rationalen Charakteren vermitteln, so gelten die Sätze dieses Paragraphen einschließlich Formel (26) ebenfalls für die Darstellung von $\mathfrak{M}(q^n)$ durch die Schar aller ganzen Modulformen der Dimension $-2k$, die in allen rationalen Punkten verschwinden.

§ 3.

Die Zerlegung von $\mathfrak{S}_{2k}(q^2)$.

Unter den irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{M}(q^n)$ kommen alle irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{M}(q^{n-1})$ vor. Diese ordnen allen Elementen von $\mathfrak{N}_{n-1}$ die Einheitsmatrix zu (»zu $\mathfrak{N}_{n-1}$ gehörige Darstellungen«). Die übrigen Darstellungen sind isomorph zu $\mathfrak{M}(q^n)$.

Eine Modulform der Stufe q^{n-1} ist wegen $\Gamma(q^n) \subset \Gamma(q^{n-1})$ auch Modulform der Stufe q^n. Ein volles System linear unabhängiger ganzer Formen der Dimension $-2k$ zur Stufe q^{n-1} läßt sich zu einem solchen der Stufe q^n ergänzen. Daraus folgt, daß die Darstellung $\mathfrak{S}_{2k}(q^n)$ die Darstellung $\mathfrak{S}_{2k}(q^{n-1})$ vollständig enthält. Weitere zu $\mathfrak{N}_{n-1}$ gehörige Darstellungen aber treten nicht auf, da es sonst ein System von Formen q^n-ter, aber nicht q^{n-1}-ter Stufe geben müßte, die bei Substitutionen aus $\mathfrak{N}_{n-1}$ invariant sind, also bei Substitutionen

$$N \equiv E \pmod{q^{n-1}}.$$

Es müßten dies also gegen die Voraussetzung Formen der Stufe q^{n-1} sein.

Setzen wir die Zerlegung von $\mathfrak{S}_{2k}(q)$ als bekannt voraus, so brauchen wir zur vollständigen Zerlegung von $\mathfrak{S}_{2k}(q^2)$ nur die Multiplizitäten zu berechnen, mit denen die nicht zu $\mathfrak{N}_1$ gehörigen Darstellungen von $\mathfrak{M}(q^2)$ in $\mathfrak{S}_{2k}(q^2)$ vorkommen, also

die $\left(\frac{q-1}{2}\right)^2$ Darstellungen vom Grad $q(q+1)$:

$$\mathfrak{G}^{(i,\alpha)}_{q(q+1)}\left(i = 1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2};\ \alpha = 0, 1, \ldots, \frac{q-3}{2}\right),$$

die $\frac{q^2-1}{4}$ Darstellungen vom Grad $q(q-1)$:

$$\mathfrak{G}^{(i,\beta)}_{q(q-1)}\left(i = 1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2};\ \beta = 0, 1, \ldots, \frac{q-1}{2}\right),$$

die $2q$ Darstellungen vom Grad $\frac{q^2-1}{2}$:

$$\mathfrak{G}^{(\gamma)}_{\frac{q^2-1}{2}},\ \mathfrak{G}'^{(\gamma)}_{\frac{q^2-1}{2}}\ (\gamma = 0, 1, \ldots, q-1).$$

Die Charaktere dieser Darstellungen sind in der Tabelle[5]) auf S. 349 zusammengestellt. Dabei bedeutet ϱ eine primitive $\frac{q-1}{2}$-te Einheitswurzel, σ eine primitive $\frac{q+1}{2}$-te Einheitswurzel; $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{q}}$. μ durchläuft die quadratischen Reste, ν die Nichtreste mod q; $\mu\mu^{-1} \equiv \nu\nu^{-1} \equiv 1 \pmod q$.

Es sei

$$(27)\qquad \mathfrak{S}_{2k}(q^2) = \mathfrak{S}_{2k}(q) + \sum_{i,\alpha} m^{(i,\alpha)}\, \mathfrak{G}^{(i,\alpha)}_{q(q+1)} + \sum_{i,\beta} n^{(i,\beta)}\, \mathfrak{G}^{(i,\beta)}_{q(q-1)}$$
$$+ \sum_{\gamma} r_1^{(\gamma)}\, \mathfrak{G}^{(\gamma)}_{\frac{q^2-1}{2}} + \sum_{\gamma} r_2^{(\gamma)}\, \mathfrak{G}'^{(\gamma)}_{\frac{q^2-1}{2}}$$

und

$$M = \sum_{i,\alpha} m^{(i,\alpha)},\quad N = \sum_{i,\beta} n^{(i,\beta)},\quad R_{12} = \sum_{\gamma} (r_1^{(\gamma)} + r_2^{(\gamma)}).$$

Wir bestimmen zunächst die Multiplizitäten, mit denen die 1 als charakteristische Wurzel von R und S in den einzelnen Summanden von (27) vorkommt. (Charakteristische Wurzel von A ist dabei kurz gesagt für: Charakteristische Wurzel der A entsprechenden Matrix in der betreffenden Darstellung.) Für $\mathfrak{S}_{2k}(q^2)$ und $\mathfrak{S}_{2k}(q)$ sind diese Multiplizitäten in § 2 berechnet worden. Die Multiplizität einer charakteristischen Wurzel ξ eines Elements A der Ordnung q in einer Darstellung mit dem Charakter $\chi(A)$ ist

$$(28)\qquad \frac{1}{q}\sum_{m=1}^{q} \chi(A^m)\,\xi^{-m}.$$

Danach ergibt sich in der Darstellung

$$\mathfrak{G}^{(i,\alpha)}_{q(q+1)}\qquad \mathfrak{G}^{(i,\beta)}_{q(q-1)}\qquad \mathfrak{G}^{(\gamma)}_{\frac{q^2-1}{2}},\ \mathfrak{G}'^{(\gamma)}_{\frac{q^2-1}{2}}$$

die Multiplizität der charakteristischen Wurzel 1 von R zu

$$2\qquad\qquad 2\qquad\qquad 2$$

und von S zu

$$2\qquad\qquad 2\qquad\qquad 0.$$

Es gelten also die Gleichungen

$$Z_1^{(q^2)}(R) - Z_1^{(q)}(R) = Z_0(R) = 2(M + N + R_{12}),$$
$$Z_1^{(q^2)}(S) - Z_1^{(q)}(S) = Z_0(S) = 2(M + N).$$

Aus diesen Gleichungen und der Gradbeziehung

$$N(q^2) - N(q) = N_0 = q(q-1)(M+N) + 2qM + \frac{q^2-1}{2} R_{12}$$

---

[5]) Vgl. P., S. 389; R., S. 93.

	$\mathfrak{G}^{(i,\alpha)}_{q(q+1)}$	$\mathfrak{G}^{(i,\beta)}_{q(q-1)}$	$\mathfrak{G}^{(0)}_{\frac{q^2-1}{2}}$, $\mathfrak{G}'^{(0)}_{\frac{q^2-1}{2}}$	$\mathfrak{G}^{(\gamma)}_{\frac{q^2-1}{2}}$ $\gamma \neq 0$	$\mathfrak{G}'^{(\gamma)}_{\frac{q^2-1}{2}}$ $\gamma \neq 0$
$\chi(R^a),\ a \not\equiv 0\left(\frac{q-1}{2}\right)$	$\zeta^{ia}\varrho^{\alpha a} + \zeta^{-ia}\varrho^{-\alpha a}$	0	0	0	
$\chi(S^b),\ b \not\equiv 0\left(\frac{q+1}{2}\right)$	0	$\zeta^{ib}\sigma^{\beta b} + \zeta^{-ib}\sigma^{-\beta b}$	0	0	
$\chi(P)$	0	0	$\frac{q-1}{2}$	$\frac{-1 \pm \left(\frac{\gamma}{q}\right)\sqrt{\varepsilon q}}{2}$	
$\chi(Q)$	0	0	$\frac{q-1}{2}$	$\frac{-1 \mp \left(\frac{\gamma}{q}\right)\sqrt{\varepsilon q}}{2}$	
$\chi(A^{(1)}_\lambda)$	0	0	$\frac{-1 \pm \left(\frac{\lambda}{q}\right)\sqrt{\varepsilon q}}{2}$	$\sum_\mu \zeta^{\gamma\mu + \lambda\mu^{-1}}$	$\sum_\nu \zeta^{\gamma\nu + \lambda\nu^{-1}}$
$\chi(B^{(1)}_\lambda)$	0	0	$\frac{-1 \mp \left(\frac{\lambda}{q}\right)\sqrt{\varepsilon q}}{2}$	$\sum_\nu \zeta^{\gamma\nu + \lambda\nu^{-1}}$	$\sum_\mu \zeta^{\gamma\mu + \lambda\mu^{-1}}$
$\chi(R^a),\ a \equiv 0\left(\frac{q-1}{2}\right),\ (a,q)=1$	$q(\zeta^{ia} + \zeta^{-ia})$	0	$\frac{q-1}{2}$	$\frac{q-1}{2}$	
$\chi(S^b),\ b \equiv 0\left(\frac{q+1}{2}\right),\ (b,q)=1$	0	$-q(\zeta^{ib} + \zeta^{-ib})$	$-\frac{q+1}{2}$	$-\frac{q+1}{2}$	
$\chi(P^q)$	q	$-q$	$\frac{-1 \pm \varepsilon q\sqrt{\varepsilon q}}{2}$	$\frac{-1 \pm \varepsilon q\sqrt{\varepsilon q}}{2}$	
$\chi(Q^q)$	q	$-q$	$\frac{-1 \mp \varepsilon q\sqrt{\varepsilon q}}{2}$	$\frac{-1 \mp \varepsilon q\sqrt{\varepsilon q}}{2}$	
$\chi(E)$	$q(q+1)$	$q(q-1)$	$\frac{q^2-1}{2}$	$\frac{q^2-1}{2}$	

berechnen wir M, N und R_{12}:

$$2(M+N) = Z_0(S),$$
$$2R_{12} = Z_0(R) - Z_0(S),$$
$$2qM = N_0 - \frac{q(q-1)}{2} Z_0(S) - \frac{q^2-1}{4}(Z_0(R) - Z_0(S)),$$

also zusammen mit (22):

$$2R_{12} = (2k-1)\frac{q(q^2-1)}{6} + (q-1) = \frac{4(M+N)}{q-1}, \tag{29}$$

$$2M = (2k-1)\frac{q(q-1)(q^2-1)}{24} + \frac{(q-1)^2}{2}, \tag{30}$$

$$2N = (2k-1)\frac{q(q-1)(q^2-1)}{24}. \tag{31}$$

Wir bestimmen weiter die Multiplizität, mit der eine primitive qt-te Einheitswurzel $\left(t \,\middle|\, \frac{q \mp 1}{2}\right)$ als charakteristische Wurzel für R und S auftritt.

Da bereits $R^{\frac{q-1}{2}}$ bzw. $S^{\frac{q+1}{2}}$ in $\mathfrak{N}_1$ liegt, treten in $\mathfrak{S}_{2k}(q)$ solche Einheitswurzeln nicht auf. Für $\mathfrak{S}_{2k}(q^2)$ sind die Multiplizitäten in (22) angegeben.

Nach (28) ergibt sich für R die Multiplizität von $\zeta^{i'}\varrho^{\alpha'}$ zu

$$\left.\begin{array}{l} 5, \text{ wenn } i = i',\ \alpha = \alpha' \\ 4, \text{ wenn } i = i',\ \alpha \neq \alpha' \\ 2, \text{ wenn } i \neq i',\ \alpha \neq \alpha' \end{array}\right\} \text{ für die Darstellungen } \mathfrak{G}^{(i,\alpha)}_{q(q+1)},$$

$$2 \text{ für die Darstellungen } \mathfrak{G}^{(i,\beta)}_{q(q-1)} \text{ und } \mathfrak{G}^{(\gamma)}_{\frac{q^2-1}{2}},\ \mathfrak{G}'^{(\gamma)}_{\frac{q^2-1}{2}},$$

und für S die Multiplizität von $\zeta^{i'}\sigma^{\beta'}$ zu

$$2 \text{ für die Darstellungen } \mathfrak{G}^{(i,\alpha)}_{q(q+1)},$$

$$\left.\begin{array}{l} 3, \text{ wenn } i = i',\ \beta = \beta' \\ 0, \text{ wenn } i = i',\ \beta \neq \beta' \\ 2, \text{ wenn } i \neq i',\ \beta \neq \beta' \end{array}\right\} \text{ für die Darstellungen } \mathfrak{G}^{(i,\beta)}_{q(q-1)},$$

$$0 \text{ für die Darstellungen } \mathfrak{G}^{(\gamma)}_{\frac{q^2-1}{2}},\ \mathfrak{G}'^{(\gamma)}_{\frac{q^2-1}{2}}.$$

Nach dem Hauptsatz des § 2 ist

$$\sum_{\alpha=0}^{\frac{q-3}{2}} m^{(i,\alpha)} = \frac{M}{\frac{q-1}{2}}, \quad \sum_{\beta=0}^{\frac{q-1}{2}} n^{(i,\beta)} = \frac{N}{\frac{q-1}{2}}.$$

Es gelten also die Gleichungen

$$Z^{(q^2)}_{qt}(R) = 2(M+N+R_{12}) + \frac{4M}{q-1} + m^{(i,\alpha)},$$

$$Z^{(q^2)}_{qt}(S) = 2(M+N+R_{12}) - \frac{4N}{q-1} + n^{(i,\beta)}.$$

Setzen wir die bereits berechneten Werte aus (22), (29), (30), (31) ein, so ergibt sich nach einer kleinen Umformung

$$\begin{aligned} m^{(t,\alpha)} = (2k-1)\Big\{ & q\left(\frac{q-\varepsilon_3}{3} - \frac{q-\varepsilon}{4}\right) + \frac{(q-1)(1+\varepsilon_3)}{3} - \frac{(q-1)(1+\varepsilon)}{4} \\ & - \frac{1+(-1)^{\frac{q-1}{2t}}}{2} + \frac{1+\varepsilon_3}{2}\left(1 - a\left(\frac{q-1}{2}, t\right)\right)\Big\} + 1 \\ & + \left[\frac{k}{2}\right](1+\varepsilon)(-1)^{\frac{q-1}{2t}} + \left[\frac{2k}{3}\right]\frac{1+\varepsilon_3}{2}\left(3a\left(\frac{q-1}{2}, t\right) - 1\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^{(t,\beta)} = (2k-1)\Big\{ & q\left(\frac{q-\varepsilon_3}{3} - \frac{q-\varepsilon}{4}\right) - \frac{(q+1)(1-\varepsilon_3)}{3} + \frac{(q+1)(1-\varepsilon)}{4} \\ & - \frac{1+(-1)^{\frac{q+1}{2t}}}{2} + \frac{1-\varepsilon_3}{2}\left(1 - a\left(\frac{q+1}{2}, t\right)\right)\Big\} \\ & + \left[\frac{k}{2}\right](1-\varepsilon)(-1)^{\frac{q+1}{2t}} + \left[\frac{2k}{3}\right]\frac{1-\varepsilon_3}{2}\left(3a\left(\frac{q+1}{2}, t\right) - 1\right), \end{aligned}$$

wenn $\zeta^t \varrho^\alpha$ bzw. $\zeta^t \sigma^\beta$ eine primitive $q\,t$-te Einheitswurzel ist. Hierbei stehen in den geschweiften Klammern Summen von ganzen Zahlen.

Es fehlen noch die Multiplizitäten $r_1^{(\gamma)}, r_2^{(\gamma)}$. Wir bestimmen zunächst nach (28) die Vielfachheit der charakteristischen Wurzel 1 für P. Sie hat für die Darstellungen

	$\mathfrak{G}^{(t,\alpha)}_{q(q+1)}$	$\mathfrak{G}^{(t,\beta)}_{q(q-1)}$	$\mathfrak{G}^{(0)}_{\frac{q^2-1}{2}}, \mathfrak{G}'^{(0)}_{\frac{q^2-1}{2}}$	$\mathfrak{G}^{(\gamma)}_{\frac{q^2-1}{2}}, \mathfrak{G}'^{(\gamma)}_{\frac{q^2-1}{2}}$	$(\gamma \neq 0)$
die Werte	2	0	$\frac{q-1}{2}$	0.	

Es gilt also die Gleichung

$$Z_1^{(q^2)}(P) - Z_1^{(q)}(P) = 2M + \frac{q-1}{2}(r_1^{(0)} + r_2^{(0)}).$$

Zusammen mit (25), (30) ergibt sich daraus

$$r_1^{(0)} + r_2^{(0)} = (2k-1)\frac{q^2-1}{12} + \frac{q-1}{2}. \tag{32}$$

Nach (11) ist $A_\lambda^{(1)m}$ mit $A^{(1)}_{\lambda m^2}$ konjugiert, wenn $\left(\frac{m}{q}\right) = 1$, mit $B^{(1)}_{\lambda m^2}$, wenn $\left(\frac{m}{q}\right) = -1$ ist. Für die Darstellungen $\mathfrak{G}^{(t,\alpha)}_{q(q+1)}, \mathfrak{G}^{(t,\beta)}_{q(q-1)}, \mathfrak{G}^{(0)}_{\frac{q^2-1}{2}}$ und $\mathfrak{G}'^{(0)}_{\frac{q^2-1}{2}}$ haben alle Substitutionen $A_\lambda^{(1)}$ mit demselben $\left(\frac{\lambda}{q}\right)$ dieselben Charaktere, ebenso alle $B_\lambda^{(1)}$. Es ergibt sich daher nach (28) leicht die Multiplizität von 1 als charakteristische Wurzel von $A_\lambda^{(1)}$ für

	$\mathfrak{G}^{(t,\alpha)}_{q(q+1)}$	$\mathfrak{G}^{(t,\beta)}_{q(q-1)}$	$\mathfrak{G}^{(0)}_{\frac{q^2-1}{2}}, \mathfrak{G}'^{(0)}_{\frac{q^2-1}{2}}$
zu	2	0	0.

Zur Bestimmung der Multiplizität für die übrigen Darstellungen schlagen wir besser den folgenden Weg ein:

Die betrachteten Darstellungen sind isomorph, die $A_\lambda^{(1)}$ entsprechenden Matrizen haben daher sicher primitive q^2-te Einheitswurzeln unter den charakteristischen Wurzeln. Da die Charaktere für $A_\lambda^{(1)q}$ Zahlen aus dem Körper $K(\sqrt{\varepsilon q})$ sind, so müssen mit jeder primitiven q^2-ten Einheitswurzel ω auch alle ω^μ mit $\left(\frac{\mu}{q}\right) = +1$, $\mu \bmod q^2$ auftreten, und zwar in gleicher Anzahl. Es kommen also mindestens $\frac{q^2-q}{2}$ primitive q^2-te Einheitswurzeln vor, aber auch nicht mehr; denn die nächstgrößere mögliche Zahl wäre q^2-q, dagegen beträgt der Grad der Darstellung nur $\frac{q^2-1}{2}$.

Die übrigen $\frac{q-1}{2}$ charakteristischen Wurzeln sind q-te Einheitswurzeln, und da $\sum \omega^\mu = 0$ ist, so ist der Charakter

$$\sum_\mu \zeta^{\gamma\mu+\lambda\mu^{-1}} \quad \text{bzw.} \quad \sum_\nu \zeta^{\gamma\nu+\lambda\nu^{-1}}$$

die Summe dieser q-ten Einheitswurzeln. Da jedenfalls nicht alle q-ten Einheitswurzeln auftreten, so sind die auftretenden linear unabhängig, soweit sie voneinander verschieden sind, und die Darstellung des Charakters als Summe von q-ten Einheitswurzeln ist eindeutig. Die 1 tritt also in der Darstellung $\mathfrak{G}^{(\gamma)}_{\frac{q^2-1}{2}}$ bzw. $\mathfrak{G}'^{(\gamma)}_{\frac{q^2-1}{2}}$ für $A_\lambda^{(1)}$ genau so oft als charakteristische Wurzel auf, als es zu γ und λ Zahlen μ bzw. ν gibt, so daß

$$\gamma\mu + \lambda\mu^{-1} \equiv 0 \quad \text{bzw.} \quad \gamma\nu + \lambda\nu^{-1} \equiv 0 \pmod q$$

ist.

Jetzt müssen die Fälle $q \equiv 1\ (4)$ und $q \equiv 3\ (4)$ unterschieden werden.

I. Es sei $q \equiv 1\ (4)$. In diesem Fall sind alle einfachen Charaktere reell. Mit dem Charakter einer Darstellung $\mathfrak{G}^{(\gamma)}_{\frac{q^2-1}{2}}$ sind die Charaktere derjenigen Darstellungen $\mathfrak{G}^{(\delta)}_{\frac{q^2-1}{2}}$ algebraisch konjugiert, deren Index δ sich von γ um das Quadrat eines quadratischen Restes unterscheidet, und diejenigen Darstellungen $\mathfrak{G}'^{(\delta)}_{\frac{q^2-1}{2}}$, deren Index δ sich von γ um das Quadrat eines quadratischen Nichtrestes unterscheidet, wie man sieht, wenn man in den Charakteren ζ durch ζ^ϱ ersetzt und beachtet, daß

$$\varrho(\gamma\mu + \lambda\mu^{-1}) \equiv \gamma\varrho^2(\varrho^{-1}\mu) + \lambda(\varrho^{-1}\mu)^{-1};$$
$$\varrho(\gamma\nu + \lambda\nu^{-1}) \equiv \gamma\varrho^2(\varrho^{-1}\nu) + \lambda(\varrho^{-1}\nu)^{-1}$$

ist. Die Darstellungen $\mathfrak{G}^{(\gamma)}_{\frac{q^2-1}{2}}$, $\mathfrak{G}'^{(\gamma)}_{\frac{q^2-1}{2}}$ zerfallen also in vier Systeme von je $\frac{q-1}{2}$ untereinander algebraisch konjugierten.

Die Kongruenz $\gamma x^2 + \lambda \equiv 0 \pmod{q}$ ist dann und nur dann lösbar und besitzt zwei Lösungen x und $-x$, wenn sich γ von $-\lambda$ um einen quadratischen Rest unterscheidet. Die Lösungen sind beide quadratische Reste, wenn $-\lambda\gamma^{-1}$ das Quadrat eines quadratischen Restes, beide Nichtreste, wenn es das Quadrat eines Nichtrestes ist. Die 1 tritt also in einem System konjugierter Darstellungen mit der Vielfachheit 2, in den drei andern mit der Vielfachheit 0 auf. Setzen wir daher für λ die 0., 1., 2., 3. Potenz eines Nichtrestes ein, so erhalten wir 4 Bestimmungsgleichungen für die Summen $R^{(\lambda)}$ der Multiplizitäten algebraisch konjugierter Darstellungen:

$$Z_1^{(q^2)}(A_\lambda^{(1)}) = Z_1^{(q)}(A_\lambda^{(1)}) + 2M + 2R^{(\lambda)},$$

also nach (25), (30)

$$R^{(\lambda)} = (2k-1)\frac{q-1}{2}\frac{q^2-1}{24},$$

und da nach § 2 reelle algebraisch konjugierte Charaktere gleich oft auftreten:

$$r_1^{(\gamma)} = r_2^{(\gamma)} = (2k-1)\frac{q^2-1}{24} \quad \text{für } \gamma \neq 0$$

und aus (32):

$$r_1^{(0)} = r_2^{(0)} = (2k-1)\frac{q^2-1}{24} + \frac{q-1}{4}.$$

II. Es sei $q \equiv 3\ (4)$. In diesem Fall haben die Darstellungen $\mathfrak{G}^{(\gamma)}_{\frac{q^2-1}{2}}$ und $\mathfrak{G}'^{(\gamma)}_{\frac{q^2-1}{2}}$ konjugiert komplexe Charaktere, und die Charaktere aller Darstellungen $\mathfrak{G}^{(\gamma)}_{\frac{q^2-1}{2}}$ mit $\left(\frac{\gamma}{q}\right) = +1$ und ebenso der mit $\left(\frac{\gamma}{q}\right) = -1$ sind algebraisch konjugiert in bezug auf $K(\sqrt{-q})$. Dasselbe gilt für die Darstellungen $\mathfrak{G}'^{(\gamma)}_{\frac{q^2-1}{2}}$.

Die Kongruenz $\gamma x^2 + \lambda \equiv 0 \pmod{q}$ ist dann und nur dann lösbar, wenn sich γ von $-\lambda$ um einen quadratischen Rest unterscheidet, und zwar ist dann eine Lösung ein Rest, die andere ein Nichtrest. Die 1 tritt also in einem System absolut algebraisch konjugierter Darstellungen mit der Vielfachheit 1, in dem andern mit der Vielfachheit 0 auf. Wählen wir einmal λ als Rest, einmal als Nichtrest, so erhalten wir zwei Bestimmungsgleichungen für die Summen $R^{(\lambda)}$ der Multiplizitäten algebraisch konjugierter Darstellungen:

$$Z_1^{(q^2)}(A_\lambda^{(1)}) - Z_1^{(q)}(A_\lambda^{(1)}) = 2M + R^{(\lambda)},$$

also

$$R^{(\lambda)} = (2k-1)\frac{q-1}{2}\cdot\frac{q^2-1}{12}.$$

Da in bezug auf $K(\sqrt{-q})$ konjugierte Darstellungen gleich oft in $\mathfrak{S}_{2k}$ vorkommen, so ist

$$r_1^{(\gamma)} + r_2^{(\gamma)} = (2k-1)\frac{q^2-1}{12} \quad \text{für } \gamma \neq 0,$$

$$(32) \qquad r_1^{(0)} + r_2^{(0)} = (2k-1)\frac{q^2-1}{12} + \frac{q-1}{2}.$$

Die Differenzen $r_1^{(0)} - r_2^{(0)}$, $r_1^{(\gamma)} - r_2^{(\gamma)}$ berechnen wir nach (26). Es ist $\chi_1^{(0)}(P) - \chi_2^{(0)}(P) = 0$, $\chi_1^{(0)}(P^q) - \chi_2^{(0)}(P^q) = -q\sqrt{-q}$, also

$$\underline{r_1^{(0)} - r_2^{(0)} = -h.}$$

Für $\left(\frac{\gamma}{q}\right) = +1$ ist $\chi_1^{(\gamma)}(P) - \chi_2^{(\gamma)}(P) = \sqrt{-q}$, $\chi_1^{(\gamma)}(P^q) - \chi_2^{(\gamma)}(P) = -q\sqrt{-q}$, d. h.

$$\underline{r_1^{(\gamma)} - r_2^{(\gamma)} = 0 \quad \text{für } \left(\frac{\gamma}{q}\right) = 1.}$$

Für $\left(\frac{\gamma}{q}\right) = -1$ ist $\chi_1^{(\gamma)}(P) - \chi_2^{(\gamma)}(P) = -\sqrt{-q}$, $\chi_1^{(\gamma)}(P^q) - \chi_2^{(\gamma)}(P^q) = -q\sqrt{-q}$, d. h.

$$\underline{r_1^{(\gamma)} - r_2^{(\gamma)} = -2h \quad \text{für } \left(\frac{\gamma}{q}\right) = -1.}$$

Damit ist die Darstellung $\mathfrak{S}_{2k}(q^2)$ vollständig in ihre irreduziblen Bestandteile zerlegt.

(Eingegangen am 12. 1. 1935.)

Über die Säkularkonstanten einer fastperiodischen Funktion.

Von

Börge Jessen in Kopenhagen.

1. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Lösung einer Aufgabe, auf die mich H. Bohr aufmerksam gemacht hat, nämlich die Charakterisierung derjenigen reellen Zahlenmengen C, welche als Menge der Säkularkonstanten einer fastperiodischen Funktion auftreten können. Diese Frage hat ihren Ursprung in dem folgenden Satz von Bohr [1]), für den gleichzeitig ein neuer Beweis mitgeteilt werden soll.

Satz 1. *Es sei $f(t) = u(t) + i v(t)$, $-\infty < t < \infty$ eine beliebige fastperiodische Funktion und a ein Wert derart, daß die untere Grenze des absoluten Betrages $\varrho_a(t) = |f(t) - a|$ positiv ist. Dann läßt sich das Argument $\varphi_a(t) = \arg(f(t) - a)$ [2]) in der Form*

$$\varphi_a(t) = c_a t + \psi_a(t)$$

darstellen, wo c_a eine reelle Konstante und $\psi_a(t)$ eine reelle fastperiodische Funktion ist. Ferner enthält der Modul M_f der Fourierexponenten von $f(t)$ sowohl die Konstante c_a als auch den Modul M_{ψ_a} der Fourierexponenten von $\psi_a(t)$ [3]).

Die Konstante c_a nennt man die *Säkularkonstante* von $f(t)$ mit Bezug auf a. Sämtliche möglichen Werte von a bilden die Komplementärmenge der abgeschlossenen Hülle des Wertevorrates von $f(t)$; diese zerfällt also in ein äußeres Gebiet G_0 und (höchstens) abzählbar viele innere Gebiete $G_1, G_2, \ldots$; in jedem dieser Gebiete ist c_a konstant [4]) und sein Wert ist Null im Gebiet G_0. Sämtliche vorkommenden Werte von c_a bilden eine Menge, die wir mit C_f bezeichnen. Dann ist also C_f eine abzählbare

---

[1]) Siehe A. Wintner [1], H. Bohr [1], [2] und für eine Anwendung des Satzes A. Wintner [2]. Kenntnis dieser Arbeiten ist für das Verständnis der vorliegenden Arbeit nicht erforderlich.

[2]) Hier und im folgenden verstehen wir unter dem Argument einer von Null verschiedenen stetigen Funktion (von einer oder mehreren Variablen) einen beliebigen, aber festen stetigen Zweig des Argumentes.

[3]) Dabei ist in dem trivialen Fall, wo $f(t)$ identisch verschwindet, unter M_f nicht, wie üblich, die leere Menge, sondern die allein aus Null bestehende Menge zu verstehen.

[4]) Denn für zwei Punkte a desselben Gebietes ist der Unterschied zwischen den zugehörigen Argumenten $\varphi_a(t)$ beschränkt.

Menge, welche die Null enthält und im Modul M_f der Fourierexponenten von $f(t)$ enthalten ist. Die erwähnte Aufgabe war nun die genaue Charakterisierung derjenigen reellen Zahlenmengen C, welche als Mengen C_f auftreten können.

Bevor ich die Lösung dieser Aufgabe angebe, werde ich zunächst die entsprechende Aufgabe für periodische bzw. grenzperiodische Funktionen behandeln. In diesen beiden Spezialfällen erweist sich die Lösung als sehr einfach.

Für eine *periodische* Funktion $f(t)$ der Periode $p\,(>0)$ besteht M_f und daher auch C_f aus lauter ganzen Vielfachen der Zahl $\frac{2\pi}{p}$. Es soll gezeigt werden, daß es umgekehrt zu jeder Menge C, welche die Null enthält und aus lauter ganzen Vielfachen von $\frac{2\pi}{p}$ besteht, eine periodische Funktion $f(t)$ der Periode p gibt, für welche $C_f = C$ ist. Um eine solche Funktion $f(t)$ anzugeben, betrachten wir die Folge von komplexen Zahlen $a_n = \frac{1}{n} e^{-\frac{i}{n}}$ und bezeichnen mit γ_n das Dreieck mit den Eckpunkten $0, a_n, a_{n+1}$; ferner wähle man Zahlen $0 \leqq p_1 < p_2 < \ldots < p$. Sind nun $\frac{2\pi}{p} g_1, \frac{2\pi}{p} g_2, \ldots$ die von Null verschiedenen Zahlen in C, so betrachte man für jedes n eine periodische Funktion $f_n(t)$ der Periode p, welche für $0 \leqq t \leqq p_n$ und $p_{n+1} \leqq t \leqq p$ gleich Null ist und im Intervall $p_n \leqq t \leqq p_n + 1$ von Null ausgehend $g_n$mal das Dreieck γ_n durchläuft. Dann ist offenbar $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \ldots$ eine Funktion mit den gewünschten Eigenschaften. Eine reelle Zahlenmenge C ist hiernach dann und nur dann die Menge C_f einer periodischen Funktion $f(t)$, wenn sie die Null enthält und aus lauter ganzen Vielfachen einer festen Zahl besteht.

Für eine *grenzperiodische* Funktion $f(t)$ der Grenzperiode $p\,(>0)$ besteht M_f und also auch C_f aus lauter rationalen Vielfachen der Zahl $\frac{2\pi}{p}$. Es soll gezeigt werden, daß es umgekehrt zu jeder Menge C, welche die Null enthält und aus lauter rationalen Vielfachen von $\frac{2\pi}{p}$ besteht, eine grenzperiodische Funktion $f(t)$ der Grenzperiode p gibt, für welche $C_f = C$ ist. Es seien die Dreiecke γ_n und die Zahlen p_n wie oben gewählt; ferner seien die von Null verschiedenen Zahlen in C in der Form $\frac{2\pi}{p}\frac{h_1}{g_1}, \frac{2\pi}{p}\frac{h_2}{g_2}, \ldots$ geschrieben, wo die Zahlen g_n positiv ganz und die Zahlen h_n ganz sind und wo ferner g_{n+1} für jedes n ein ganzes Vielfaches von g_n ist. Wird dann unter $f_n(t)$ eine periodische Funktion der Periode $p\,g_n$ verstanden, welche für $0 \leqq t \leqq p_n$ und $p_{n+1} \leqq t \leqq p\,g_n$

gleich Null ist und im Intervall $p_n \leqq t \leqq p_{n+1}$ von Null ausgehend h_n-mal das Dreieck γ_n durchläuft, so ist $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots$ eine Funktion mit den gewünschten Eigenschaften. Eine reelle Zahlenmenge C ist also dann und nur dann die Menge C_f einer grenzperiodischen Funktion, wenn sie die Null enthält und aus lauter rationalen Vielfachen einer festen Zahl besteht.

Nach dem letzten Beispiel kommt man leicht auf die Vermutung, daß überhaupt jede die Null enthaltende abzählbare Menge C als Menge C_f auftreten kann, nur müßte, da C in M_f enthalten sein soll, bei komplizierteren Mengen C auch der Modul M_f entsprechend komplizierter werden. Es wird sich aber zeigen, daß die Verhältnisse ganz anders liegen. Es gilt nämlich der auf den ersten Blick überraschende Satz, daß das Verhältnis zwischen je zwei von Null verschiedenen Säkularkonstanten einer fastperiodischen Funktion stets *rational* ist, d. h. auch für beliebige fastperiodische Funktionen $f(t)$ besteht C_f aus lauter rationalen Vielfachen einer festen Zahl. Auf Grund dieses Satzes, der das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ausmacht, ergibt sich als Lösung der gestellten Aufgabe der folgende Satz:

Satz 2. *Eine reelle Zahlenmenge C ist dann und nur dann die Menge C_f der Säkularkonstanten einer fastperiodischen Funktion $f(t)$, wenn sie die Null enthält und aus lauter rationalen Vielfachen einer festen Zahl besteht. Es gibt dann immer grenzperiodische Funktionen, für welche $C_f = C$ ist.*

Innerhalb der Klasse aller fastperiodischen Funktionen spielen die Funktionen mit einer ganzen Basis eine entsprechende Rolle, wie die periodischen Funktionen innerhalb der Klasse aller grenzperiodischen Funktionen. Eine aus lauter rationalen Vielfachen einer festen Zahl bestehende Teilmenge einer durch eine ganze Basis dargestellten Zahlenmenge besteht immer aus lauter ganzen Vielfachen einer festen Zahl. Wir erhalten somit auch den folgenden spezielleren Satz:

Satz 3. *Eine reelle Zahlenmenge C ist dann und nur dann die Menge C_f der Säkularkonstanten einer fastperiodischen Funktion $f(t)$ mit einer ganzen Basis, wenn sie die Null enthält und aus lauter ganzen Vielfachen einer festen Zahl besteht. Es gibt dann immer periodische Funktionen $f(t)$, für welche $C_f = C$ ist.*

Beim Beweis der Sätze 1 und 2 werden wir nicht sofort beliebige fastperiodische Funktionen betrachten, sondern zunächst die entsprechenden Sätze für *Bohlsche Funktionen*, also für Funktionen mit einer endlichen ganzen Basis beweisen. Auf Grund des bekannten Zusammenhangs zwischen Bohlschen Funktionen und periodischen Funktionen von mehreren Variablen folgen diese Sätze aus entsprechenden Sätzen über periodische

Funktionen von mehreren Variablen. Es wäre auch möglich gewesen, sogleich Funktionen einer beliebigen ganzen Basis zu betrachten, was zu der Betrachtung von periodischen Funktionen von unendlich vielen Variablen geführt hätte; es entspricht aber dem elementaren Charakter der Beweise besser, daß wir uns auf Bohlsche Funktionen beschränken. Für beliebige fastperiodische Funktionen ergeben sich unschwer die Sätze 1 und 2 durch Approximation mit Bohlschen Funktionen[5]).

2. Wir beweisen zunächst einige Sätze über periodische Funktionen von n Variablen.

Satz 4. *Es sei* $F(x_1, \ldots, x_n) = U(x_1, \ldots, x_n) + i\,V(x_1, \ldots, x_n)$ *eine für alle* $x_1, \ldots, x_n$ *definierte stetige Funktion, welche nach jeder Variablen* x_ν *periodisch mit der Periode* 2π *ist; ist dann* a *ein Wert, der von* $F(x_1, \ldots, x_n)$ *nicht angenommen wird, dann läßt sich das Argument*

$$\Phi_a(x_1, \ldots, x_n) = \arg(F(x_1, \ldots, x_n) - a)$$

in der Form

$$\Phi_a(x_1, \ldots, x_n) = g_{1,a}\,x_1 + \ldots + g_{n,a}\,x_n + \Psi_a(x_1, \ldots, x_n)$$

schreiben, wo $g_{1,a}, \ldots, g_{n,a}$ *ganze Zahlen sind und* $\Psi_a(x_1, \ldots, x_n)$ *nach jeder Variablen* x_ν *periodisch mit der Periode* 2π *ist.*

Für jedes ν ist der Unterschied

$$\Phi_a(\ldots, x_\nu + 2\pi, \ldots) - \Phi_a(\ldots, x_\nu, \ldots)$$

ein ganzes Vielfaches von 2π, und aus Stetigkeitsgründen ist dieses Vielfache von $x_1, \ldots, x_n$ unabhängig. Bezeichnen wir es mit $g_{\nu,a}\,2\pi$, und wird

$$\Psi_a(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_a(x_1, \ldots, x_n) - g_{1,a}\,x_1 - \ldots - g_{n,a}\,x_n$$

gesetzt, so ergibt sich unmittelbar, daß $\Psi_a(x_1, \ldots, x_n)$ nach jeder Variablen x_ν periodisch mit der Periode 2π ist.

Die möglichen Werte von a bilden die Komplementärmenge des Wertevorrates von $F(x_1, \ldots, x_n)$; für jedes a dieser Menge erhalten wir nach Satz 4 eine bestimmte Linearform $g_{1,a}\,x_1 + \ldots + g_{n,a}\,x_n$. Wir werden jetzt beweisen:

Satz 5. *Die Linearformen* $g_{1,a}\,x_1 + \ldots + g_{n,a}\,x_n$ *sind für alle möglichen* a *zueinander proportional. Sämtliche möglichen Linearformen* $g_{1,a}\,x_1 + \ldots + g_{n,a}\,x_n$ *entstehen also aus einer festen Linearform durch Multiplikation mit ganzzahligen Konstanten.*

---

[5]) Unsere Beweise der Sätze 1 und 2 benutzen also den Approximationssatz für fastperiodische Funktionen. In diesem Zusammenhang bemerke ich, daß der Bohrsche Beweis des Satzes 1 diesen Satz nicht benutzt.

Es genügt offenbar, diesen Satz für $n = 2$ zu beweisen[6]); denn wendet man diesen Spezialfall für zwei beliebige Variablen x_μ und x_ν auf die Funktion $F(\ldots, x_\mu, \ldots, x_\nu, \ldots)$ an, indem die übrigen Variablen festgehalten werden, so ergibt sich die Proportionalität aller Linearformen $g_{\mu,a} x_\mu + g_{\nu,a} x_\nu$ und daraus natürlich der Satz. In dem Spezialfall $n = 2$ lautet der Satz mit geänderten Bezeichnungen wie folgt:

Satz 5a. *Es sei $F(x, y)$ eine für alle x und y definierte stetige Funktion, welche nach x und y periodisch mit der Periode 2π ist. Es seien a und b zwei Werte, die von $F(x, y)$ nicht angenommen werden und $g_a x + h_a y$ und $g_b x + h_b y$ die entsprechenden Linearformen. Dann sind diese Linearformen zueinander proportional, d. h. es gibt zwei ganze Zahlen l und m, welche nicht beide gleich Null sind, derart, daß*

$$l g_a + m h_a = 0, \qquad l g_b + m h_b = 0.$$

Die mod 2π reduzierte (x, y)-Ebene fassen wir wie üblich als einen Torus $\mathfrak{T}$ auf[7]); dann wird $F(x, y)$ zu einer auf $\mathfrak{T}$ definierten Funktion $F(P)$. Der Torus $\mathfrak{T}$ wird durch $F(P)$ auf die komplexe Ebene abgebildet, und bei dieser Abbildung werden insbesondere die Punkte a und b ausgelassen. Das Bild einer geschlossenen orientierten Kurve[8]) γ auf $\mathfrak{T}$ bei dieser Abbildung bezeichnen wir mit γ'; dann sind die Argumentvariationen von $F(P) - a$ und $F(P) - b$ längs γ einfach gleich den Umlaufszahlen k_a und k_b von γ' um a bzw. b, multipliziert mit 2π. Diese Zahlen k_a und k_b ändern sich bei einer stetigen Deformation von γ auf $\mathfrak{T}$ nicht; sie hängen also nur vom Typus von γ ab.

Bei der Reduktion der (x, y)-Ebene mod 2π geht jedes positiv orientierte Geradenstück $x_0 \leqq x < x_0 + 2\pi$, $y = y_0$ in eine geschlossene orientierte Kurve auf $\mathfrak{T}$ über, und diese Kurven haben alle denselben Typus. Eine beliebige Kurve dieses Typus bezeichnen wir mit α. In derselben Weise geht jedes positiv orientierte Geradenstück $x = x_0$, $y_0 \leqq y < y_0 + 2\pi$ in eine geschlossene orientierte Kurve auf $\mathfrak{T}$ über, und wir bezeichnen mit β eine beliebige Kurve vom selben Typus wie diese Kurven. Die Umlaufszahlen des Bildes α' einer Kurve α um a und b sind einfach die Zahlen g_a und g_b, während die Umlaufszahlen des Bildes β' einer Kurve β um a und b die Zahlen h_a und h_b sind.

---

[6]) Für $n = 1$ ist nichts zu beweisen.

[7]) Wir bedienen uns bei dem folgenden Beweis einer geometrischen Sprechweise. Es ist möglich, aber kaum wünschenswert, diese Sprechweise zu vermeiden.

[8]) Unter einer geschlossenen orientierten Kurve γ auf $\mathfrak{T}$ verstehen wir etwas allgemeiner als sonst üblich jedes Aggregat von endlich vielen gewöhnlichen geschlossenen orientierten Kurven. Es ist dann klar, was unter einer Linearkombination $l\alpha + m\beta$ mit ganzen Koeffizienten l und m von zwei geschlossenen orientierten Kurven α und β auf $\mathfrak{T}$ zu verstehen ist.

Jede beliebige geschlossene orientierte Kurve γ auf $\mathfrak{T}$ läßt sich bekanntlich auf eindeutige Weise als Linearkombination mit ganzen Koeffizienten von Kurven der beiden Typen α und β in der Form $\gamma = l\alpha + m\beta$ darstellen, d. h. γ läßt sich stetig in eine Kurve $l\alpha + m\beta$ überführen. Dabei ist γ dann und nur dann auf $\mathfrak{T}$ in einen Punkt zusammenziehbar, wenn l und m beide gleich Null sind. Die Umlaufszahlen k_a und k_b des Bildes γ' von γ um a und b sind hiernach einfach die Zahlen $lg_a + mh_a$ und $lg_b + mh_b$. Auf Grund dieser Deutung der Zahlen $lg_a + mh_a$ und $lg_b + mh_b$ läßt sich Satz 5a auch wie folgt formulieren.

Satz 5b. *Es gibt eine geschlossene orientierte Kurve γ auf $\mathfrak{T}$, welche sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen läßt, derart, daß die Umlaufszahlen k_a und k_b des Bildes γ' von γ um a und b beide gleich Null sind.*

Um eine solche Kurve γ zu finden, bemerken wir zunächst, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen, daß $F(x, y)$ gewisse spezielle Eigenschaften besitzt. Es gibt eine positive Zahl ε derart, daß $|F(x, y) - a| \geqq \varepsilon$ und $|F(x, y) - b| \geqq \varepsilon$ für alle x und y. Ersetzt man $F(x, y)$ durch eine stetige Funktion, welche nach x und y periodisch mit der Periode 2π ist und welche für alle x und y von $F(x, y)$ um weniger als ε abweicht, so bleiben trotz dieser Änderung für jede geschlossene orientierte Kurve γ auf $\mathfrak{T}$ die Umlaufszahlen k_a und k_b des Bildes γ' von γ um a und b dieselben. Hieraus folgt, daß wir beim Beweis annehmen dürfen, daß $F(x, y)$ für eine natürliche Zahl q folgende Bedingungen erfüllt: Zerlegt man durch die Geraden $x = \frac{2\pi}{q} k$, $y = \frac{2\pi}{q} k$, $x + y = \frac{2\pi}{q} k$ (k beliebig ganz) die (x, y)-Ebene in Dreiecke, so ist $F(x, y)$ in jedem dieser Dreiecke eine lineare Funktion von x und y, und das Dreieck wird durch $F(x, y)$ auf ein eigentliches Dreieck der komplexen Ebene abgebildet.

Die erwähnte Dreieckszerlegung der (x, y)-Ebene ist, mod 2π betrachtet, eine Zerlegung von $\mathfrak{T}$ in endlich viele Dreiecke Δ. Jedes dieser Dreiecke Δ wird durch $F(P)$ affin auf ein eigentliches Dreieck Δ' der komplexen Ebene abgebildet. Wir nennen Δ positiv oder negativ, je nachdem Δ und Δ' denselben oder entgegengesetzten Umlaufssinn haben.

Wir betrachten jetzt für eine Kurve α die Umlaufszahlen g_a und g_b des Bildes α' von α um a und b. Sind diese Umlaufszahlen beide gleich Null, so ist $\gamma = \alpha$ eine mögliche Wahl für γ; sonst sei etwa $g_a \neq 0$. Dann betrachten wir in der komplexen Ebene eine orientierte Halbgerade L mit a als Endpunkt, welche nicht durch b hindurchgeht und ferner keinen Eckpunkt eines Dreiecks Δ' trifft. Wenn dann ein Dreieck Δ' von L getroffen wird, dann hat es mit L eine gewisse Strecke s' gemeinsam,

deren Endpunkte auf zwei Seiten von Δ' liegen; diese Strecke s' versehen wir mit derselben oder der entgegengesetzten Orientierung wie L, je nachdem Δ positiv oder negativ ist; mit s bezeichnen wir diejenige orientierte Strecke in Δ, welche bei der Abbildung in s' übergeht. Sämtliche Strecken s auf $\mathfrak{T}$, die man auf diese Weise erhält, setzen sich dann offenbar zu einer geschlossenen orientierten Kurve zusammen, die wir mit γ bezeichnen; daß die Menge dieser Strecken nicht leer ist, folgt daraus, daß α' wegen $g_a \neq 0$ notwendig Punkte mit L gemeinsam hat. Das Bild γ' dieser Kurve γ liegt auf L und ihre Umlaufszahlen um a und b sind deshalb gleich Null; wenn wir also zeigen können, daß γ sich nicht auf $\mathfrak{T}$ in einen Punkt zusammenziehen läßt, dann ist der Beweis zu Ende geführt.

Hierzu betrachten wir auf $\mathfrak{T}$ eine Kurve α, welche durch Reduktion der (x, y)-Ebene mod 2π aus einem positiv orientierten Geradenstück $x_0 \leqq x < x_0 + 2\pi$, $y = y_0$ entsteht, wobei wir y_0 so wählen, daß α weder durch einen Eckpunkt eines Dreiecks Δ noch durch einen Endpunkt einer der Strecken s hindurchgeht. Dann sind alle gemeinsamen Punkte von α und γ eigentliche Schnittpunkte, und diese Schnittpunkte liegen im Innern der Dreiecke Δ. Entsprechend sind alle gemeinsamen Punkte des Bildes α' von α und der Halbgeraden L eigentliche Schnittpunkte. Diese Schnittpunkte zählen wir positiv oder negativ, je nachdem L von rechts oder links überkreuzt wird; dann ist die Anzahl der so gezählten Schnittpunkte gleich der Umlaufszahl von α' um a, also gleich g_a. Diese Anzahl von Schnittpunkten ist aber gleich der Anzahl der Schnittpunkte von α und γ, wenn man die Schnittpunkte positiv oder negativ zählt, je nachdem γ von rechts oder links überkreuzt wird. Dies ergibt sich aus der gewählten Orientierung der Strecken s. Also ist auch die letztere Anzahl gleich g_a. Da nun $g_a \neq 0$, folgt, daß γ sich nicht auf $\mathfrak{T}$ in einen Punkt zusammenziehen läßt.

3. Wir können jetzt die den Sätzen 1 und 2 entsprechenden Sätze für Bohlsche Funktionen beweisen. Unter einer Bohlschen Funktion $f(t)$ versteht man bekanntlich eine Funktion der Form

$$f(t) = F(\beta_1 t, \ldots, \beta_n t),$$

wo $F(x_1, \ldots, x_n)$ stetig und nach jeder Variablen x_ν periodisch mit der Periode 2π ist und die Zahlen $\beta_1, \ldots, \beta_n$ linear unabhängig sind. Aus dem Kroneckerschen Approximationssatz geht hervor, daß die abgeschlossene Hülle des Wertevorrats von $f(t)$ gleich dem Wertevorrat von $F(x_1, \ldots, x_n)$ ist, d. h. die Werte a, für welche die untere Grenze von $\varrho_a(t) = |f(t) - a|$ positiv ist, sind genau diejenigen Werte, die von $F(x_1, \ldots, x_n)$ nicht angenommen werden. Weiter bemerken wir, daß man eine vorgegebene Bohlsche Funktion $f(t)$ stets in der angegebenen Form mit Hilfe einer

Funktion $F(x_1, \ldots, x_n)$ darstellen kann, so daß der Modul M_f der Fourierexponenten von $f(t)$ aus allen Linearkombinationen

$$g_1 \beta_1 + \cdots + g_n \beta_n$$

mit ganzen Koeffizienten g_ν besteht[9]). (Im allgemeinen kann man nur behaupten, daß M_f in dem Modul dieser Zahlen enthalten ist.) Ersetzt man also in den Sätzen 4 und 5 jedes x_ν durch $\beta_\nu t$, so ergeben sich unmittelbar Sätze für Bohlsche Funktionen. Aus Satz 4 ergibt sich der folgende Satz:

Satz 6. *Es sei $f(t)$ eine Bohlsche Funktion und a ein Wert derart, daß die untere Grenze des absoluten Betrages $\varrho_a(t) = |f(t) - a|$ positiv ist. Dann läßt sich das Argument $\varphi_a(t) = \arg(f(t) - a)$ in der Form*

$$\varphi_a(t) = c_a t + \psi_a(t)$$

schreiben, wo c_a eine reelle Konstante und $\psi_a(t)$ ebenfalls eine Bohlsche Funktion ist. Ferner enthält der Modul M_f der Fourierexponenten von $f(t)$ sowohl die Konstante c_a als auch den Modul M_{ψ_a} der Fourierexponenten von $\psi_a(t)$.

Aus Satz 5 ergibt sich, daß die Menge C_f der Säkularkonstanten einer Bohlschen Funktion aus lauter ganzen Vielfachen einer festen Zahl besteht. Indem wir noch daran erinnern, daß die Null unter den Säkularkonstanten vorkommt, können wir auf Grund eines früheren Beispiels sofort die für Bohlsche Funktionen auftretenden Mengen C_f vollständig charakterisieren. Wir erhalten den folgenden Satz:

Satz 7. *Eine reelle Zahlenmenge C ist dann und nur dann die Menge C_f der Säkularkonstanten einer Bohlschen Funktion $f(t)$, wenn sie die Null enthält und aus lauter ganzen Vielfachen einer festen Zahl besteht. Es gibt dann immer periodische Funktionen $f(t)$, für welche $C_f = C$ ist.*

4. Der Übergang zu beliebigen fastperiodischen Funktionen ist sehr einfach. Wir benutzen den Satz, daß jede fastperiodische Funktion gleichmäßig durch Bohlsche Funktionen approximiert werden kann, und zwar so, daß die Moduln der Fourierexponenten der approximierenden Funktionen in dem Modul der Fourierexponenten der vorgegebenen Funktion enthalten sind. Es sei $f(t)$ fastperiodisch und a ein Wert, derart, daß

$$\varrho_a(t) = |f(t) - a| \geqq k > 0$$

für alle t. Wir wählen zu einem vorgegebenen positiven $\varepsilon\,(< k)$ eine Bohlsche Funktion $f^*(t)$, derart, daß $|f(t) - f^*(t)| \leqq \varepsilon$ für alle t und außerdem M_{f^*} in M_f enthalten ist. Dann ist $\varrho_a^*(t) = |f^*(t) - a| \geqq k - \varepsilon$ für

[9]) Dabei wird von dem trivialen Fall abgesehen, wo $f(t)$ konstant ist.

alle t, und ferner gilt für die Argumente $\varphi_a(t) = \arg(f(t) - a)$ und $\varphi_a^*(t) = \arg(f^*(t) - a)$ bei passender Normierung

$$|\varphi_a(t) - \varphi_a^*(t)| \leqq \arcsin \frac{\varepsilon}{k} \left(< \frac{\pi}{2}\right).$$

Nun gilt $\varphi_a^*(t) = c_a^* t + \psi_a^*(t)$, wo $\psi_a^*(t)$ eine Bohlsche Funktion ist. Dabei muß wegen $|\varphi_a(t) - \varphi_a^*(t)| < \frac{\pi}{2}$ die Konstante c_a^* von der speziellen Wahl von $f^*(t)$ unabhängig sein. Bezeichnen wir sie mit c_a und setzen $\varphi_a(t) = c_a t + \psi_a(t)$, so gilt also $|\psi_a(t) - \psi_a^*(t)| \leqq \arcsin \frac{\varepsilon}{k}$, woraus folgt, da ε beliebig klein gewählt werden kann, daß $\psi_a(t)$ fastperiodisch ist. Ferner ist $c_a = c_a^*$ in M_{f^*}, also in M_f enthalten, und M_{ψ_a} ist in M_f enthalten, da jede Zahl von M_{ψ_a} für ein hinreichend kleines ε in $M_{\psi_a^*}$, also in M_{f^*} enthalten ist. Hiermit ist Satz 1 bewiesen.

Zum Beweis des Satzes 2 bemerken wir zunächst, daß nach dem eben Bewiesenen jede Zahl aus C_f für ein hinreichend kleines ε in C_{f^*} enthalten ist. Da jedes C_{f^*} aus lauter ganzen Vielfachen einer festen Zahl besteht, folgt hieraus, daß C_f aus lauter rationalen Vielfachen einer festen Zahl besteht, womit nach einem früheren Beispiel Satz 2 bewiesen ist.

In der vorliegenden Arbeit habe ich mich auf das Studium der zu einer fastperiodischen Funktion gehörigen Säkularkonstanten beschränkt; dazu genügte es, die durchschnittlichen Umlaufszahlen der Funktion um verschiedene Punkte zu betrachten, während die genauere Beschreibung der Aufeinanderfolge dieser Umläufe für die behandelte Aufgabe nicht notwendig war. In einer gemeinsamen Arbeit, die in den Mitteilungen der Dänischen Akademie erscheinen wird, werden W. Fenchel und ich diese allgemeinere Fragestellung behandeln.

Verzeichnis der zitierten Literatur.

H. Bohr.

[1] Kleinere Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I, D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Math.-Fys. Meddelelser X, 10 (1930), S. 5–11.

[2] Über fastperiodische ebene Bewegungen, Commentarii Math. Helvetici 4 (1932), S. 51–64.

A. Wintner.

[1] Sur l'analyse anharmonique des inégalités séculaires fournies par l'approximation de Lagrange, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei (6) 11 (1930), S. 464–467.

[2] Über eine Anwendung der Theorie der fastperiodischen Funktionen auf das Levi-Civita'sche Problem der mittleren Bewegung. Annali di Matematica (4) 10 (1932), S. 277–282.

(Eingegangen am 14. 1. 1935.)

Sur les démonstrations arithmétiques dans la théorie du corps de classes.

Von

C. Chevalley in Paris und H. Nehrkorn in Hamburg.

Introduction.

M. Hasse, poursuivant une idée profonde émise par Mlle Noether, suivant laquelle les théories de l'arithmétique et de l'algèbre dans les corps commutatifs peuvent être déduites des théories analogues, plus simples, relatives aux systèmes non-commutatifs, a montré[1]) comment on pouvait tirer la loi de réciprocité, et, par là, toute la théorie du corps de classes, de la théorie des algèbres, et notamment du théorème fondamental de l'«intégrabilité p-adique» du fait, pour une algèbre, de se décomposer complètement.

M. Hasse, à partir de ce théorème, montre que toute algèbre $\mathfrak{A}$ simple dont le centre est un corps fini de nombres algébriques, possède un corps de décomposition relativement cyclique et circulaire par rapport à son centre, dont le discriminant est premier à celui de l'algèbre. Ce théorème entraîne à son tour la démonstration de la formule de la somme relative aux invariants définis par M. Hasse:

$$(1) \qquad \Sigma\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1$$

formule de laquelle on déduit l'affirmation essentielle de la loi de réciprocité de Artin: si K est une extension relativement abélienne de k, $\mathfrak{a}$ étant un idéal de k premier au discriminant relatif de K, le symbole $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{a}}\right)$ ne dépend que de la classe de congruence de $\mathfrak{a}$ (mod $\mathfrak{f}_{K,k}$), où $\mathfrak{f}_{K,k}$ est le conducteur de K par rapport à k.

On passe ensuite de là à la loi de réciprocité complète (donc à la théorie du corps de classes) en montrant 1. que l'application $\mathfrak{a} \to \left(\frac{K/k}{\mathfrak{a}}\right)$ est une application sur le groupe de Galois tout entier de K/k, 2. que c'est une application isomorphe du groupe des classes d'idéaux (mod H), où H est le groupe attaché à K dans k (groupe des idéaux de k congrus (mod $\mathfrak{f}_{K,k}$) à des normes d'idéaux de K premiers à $\mathfrak{f}_{K,k}$; ce groupe a été appelé par l'un de nous groupe de Takagi). Ce passage se fait, dans le

[1]) Voir Hasse [2].

mémoire dont nous parlons, en employant les moyens transcendants de la théorie du corps de classes. Dans une note sur épreuves, M. Hasse indique que l'un de nous a montré que le passage 1. peut se faire par voie arithmétique.

Nous montrons ici qu'il en est de même du passage 2., et, pour cela, nous faisons remarquer que, dès que l'on est en possession de la partie de la loi de réciprocité indiquée plus haut, on peut, en suivant la méthode indiquée par J. Herbrand et Chevalley, démontrer le théorème d'existence de la théorie du corps de classes, au moins dans le cas où le corps de base contient certaines racines de l'unité. On peut ensuite déduire le théorème réciproque du théorème d'existence.

Il résulte de là que toute la théorie du corps de classes et des algèbres simples par rapport aux corps de nombres algébriques se déduit arithmétiquement de la formule (1). Il serait interessant de savoir si on ne pourrait pas la déduire du fait de l'existence d'un corps de décomposition circulaire quelconque, car, dans ce cas, on serait ramené à démontrer qu'il n'existe aucune algèbre à division non commutative par rapport au corps de toutes les racines de l'unité. Or cette proposition, qui est actuellement démontrable à partir de la théorie du corps de classes, conduit, en se référant aux idées de MM. Artin et Tsen [2]), à poser la question de savoir si le corps de toutes les racines de l'unité ne serait pas *quasi-algébriquement fermé*, question qui reste pour le moment ouverte.

I.

Nous introduisons dans ce paragraphe quelques notions et notations qui seront employées dans tout le cours de l'article.

k désignera un corps fini de nombres algébriques, et K une extension relativement abélienne finie de k.

1. *On appelle groupe de Artin associé à K dans k le groupe des idéaux $\mathfrak{a}$ de k premiers au discriminant relatif de K et pour lesquels le symbole de Artin* $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{a}}\right)$ *est égal à* 1.

Ce groupe sera désigné par $H_{K,k}$.

2. $\mathfrak{m}$ étant un module de k (c'est-à-dire un produit d'idéaux premiers finis ou infinis), *on appelle groupe de Takagi associé à K dans k* (mod $\mathfrak{m}$) *le groupe des idéaux de k qui sont congrus* (mod $\mathfrak{m}$) *à des normes relatives d'idéaux de K premiers à* $\mathfrak{m}$.

Ce groupe sera désigné par $\overline{H}^{\mathfrak{m}}_{K,k}$.

$\mathfrak{p}$ étant un idéal premier, nous appellerons *reste normique* (mod $\mathfrak{p}^{\infty}$) un nombre α de k tel que, pour chaque $n > 0$, α soit congru (mod $\mathfrak{p}^n$)

[2]) Voir Chevalley [2] et Tsen [1].

à la norme relative d'un nombre $\neq 0$ de K (si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier infini, on pose $\mathfrak{p}^n = \mathfrak{p}$). On sait qu'il existe un exposant $n_\mathfrak{p} \geqq 0$ tel que tout nombre de $k \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}}}$ soit reste normique de $K \pmod{\mathfrak{p}^\infty}$ (la congruence $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^0}$ signifiant que α est premier à $\mathfrak{p}$). $n_\mathfrak{p}$ étant choisi le plus petit possible de manière à satisfaire à cette condition, $\mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}}$ est appelé le $\mathfrak{p}$-conducteur de K. Le produit des $\mathfrak{p}$-conducteurs pour tous les idéaux premiers est un module de k qu'on appele le *conducteur* de K par rapport à k et qu'on désigne par $\mathfrak{f}_{K,k}$.

Comme notre but principal ici est de faire la part de ce qui est démontrable par des moyens purement arithmétiques, nous rapellerons quelques faits qui se démontrent sans employer les moyens transcendants:

1. Si $K' \subset K$, on a $H_{K',k} \supset H_{K,k}$. Si K' est une autre extension abélienne de k, $H_{KK',k}$ est la partie commune à $H_{K,k}$ et à $H_{K',k}$. Si k' est une extension finie quelconque de k, les idéaux de $H_{Kk',k'}$ premiers au discriminant relatif de K par rapport à k sont ceux dont les normes par rapport à k sont dans $H_{K,k}$[3]).

2. Pour chaque substitution S du groupe de Galois de K/k, il existe un idéal $\mathfrak{a}$ de k premier à un module $\mathfrak{m}$ quelconque donné à l'avance et tel que $S = \left(\frac{K/k}{\mathfrak{a}}\right)$.

Cette proposition est la conséquence presque immédiate de la suivante: si $(K:k)$ est un nombre premier l, il est impossible que tous les idéaux premiers de k premiers à $\mathfrak{m}$ se décomposent complètement dans K[4]). Ce fait a été déduit par l'un de nous de l'«inégalité arithmétique» de la théorie du corps de classes[5]). Mais quand on ne vise qu'à démontrer la proposition particulière énoncée, on peut donner à la démonstration générale une forme un peu plus courte, quoiqu'identique quant au fond. Supposons en effet que $(K:k) = l$ et que tous les idéaux premiers de k premiers à $\mathfrak{m}$ se décomposent complètement dans K. Si k_1 est une extension de k étrangère à K par rapport à k, tous les idéaux premiers premiers à $\mathfrak{m}$ de k_1 se décomposent totalement dans Kk_1. On peut donc supposer que k contient les racines primitives l-ièmes de l'unité et est complètement imaginaire. Soit alors $K = k(\sqrt[l]{\alpha})$. Soient $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_h$ les diviseurs premiers de $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{p}_0$ un idéal premier ne divisant pas $\mathfrak{m}$. Soit N un exposant tel que tout nombre de $k \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_i^N}$ $(i = 0, 1, \ldots, h)$ soit puissance l-ième exacte dans $k_{\mathfrak{p}_i}$, et soit γ un nombre qui n'est pas

[3]) Voir Chevalley (1, p. 426) ou Hasse (1, Teil II, I, § 4).

[4]) Voir Chevalley (1, p. 427 et p. 442).

[5]) Voir Chevalley (1, p. 442).

puissance l-ième exakte dans $k_{\mathfrak{p}_0}$. Determinons un nombre β de k satisfaisant aux congruences

$$\beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_i^N} \qquad (i = 1, 2, \ldots, h) \qquad \beta \equiv \gamma \pmod{\mathfrak{p}_0^N}.$$

Alors $k_1 = k(\sqrt[l]{\alpha\beta})$ est étranger à K, car $\mathfrak{p}_0$ est complètement décomposé dans K et ne l'est pas dans k_1. D'autre part, si $\mathfrak{P}_i$ est un facteur premier de $\mathfrak{p}_i$ dans k_1, $(i = 1, 2, \ldots, h)$, le polynome $x^l - \alpha$ se décompose en facteurs linéaires dans $(k_1)_{\mathfrak{P}_i}$ et par suite $\mathfrak{P}_i$ se décompose complètement dans $k_1 K$: tous les idéaux premiers de k_1 se décomposent complètement dans $K k_1$.

Nous pouvons donc supposer directement que $\mathfrak{m} = (1)$. Dans ces conditions tout idéal de k est norme relative d'un idéal de K. Désignons par $\mathfrak{a}$ les idéaux de k, par $\mathfrak{A}$ ceux de K, par A les nombres $\neq 0$ de K, par E les unités de K. Les idéaux de K de norme relative (1) sont les $\mathfrak{A}^{1-S}$, S désignant un générateur du groupe de Galois. D'où

$$(\mathfrak{A}:\mathfrak{A}^{1-S}(A)) = (\mathfrak{a}:[N(A)])\,^{6)}.$$

Mais, le premier membre s'écrit $\dfrac{[\mathfrak{A}:(A)]}{[\mathfrak{A}^{1-S}(A):(A)]}$ et l'homomorphie $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^{1-S}$ donne

$$[\mathfrak{A}^{1-S}(A):(A)] = \frac{[\mathfrak{A}:(A)]}{[\mathfrak{D}:(A)]}$$

où on désigne par $\mathfrak{D}$ les idéaux tels que $\mathfrak{D}^{1-S}$ soit principal (idéaux des classes ambiges). D'où

$$[\mathfrak{a}:(N(A))] = [\mathfrak{D}:(A)] = [\mathfrak{D}:\mathfrak{a}(A)][\mathfrak{a}(A):(A)] = [\mathfrak{D}:\mathfrak{a}(A)]\big[\mathfrak{a}:[\mathfrak{a},(A)]\big]$$

$$\big[[\mathfrak{a},(A)]:(N(A))\big] = [\mathfrak{D}:\mathfrak{a}(A)].$$

Les nombres A tels que $(A) = \mathfrak{A}$ sont ceux dont la puissance $1 - S$ est une unité. Désignons-les par Δ. Le premier membre vaut

$$[(\Delta):(N(A))] = [\Delta:N(A)E] = (\Delta:\alpha E)[\alpha E:N(A)E]$$
$$= (H:E^{1-S})[\alpha E:N(A)E]$$

en désignant par H les unités de K de norme relative 1. Le second membre de (1) s'écrit $[\mathfrak{D}^{1-S}:(A)^{1-S}]$. Or les $\mathfrak{D}^{1-S}$ sont les idéaux (Θ), Θ désignant les nombres de K dont les normes relatives sont des unités. Donc

$$[\mathfrak{D}:\mathfrak{a}(A)] = (\Theta:A^{1-S}E) = [N(\Theta):N(E)]$$

et nous arrivons à l'égalité

$$[N(\Theta):N(E)] = (H:E^{1-S})[\alpha E:N(A)E].$$

Or, au moyen du théorème de Herbrand sur les unités et du lemme de Herbrand (dont le premier peut ici s'énoncer et se démontrer plus simp-

---

[6]) Nous écrivons $N(\ldots)$ pour désigner la norme de K à k.

lement que dans le cas général parceque k est complètement imaginaire), on démontre que

$$(H : E^{1-S}) = l[\varepsilon : N(E)] = l[\varepsilon : N(\Theta)]\,[N(\Theta) : N(E)]$$

ce qui conduit à une contradiction.

3. Il résulte de 2. que le groupe des idéaux de $H_{K,k}$ premiers à un module $\mathfrak{m}$ est d'indice $(K : k)$ dans le groupe des idéaux de k premiers au discriminant relatif de K et à $\mathfrak{m}$. On en déduit un théorème d'unicité: si K' est une autre extension abélienne de k, et si les idéaux de $H_{K,k}$ et de $H_{K',k}$ premiers à un certain module $\mathfrak{m}$ sont les mêmes, on a $K = K'$. En effet, en vertu de 1., on doit alors avoir

$$(KK' : K) = (KK' : K') = 1.$$

4. Si un idéal $\mathfrak{a}$ de $\overline{H}^{\mathfrak{f}_{K,k}}_{K,k}$ est premier à un module $\mathfrak{m}$, il appartient à $\overline{H}^{\mathfrak{m}}_{K,k}$. En effet, on peut evidemment supposer que $\mathfrak{m}$ est multiple de $\mathfrak{f}_{K,k}$. Soit $\mathfrak{a} = (\alpha) N_{K,k}(\mathfrak{A})$ où $\alpha \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{f}_{K,k})$ et où $\mathfrak{A}$ est un idéal de K premier à $\mathfrak{f}_{K,k}$. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier divisant $\mathfrak{m}$ mais non $\mathfrak{f}_{K,k}$, et si f est le degré relatif d'un facteur premier $\mathfrak{P}$ de $\mathfrak{p}$ dans K, $\mathfrak{p}$ intervient dans (α) avec un exposant multiple de f. Il résulte de là que α est reste normique $(\mathrm{mod}\, \mathfrak{m})$[7]: $\alpha \equiv N_{K,k}(A) \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{m})$ et $\mathfrak{a} \equiv N_{Kk}(A\mathfrak{A})$ $(\mathrm{mod}\, \mathfrak{m})$. L'idéal $A\mathfrak{A}$ est d'ailleurs premier à $\mathfrak{m}$, ce qui prouve notre proposition.

Donc les divers groupes $\overline{H}^{\mathfrak{m}}_{K,k}$ relatifs aux modules $\mathfrak{m}$ multiples de $\mathfrak{f}_{K,k}$ sont des groupes de congruence «égaux».

Inversement, si un groupe de congruence H est défini modulo $\mathfrak{m}$ et si H est «égal» à $\overline{H}^{\mathfrak{f}_{K,k}}_{K,k}$, H est le groupe $\overline{H}^{\mathfrak{m}}_{K,k}$. En effet, soit $\mathfrak{a}$ un idéal de H, et soit $\mathfrak{n}$ un module multiple de $\mathfrak{m}$ et de $\mathfrak{f}_{K,k}$, tel que les idéaux premiers à $\mathfrak{n}$ de H et de $\overline{H}^{\mathfrak{f}_{K,k}}_{K,k}$ soient les mêmes. Il existe dans H un idéal $\mathfrak{a}' \equiv \mathfrak{a} \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{m})$ et premier à $\mathfrak{n}$. Cet idéal est premier à $\mathfrak{n}$ et est dans $\overline{H}^{\mathfrak{f}_{K,k}}_{K,k}$: il est dans $\overline{H}^{\mathfrak{n}}_{K,k}$, et a fortiori dans $\overline{H}^{\mathfrak{m}}_{K,k}$: il en est de même de $\mathfrak{a}$ qui lui est congru $(\mathrm{mod}\, \mathfrak{m})$. Réciproquement, si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\overline{H}^{\mathfrak{m}}_{K,k}$, $\mathfrak{a}$ est congru $(\mathrm{mod}\, \mathfrak{m})$ à la norme relative d'un idéal $\mathfrak{A}$ de K premier à $\mathfrak{m}$; il existe un idéal $\mathfrak{A}'$ de K congru à $\mathfrak{A}$ $(\mathrm{mod}\, \mathfrak{m})$ et premier à $\mathfrak{n}$. $N_{K,k}(\mathfrak{A}')$ est dans $\overline{H}^{\mathfrak{f}_{K,k}}_{K,k}$ et est premier à $\mathfrak{n}$; donc cet idéal est dans H et il en est de même de $\mathfrak{a}$ qui lui est congru $(\mathrm{mod}\, \mathfrak{m})$.

---

[7]) En effet, $K_{\mathfrak{P}}$ est une extension cyclique non ramifiée de $k_{\mathfrak{p}}$ de degré f, donc corps de classes pour le groupe des nombres de k dont l'exposant est divisible par f (Chevalley 1, p. 423). α étant reste normique $(\mathrm{mod}\, \mathfrak{p}^{\infty})$ pour tous les facteurs premiers $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{m}$ est reste normique $(\mathrm{mod}\, \mathfrak{m})$.

Nous dirons que K *est corps de classes sur k quand $H_{K,k}$ sera «égal»* à $\overline{H}^{\mathfrak{f}_{K,k}}_{K,k}$. Si alors H est un groupe de congruence quelconque «égal» à $\overline{H}^{\mathfrak{f}_{K,k}}_{K,k}$ nous dirons aussi que K est corps de classes sur k pour H.

II. Conséquences de la formule de la somme.

Nous supposerons à partir de maintenant démontré le fait suivant[8]):

S. *Si* $\mathfrak{o}$ *est une algèbre simple de centre* k, *la somme* $\sum_{\mathfrak{p}} \varrho_{\mathfrak{p}}$ *de tous les invariants de* $\mathfrak{o}$ *est* $\equiv 0 \pmod 1$.

M. Hasse a montré[9]) que la proposition S. permet de démontrer arithmétiquement que: si K est relativement cyclique par rapport à k, le groupe $H_{K,k}$ est un groupe de congruence définissable $(\mathrm{mod}\, \mathfrak{f}_{K,k})$. Comme ce groupe contient les normes relatives des idéaux de K premiers à $\mathfrak{f}_{K,k}$ il contient le groupe $\overline{H}^{\mathfrak{f}_{K,k}}_{K,k}$. On étend tout de suite cette proposition aux sur-corps relativement abéliens K quelconques: si K est composé des corps relativement cycliques $K_1, K_2, \ldots, K_h$, $H_{K,k}$ est l'intersection des groupes $H_{K_i,k}$, et $\overline{H}^{\mathfrak{f}_{K,k}}_{K,k}$ est contenu dans tous les groupes $\overline{H}^{\mathfrak{f}_{K,k}}_{K_i,k}$ qui sont eux-mêmes contenus dans les $H_{K_i,k}$. Donc $\overline{H}^{\mathfrak{f}_{K,k}}_{K,k}$ est contenu dans $H_{K,k}$.

Il résulte de là que, pour montrer que K est corps de classes sur k, il suffit de montrer que, pour un module $\mathfrak{m}$ convenable multiple de $\mathfrak{f}_{K,k}$, $\overline{H}^{\mathfrak{m}}_{K,k}$ est d'indice $\leqq (K:k)$. En effet, $\overline{H}^{\mathfrak{m}}_{K,k}$ est contenu dans le groupe des idéaux premiers à $\mathfrak{m}$ de $H_{K,k}$ qui est d'indice $(K:k)$.

Nous pouvons alors démontrer le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit $K \supset K' \supset k$. Considérons les trois propositions:* a) *K est corps de classes sur K',* b) *K' est corps de classes sur k;* c) *K est corps de classes sur k.* a) *et* b) *entraînent* c). c) *entraîne* b).

1. Supposons a) et b). Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $H_{K,k}$. Donc $\mathfrak{a}$ est contenu dans $\overline{H}^{\mathfrak{f}_{K,k}}_{K',k}$[10]): on a

$$\mathfrak{a} \equiv N_{K'k}(\mathfrak{A}') \pmod{\mathfrak{f}_{K,k}} \tag{1}$$

où $\mathfrak{A}'$ est un idéal de K' premier à $\mathfrak{f}_{K,k}$. On a

$$\left(\frac{K/K'}{\mathfrak{A}'}\right) = \left(\frac{K/k}{N_{K'k}(\mathfrak{A}')}\right) = \left(\frac{K/k}{\mathfrak{a}}\right) = 1$$

---

[8]) Voir Hasse (2, 6. 54).

[9]) Voir Hasse (2, 6. 71).

[10]) $\mathfrak{a}$ est contenu dans $H_{K',k}$, donc dans $\overline{H}^{\mathfrak{f}_{K',k}}_{K',k}$ et est premier à $\mathfrak{f}_{K,k}$.

et, par suite, $\mathfrak{A}' \subset H_{K,K'} = \overline{H}_{K,K'}^{\mathfrak{f}_{K,k}}$. Donc

$$\mathfrak{A}' \equiv N_{K/K'}(\mathfrak{A}) \pmod{\mathfrak{f}_{K,k}} \tag{2}$$

où $\mathfrak{A}$ est un idéal de K premier à $\mathfrak{f}_{K,k}$.

La comparaison de (1) et de (2) montre que $\mathfrak{a}$ est dans $\overline{H}_{K,k}^{\mathfrak{f}_{K,k}}$ ce qui démontre c).

2. Supposons c). Si A est le groupe des idéaux de K premiers à $\mathfrak{f}_{K,k}$, la correspondance $\mathfrak{a} \to \left(\frac{K/k}{\mathfrak{a}}\right)$ définit une isomorphie de $A/H_{K,k}$ avec le groupe de Galois de K/k. Pour chaque élément S du groupe de Galois de K/K', il existe un idéal $\mathfrak{A}_S$ de K' premier à $\mathfrak{f}_{K,k}$ tel que

$$S = \left(\frac{K/K'}{\mathfrak{A}_S}\right) = \left(\frac{K/k}{N_{K',k}(\mathfrak{A}_S)}\right).$$

Or, $N_{K',k}(\mathfrak{A}_S) \subset \overline{H}_{K',k}^{\mathfrak{f}_{K,k}}$. Il résulte de là que $H_{K,k}$ est un sous-groupe d'indice $\geqq (K:K')$ dans $\overline{H}_{K',k}^{\mathfrak{f}_{K,k}}$, et par suite, que ce dernier groupe est d'indice $\leqq n$ dans A, ce qui démontre que K' est corps de classes sur k.

De même on peut démontrer le

Lemme 1. *Si K est corps de classes sur k pour le groupe H, et si H' est un groupe contenant H, K contient un corps K' qui est corps de classes sur k pour H'.*

Supposons H défini $\pmod{\mathfrak{m}}$ et soit A le groupe des idéaux de k premiers à $\mathfrak{m}$. La correspondance $\mathfrak{a} \to \left(\frac{K/k}{\mathfrak{a}}\right)$ définit une isomorphie de A/H avec le groupe de Galois de K/k. Les éléments de ce groupe qui correspondent à des classes $(\bmod H)$ formées d'éléments de H' forment un sous-groupe g. Soit K' le corps des nombres de K invariants par les opérations de g. Les idéaux premiers à $\mathfrak{m}$ de $H_{K',k}$ sont ceux de H'. Par suite K' est corps de classes sur k pour H'.

III. Démonstration du théorème réciproque.

Lemme 2. *Si H est un groupe de congruence d'indice n dans un corps k qui contient les racines primitives n-ièmes de l'unité, il existe un sur-corps K relativement abélien de k qui est corps de classes sur k pour le groupe H.*

En effet, on démontre[11]) qu'il existe dans k deux modules $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ premiers entre eux, deux groupes de congruence H_1, H_2 et deux sur-corps relativement abéliens K_1, K_2 tels que 1. H_i soit défini $(\bmod\ \mathfrak{m}_i)$ $(i = 1, 2)$, 2. H contienne H_1, 3. chaque idéal de H_1 soit congru $(\bmod\ \mathfrak{m}_1)$ à un

[11]) Voir Chevalley (1, p. 468).

idéal de la forme $\mathfrak{f}_2\mathfrak{a}_1^n$, $\mathfrak{a}_1$ étant premier à $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{f}_2$ n'étant divisible que par des facteurs premiers de $\mathfrak{m}_2$, 4. les idéaux premiers ne divisant pas $\mathfrak{m}_1$ soient non-ramifiés dans K_1; les idéaux premiers divisant $\mathfrak{m}_2$ soient complètement décomposés dans K_1, 5. qu'on ait les propriétés analogues à 3. et 4. obtenues en permutant les indices 1 et 2, 6. que, A_1 et A_2 désignant les groupes des idéaux de k premiers à $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, on ait

$$(A_1 : H_1)(A_2 : H_2) = (K_1 : k)(K_2 : k),$$

7. que $\mathfrak{f}_{K_i, k}$ divise $\mathfrak{m}_i$ $(i = 1, 2)$.

Il résulte de 3., 4., 5., 7. que $\overline{H}^{\mathfrak{m}_i}_{K_i, k}$ contient H_i $(i = 1, 2)$. Comme, d'autre part, ce groupe est contenu dans $H_{K_i, k}$, son indice est $\geqq (K_i : k)$. En vertu de 6., cet indice doit alors être égal à $(K_i : k)$, donc K_1 est corps de classes sur k pour H_1. En vertu du Lemme 1, K_1 contient un corps K qui est corps de classes sur k pour le groupe H.

Théorème. *Si K est un sur-corps relativement abélien de k, K est corps de classes sur k.*

Nous démontrerons ce théorème par récurrence sur $(K : k)$. Il est trivial pour $(K : k) = 1$. Supposons-le démontré pour toutes les extensions de degré relatif $< n$, et soit $(K : k) = n$. Soit ζ une racine primitive n-ième de l'unité, et soit $k_1 = k(\zeta)$. Donc $(k_1 : k)$ divise $\varphi(n)$ qui est $< n$, et k_1 est corps de classes sur k. Soit $Kk_1 = K_1$. Donc $(K_1 : k_1)$ divise n. Par suite il y a un corps K_1^* qui est corps de classes sur k_1 pour le groupe H_{K_1, k_1}. Donc les groupes H_{K_1, k_1}, $H_{K_1^*, k_1}$ sont des groupes de congruence «égaux», et par suite $K_1^* = K_1$ (voir § 1, 3).

K_1 est abélien par rapport à k; de plus K_1 est corps de classes sur k_1 et k_1 est corps de classes sur k. Donc (Théorème 1), K_1 est corps de classes sur k; K, étant contenu dans K_1, est aussi corps de classes sur k (Lemme 1).

Bibliographie.

C. Chevalley.

[1] La théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux, Journ. of College of Sci. Tokyo 9 (1933), part. II, p. 365.

[2] Démonstration d'une hypothèse de M. Artin, Hamb. Abhandlg. 11.

H. Hasse.

[1] Bericht über neuere Untersuchungen ... Teubner 1930.

[2] Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper, Math. Annalen 107 (1933), S. 731.

Ch. C. Tsen.

[1] Divisionsalgebren über Funktionenkörpern, Gött. Nachr. 1933, S. 335.

(Eingegangen am 31. 12. 1934.)

Über gewisse Beziehungen zwischen der Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme und algebraischer Zahlkörper.

Von

Otto Schilling in Göttingen*).

Kennzeichnung der Fragestellung und Übersicht.

In den letzten Jahren war man in der Theorie der algebraischen Zahlkörper hauptsächlich bestrebt, die Sätze der Klassenkörpertheorie auf die relativ-galoisschen Körper zu übertragen. Die Darstellungstheorie der endlichen Gruppen und hyperkomplexen Systeme konnte in den Untersuchungen von E. Artin, H. Hasse und E. Noether zur Behandlung von in dieser Richtung liegenden zahlentheoretischen Problemen herangezogen werden. Diese abstrakt algebraische Methode (gemeint ist das Hyperkomplexe) ermöglichte zuerst neue Formulierungen bekannter Tatsachen über relativ-zyklische Körper. Sie ist aber so stark und tiefgehend, daß sich die neuen „Deutungen" auf allgemeinere Zahlkörper als die relativ-zyklischen — also weitergehend als die reine Formulierung! — übertragen lassen. Es sei nur an den Satz vom verallgemeinerten Hauptgeschlecht von E. Noether[1]) und an das Hassesche Zerlegungsgesetz[2]) erinnert. Hasses neues Zerlegungsgesetz relativ-galoisscher Körper — Charakterisierung des Zerlegungstypus eines Primideals $\mathfrak{p}$ in k in einem galoisschen Oberkörper K — heißt: „Der Relativgrad f der Primteiler in K eines nicht in der Relativdiskriminante von K aufgehenden Primideals von k ist gleich dem frühesten Exponenten, für den $A_{\mathfrak{p}}^{f} \sim k_{\mathfrak{p}}$ wird für alle Algebren A aus der K zugeordneten Gruppe $\mathfrak{K}$". (Dabei

---

*) Diese Arbeit wurde von der philosoph. Fakultät der Universität Marburg als Dissertation angenommen.

[1]) E. Noether, Der Hauptgeschlechtssatz für relativ-galoissche Zahlkörper. Math. Annalen 108 (1933).

[2]) R. Brauer, H. Hasse und E. Noether, Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren. Journ. f. Math. 167 (1932), S. 403.

ist $\mathfrak{K}$ die Gruppe der bezüglich k als Zentrum normalen Algebren, die von K zerfällt werden.) Es ist hervorzuheben, daß bei den Beweisen der obigen Sätze die algebraische Strukturtheorie der normalen einfachen Algebren im Vordergrund der Betrachtungen steht. Dabei bleibt die *feinere arithmetische Strukturtheorie* (Idealtheorie im Großen) in den Algebren ganz *unberücksichtigt*, es ist vielmehr nur das Verzweigungsverhalten der Algebren wesentlich, und dafür braucht man nur lokale arithmetische Betrachtungen, nicht die Idealtheorie im Großen. Man kann sich nun die Frage stellen: *Lassen sich algebraische und arithmetische Fragen der Zahlkörpertheorie mit Hilfe der bekannten Idealtheorie hyperkomplexer Zahlsysteme behandeln?*

In diesem bisher fast unbearbeiteten Gebiete kann von einer glatten abgeschlossenen Theorie noch nicht die Rede sein. H. Hasse, E. Noether und C. Chevalley haben zuerst bewußt die Beziehungen zwischen den Idealen von maximal kommutativen Teilkörpern und einbettenden Algebren studiert[3][4][5][6]. Die dortigen Untersuchungen sollen hier verallgemeinert und weitergeführt werden.

Nach E. Noether[4] werden die sogenannten *Gebiete* eingeführt: In einer normalen einfachen Algebra werden alle die Maximalordnungen in ein Gebiet zusammengefaßt, die mit einem maximal kommutativen Teilkörper gleichen Durchschnitt haben und an den Verzweigungsstellen der Algebra übereinstimmen. Außerdem soll eine Ordnung eines maximal kommutativen Teilkörpers *optimal eingebettet* heißen, wenn sie sich als genauer Durchschnitt einer Maximalordnung der Algebra mit dem Körper darstellen läßt. Mit diesen Begriffsbildungen kann man für Körper von Primzahlgrad folgende Sätze beweisen (§ 1): *Optimal einbettbar sind alle und nur die Ordnungen, deren Führer zur Diskriminante der Algebra prim ist*, oder: Die Durchschnitte der Gebiete mit einem maximal kommutativen Teilkörper erschöpfen im Falle einer normalen Algebra von Primzahlgrad genau alle diejenigen Ordnungen eines maximal kommutativen Teilkörpers, deren Führer zur Diskriminante der Algebra prim ist. Berücksichtigt man, daß nach E. Noether[4] für Matrixalgebren alle Ordnungen durch die Gebietseinteilungen erschöpft werden, so gelangt man

[3] H. Hasse, Über gewisse Ideale in einer einfachen Algebra. Actualités scientifiques et industrielles **109**, Volumes publiés à la mémoire de Jacques Herbrand. Paris, Hermann, 1934.

[4] E. Noether, Zerfallende verschränkte Produkte und ihre Maximalordnungen. Die gleiche Sammlung wie [3] 148 (1934).

[5] C. Chevalley, Sur certains idéaux d'une algèbre simple. Abh. Math. Sem. Hamburg **10** (1934).

[6] Schon E. Steinitz und I. Schur haben in ihren Arbeiten in den Math. Annalen **71/72** (1912) in anderer Form ähnliche Fragen behandelt.

zu folgendem Ergebnis: *Eine normale einfache Algebra von ungeradem Primzahlgrad ist dann und nur dann voll zerfallend, wenn jede Ordnung jedes Zerfällungskörpers in eine Maximalordnung optimal einbettbar ist.*

Die Beziehungen zwischen den Idealen aus Ordnungen $\mathfrak{O}'$ eines maximal kommutativen Teilkörpers und den Idealen der Maximalordnungen $\mathfrak{M}$ der einbettenden Algebra werden durch folgenden für die Hauptordnungen bei Chevalley, Hasse und E. Noether bewiesenen Satz geregelt: Enthält die Rechtsordnung eines zum Führer $\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{o}}$ und der Diskriminante der Algebra primen Linksideals $\mathfrak{L}$ der $\mathfrak{O}'$-optimalen Maximalordnung die Ordnung $\mathfrak{O}'$ optimal, so ist das Ideal das Erweiterungsideal eines regulären Ideals aus $\mathfrak{O}'$. Dieser Satz spielt eine wichtige Rolle. Dazu kommen noch Aussagen über Normen: Die Norm eines zur Diskriminante der Algebra und zum Führer primen Ordnungsideals ist gleich der reduzierten Norm des Erweiterungsideals nach einer die Ordnung optimal enthaltenden Maximalordnung. Außerdem kann man in einem galoisschen Oberkörper (fast alle) voll zerfallenden Primideale durch einen Satz über Erweiterungsideale elementar hyperkomplex charakterisieren: Dann und nur dann zerfällt $\mathfrak{p}$ in K vollständig, wenn in einer der endlich vielen Zerlegungen von $\mathfrak{p}$ in der Algebra eine Komponente auftritt, die Erweiterungsideal aus K ist (§ 2).

Für Matrixalgebren kann man noch feinere Aussagen machen (§ 3). C. Chevalley[7]) hat folgenden wichtigen Satz bewiesen: Zwei Linksideale einer Matrixalgebra sind dann und nur dann äquivalent, wenn ihre reduzierten Normen im Zentrum zur gleichen Idealklasse gehören. Mit diesem Satz und dem Satz über Erweiterungsideale kann man die „verallgemeinerten Hauptgeschlechtssätze" beweisen: *Die Idealklassen des verallgemeinerten Hauptgeschlechts nach* $\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{o}}$ *werden durch diejenigen Idealklassen erschöpft, die Ideale enthalten, deren Erweiterungsideale Hauptideale in einer* $\mathfrak{O}'$*-optimalen Maximalordnung der Algebra werden.* Dabei versteht man unter „verallgemeinertem Hauptgeschlecht" diejenige Untergruppe der absoluten Idealklassengruppe mod $\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{o}}$ in $\mathfrak{O}'$, deren Klassen Ideale mit Hauptidealnormen im Zentrum enthalten[8]). Außerdem kann man zeigen: *Die Hauptgebiete aller maximal kommutativen Teilkörper einer Matrixalgebra erschöpfen die Gesamtheit aller Maximalordnungen*[9]), oder:

---

[7]) In einer bisher unpublizierten Arbeit über Arithmetik in Matrixalgebren, die ich einsehen durfte. Vgl. auch I. Schur, Math. Annalen **72** (1912).

[8]) Für die Hauptordnung wurde dieser Satz zuerst von C. Chevalley bewiesen. Wir geben hier einen einfacheren, für beliebige Ordnungen gültigen Beweis.

[9]) Die Umkehrung, daß jede Hauptordnung in einer Maximalordnung liegt, ist klar. Vgl. H. Hasse [3]). Die obige Fragestellung bei E. Noether [4]).

Jedes Ideal ist Erweiterungsideal eines Ideals aus einem passenden maximal kommutativen Teilkörper.

Die von E. Noether vorgeschlagene Gebietseinteilung der Maximalordnungen einer Algebra ermöglicht — in teilweiser Beantwortung einer dort aufgeworfenen Fragestellung — den Beweis eines *Trennungssatzes* der verschiedenen galoisschen Zerfällungskörper durch die zugehörigen Gebiete. Im Sinne der Strukturtheorie, d. h., wenn man von verschiedenen isomorphen Darstellungen absieht, gelangt man zu folgendem Satze: *Verschiedene galoissche Zerfällungskörper erzeugen verschiedene Gebietseinteilungen.*

Zum Beweise dieses Satzes müssen die Sätze über Erweiterungsideale und ein analytischer Dichtigkeitssatz — oder sein arithmetisches Äquivalent [siehe unten Anm. [24])] — herangezogen werden (§ 4).

Zum Schluß (§ 5) wird der Zusammenhang zwischen den stark ambigen Idealen eines galoisschen Körpers mit Einbettungsfragen des verschränkten Gruppenringes untersucht. Unter dem verschränkten Gruppenring versteht man bei dem Faktorensystem 1 den Ring $\Omega = \sum \mathfrak{O} u_S$. Dabei bedeuten $\mathfrak{O}$ die Hauptordnung des Körpers und u_S die den Elementen der Gruppe zugeordneten Operatoren. Die Rechengesetze sind die des verschränkten Produktes. *Dann entsprechen die stark ambigen Ideale modulo den Idealen des Grundkörpers eineindeutig denjenigen Maximalordnungen, die den verschränkten Gruppenring enthalten.* Anschließend werden die gleichen Fragen für zyklische Körper vom Primzahlgrad l bei beliebigem Faktorensystem untersucht. Dabei muß man aber voraussetzen, daß das Faktorensystem α ($u^l = \alpha$) ganz ist, da sonst Ω nicht mehr Integritätsbereich im üblichen Sinne ist. (Für echt gebrochenes α ist $\Omega^2 \neq \Omega$, $\alpha^2 \notin \Omega$.) Wir erhalten das gleiche Ergebnis wie im voll zerfallenden Falle, nur tritt die Beschränkung auf zur Diskriminante der Algebra prime Ideale hinzu.

Die meisten Ergebnisse dieser Arbeit bleiben auch für algebraische Funktionenkörper einer Variablen richtig.

Herrn H. Hasse und Frl. E. Noether möchte ich meinen Dank für die Ratschläge und Hinweise bei der Abfassung dieser Arbeit aussprechen. Meinem Freunde C. Chevalley bin ich für die Einsichtnahme in eine bisher unpublizierte Arbeit sehr verbunden.

§ 1.

Optimale Einbettbarkeit.

Vorbereitende Bemerkungen und Zusammenstellung bekannter Tatsachen aus der Zahlentheorie.

K sei eine endliche algebraische Erweiterung des Zahlkörpers k. Es werden Ordnungen $\mathfrak{O}'$ aus K betrachtet, $\mathfrak{O}$ sei die Hauptordnung aus K,

$\mathfrak{o}$ die Hauptordnung aus k. Sei $\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{O}}$ der Führer von $\mathfrak{O}'$ bezüglich $\mathfrak{O}$ (gr. gem. Teiler der Ideale aus $\mathfrak{O}'$, die noch in $\mathfrak{O}$ Ideale sind), $\mathfrak{p}$ die endlichen Primstellen von k. Dann sind $\mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}}$ Ordnungen des halbeinfachen Systems $K_{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}$. In $K_{\mathfrak{p}}$ ist $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ die Hauptordnung. Dabei verstehen wir unter $\mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}}$ das Modulprodukt $\mathfrak{O}'\,\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$. Wie im Großen kann man nun einen Führer $\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}}:\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}}$ von $\mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}}$ bezüglich $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ definieren. Nach dem Modulsatz von E. Noether[10]) ist dann $\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}}:\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}} \cap K = \mathfrak{f}^{(\mathfrak{p})}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{O}}$, wobei $\mathfrak{f}^{(\mathfrak{p})}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{O}}$ den Beitrag der $\mathfrak{p}$-Teiler $\mathfrak{P}_i$ zu $\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{O}}$ bezeichnet ($\mathfrak{p}\,\mathfrak{O} = \mathfrak{P}_1^{l_1} \ldots \mathfrak{P}_r^{l_r}$). Daher ist in der üblichen Schreibweise $\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{O}} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{f}_{\mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}}:\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}}$. Man hat also

$$(\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{O}}, \mathfrak{p}) = 1 \longleftrightarrow \mathfrak{f}_{\mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}}:\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}} = 1 \longleftrightarrow \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}}.$$

Bei den folgenden Überlegungen werden die „regulären", d. h. die zum Führer primen Ideale von Ordnungen betrachtet. Für sie gilt bekanntlich die bekannte Dedekindsche Idealtheorie. Sei $(\mathfrak{p}, \mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{O}}) = 1$. Dann ist $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}} \supseteq \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$; wenn $\mathfrak{p}\,\mathfrak{O} = \mathfrak{P}_1^{l_1} \ldots \mathfrak{P}_r^{l_r}$, so ist $\mathfrak{p}\,\mathfrak{O}' = \mathfrak{P}'^{\,l_1}_1 \ldots \mathfrak{P}'^{\,l_r}_r$ mit $\mathfrak{P}'_i = \mathfrak{P}_i \cap \mathfrak{O}'$ Primideal in $\mathfrak{O}'$. Und es kann nicht vorkommen, daß verschiedenen regulären $\mathfrak{O}'$-Idealen gleiche Erweiterungsideale in $\mathfrak{O}$ entsprechen, wie man durch Zusammensetzen der einzelnen Stellen erkennt. Wir haben also eindeutige multiplikative Zuordnung zwischen den regulären Idealen von $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$. Die Norm von regulären $\mathfrak{O}'$-Idealen im Großen erklären wir durch Zusammensetzung der Beiträge an den einzelnen Stellen von k. Im Kleinen ist $N_{\mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}}} \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ das aus der Determinante der Übergangssubstitution von $\mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}}$ nach $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ in $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ abgeleitete Hauptideal. (Dies ist eine invariante Bildung wegen der Gültigkeit der Sätze der Elementarteilertheorie im Modul $\mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}}$ bezüglich des Hauptidealringes $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$.) Natürlich gilt aus diesen Gründen auch der Normenproduktsatz:

$$N_{\mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}}} \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{B}_{\mathfrak{p}} = N_{\mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}}} \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}} \cdot N_{\mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}}} \mathfrak{B}_{\mathfrak{p}}.$$

Sei A eine einfache normale Algebra mit dem Zentrum k, K ein beliebiger maximal kommutativer Teilkörper von A. Weiterhin $\mathfrak{O}'$ Ordnungen aus K, $\mathfrak{M}$ Maximalordnungen aus A. Wir geben dann folgende

Definition: *Eine Ordnung $\mathfrak{O}'$ aus K heiße dann und nur dann optimal in A einbettbar, wenn sich in A mindestens eine Maximalordnung $\mathfrak{M}$ finden läßt, die mit K genau die vorgegebene Ordnung $\mathfrak{O}'$ als Durchschnitt ergibt.* (Also keine echte Oberordnung von $\mathfrak{O}'$!)

Dann gilt der

Satz: *Ist $A = D$ Divisionsalgebra von Primzahlgrad, so ist eine Ordnung $\mathfrak{O}'$ eines beliebigen maximal kommutativen Teilkörpers von D dann und nur dann optimal einbettbar, wenn der Führer der Ordnung $\mathfrak{O}'$ prim zur Diskriminante von D ist.*

Beweis: Wir führen den Beweis in zwei Schritten.

a) Wenn $\mathfrak{O}'$ optimal eingebettet ist, so ist der Führer $\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{O}}$ prim zur Diskriminante der Divisionsalgebra D.

Wenn $\mathfrak{O}'$ optimal eingebettet ist, so ist die Ordnung an allen Stellen optimal eingebettet und umgekehrt: $\mathfrak{M} \cap K = \mathfrak{O}' \longleftrightarrow \mathfrak{M}_\mathfrak{p} \cap K_\mathfrak{p} = \mathfrak{O}'_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}$. Das folgt aus dem Noetherschen Modulsatz[10]). Ist nun $\mathfrak{p}$ ein Diskriminantenteiler von D, so gilt $\mathfrak{M}_\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{O}_\mathfrak{p}$, da wegen des Primzahlgrads von D dann $D_\mathfrak{p} = D^\mathfrak{p}$ Divisionsalgebra ist und nach einem Satz von Hasse[11]) nur eine einzige Maximalordnung $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}$ enthält, die dann notwendig die Hauptordnung $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ von $K_\mathfrak{p}$ enthält. Genauer $\mathfrak{M}_\mathfrak{p} \cap K_\mathfrak{p} = \mathfrak{O}_\mathfrak{p}$. Mit obigem zusammen folgt $\mathfrak{O}_\mathfrak{p} = \mathfrak{O}'_\mathfrak{p}$, d. h. $\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}'_\mathfrak{p}:\mathfrak{O}_\mathfrak{p}} = 1$, also ist nach der Vorbemerkung $\mathfrak{f}^{(\mathfrak{p})}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{O}} = 1$. Das ergibt die Behauptung.

b) Ist der Führer $\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{O}}$ prim zur Diskriminante von D, so ist $\mathfrak{O}'$ optimal einbettbar.

Zum Beweise teilen wir die Primstellen aus k in zwei Klassen ein:

1. Die $\mathfrak{p}_1$ sind Teiler der Norm des Führers, also nach Voraussetzung keine Diskriminantenteiler von D.

2. Die $\mathfrak{p}_2$ sind prim zu $N\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{O}}$.

Wir konstruieren uns nun ein zulässiges Komponentensystem von Maximalordnungen $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}$ im Kleinen, dies führt bei Durchschnittsbildung zu einer Maximalordnung $\mathfrak{M}$ im Großen. Ein „zulässiges" System von Maximalordnungen im Kleinen wollen wir eine Menge von Maximalordnungen $\{\mathfrak{M}_\mathfrak{p}\}$ ($\mathfrak{p}$ durchlaufe alle Primideale von k) nennen, wenn ihr Durchschnitt $[\mathfrak{M}_\mathfrak{p}]$ wirklich eine Maximalordnung $\mathfrak{M}$ im Großen ist. Eine absolute notwendige und hinreichende Zulässigkeitsbedingung ist schwer anzugeben. Geht man aber von einer festen Maximalordnung $\overline{\mathfrak{M}}$ mit den Komponenten $\overline{\mathfrak{M}}_\mathfrak{p}$ aus, so ergibt sich aus den Brandtschen Sätzen[12]), daß ein System $\{\mathfrak{M}_\mathfrak{p}\}$ dann und nur dann zulässig ist, wenn fast überall $\mathfrak{M}_\mathfrak{p} = \overline{\mathfrak{M}}_\mathfrak{p}$ ist. Wir wählen nun die Ausgangsmaximalordnung $\overline{\mathfrak{M}}$ als eine beliebige Maximalordnung, die $\mathfrak{O}$ optimal enthält. Nach Hasse[13]) ist das immer möglich. Dann wählen wir die Komponenten $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}$ folgendermaßen: $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}_1}$ irgendeine Maximalordnung von $D_{\mathfrak{p}_1}$, die $\mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}_1}$ optimal enthält. Eine solche kann nach E. Noether[14]) mittels komplementärer Basen konstruiert werden, weil $D_{\mathfrak{p}_1}$ nach Voraus-

---

[10]) E. Noether, Zerfallende verschränkte Produkte und ihre Maximalordnungen. § 2. Hilfssatz: „Jeder Modul ist durch seine Komponenten bestimmt".

[11]) H. Hasse, Über $\mathfrak{P}$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme. Math. Annalen 104 (1934) Satz 31.

[12]) Vgl. Anm. [11]), § 8.

[13]) Vgl. Anm. [3]).

[14]) Vgl. Anm. [4]).

setzung volle Matrixalgebra ist. Schließlich setzen wir $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}_2} = \overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{p}_2}$. Die hierdurch festgelegte Maximalordnung $\mathfrak{M} = [\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}_1}, \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}_2}]$ enthält nun nach Konstruktion $\mathfrak{O}'$ optimal. Dazu genügt es nach der schon oben festgestellten Tatsache, $\mathfrak{M} \cap K = \mathfrak{O}' \longleftrightarrow \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} \cap K_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}}$ für alle $\mathfrak{p}$, zu zeigen, daß jeweils $\mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}}$ in $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ optimal eingebettet ist. Dies ist nach Konstruktion der Fall für die $\mathfrak{p}_1$; für die $\mathfrak{p}_2$ ist $\mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$, und also nach Konstruktion $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} \cap K_{\mathfrak{p}} = \overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{p}} \cap K_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Wenn $\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{O}}$ nicht prim zur Diskriminante von D ist, so gibt es eine und nur eine Ordnung $\mathfrak{O}^*$ zwischen $\mathfrak{O}'$ und $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{O}' \subseteq \mathfrak{O}^* \subseteq \mathfrak{O}$, die optimal in $\mathfrak{M}$ eingebettet ist, nämlich $\mathfrak{M} \cap K$. Durch die Vorgabe des Führers $\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}^*:\mathfrak{O}}$ ist $\mathfrak{O}^*$ im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt (Gegenbeispiele findet man leicht), wohl aber nach dem Noetherschen Modulsatz durch die Komponenten $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} \cap K_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{O}^*_{\mathfrak{p}}$, von denen nur diejenigen von $\mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}}$ verschieden sind, für die $\mathfrak{p}$ gemeinsamer Teiler von $\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{O}}$ und der Diskriminante von D ist. Die Ordnung $\mathfrak{O}^*$ ist die früheste Ordnung, deren Führer ein zur Diskriminante von D primer Teiler von $\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{O}}$ ist.

Es ist *zweckmäßig*, den oben bewiesenen Satz auch in der von E. Noether[14]) eingeführten Sprache zu formulieren. Wir erinnern kurz an die dortige

Definition: *Sei A eine einfache normale Algebra über dem Zentrum k und K ein beliebiger maximal kommutativer Teilkörper. In ein Gebiet nach K werden immer alle solchen Maximalordnungen aus A gerechnet, die denselben Durchschnitt mit K haben und außerdem an den Verzweigungsstellen von A dieselben $\mathfrak{p}$-adischen Komponenten besitzen. Ist der Durchschnitt mit K die Hauptordnung, so handelt es sich um ein Hauptgebiet.*

Dann heißt unser Satz: Ist $A = D$ Divisionsalgebra vom Primzahlgrade, so ergeben die Durchschnitte der Gebiete mit dem fest ausgewählten maximal kommutativen Teilkörper K die Gesamtheit derjenigen Ordnungen in K, deren Führer zu den Verzweigungsstellen von D prim sind.

Wenn man nun den von E. Noether[15]) bewiesenen Satz (für Matrixalgebren A erschöpft die Gesamtheit der Durchschnitte aller Gebiete die Gesamtheit aller Ordnungen des betreffenden Teilkörpers) heranzieht, so gelangt man zu einer neuen Formulierung des Hauptsatzes der Algebrentheorie:

Satz: ***Wenn in einer normalen Algebra A von ungeradem Primzahlgrade über ihrem Zentrum jede Ordnung jedes maximal kommutativen Teilkörpers mindestens einmal optimal eingebettet ist, so zerfällt die Algebra A vollständig, und umgekehrt.***

---

[15]) Vgl. Anm. [4]), § 2, Satz 4.

Beweis: Wir nehmen an, daß $A = D$ Divisionsalgebra wäre. Dann liegt ein Widerspruch vor, da man stets Ordnungen konstruieren kann, die nicht optimal einbettbar sind. Wegen der Voraussetzung des ungeraden Grades treten sicher endliche Verzweigungsstellen der Algebra auf. Man nehme nun eine Ordnung irgendeines maximal kommutativen Teilkörpers, deren Führer mit den Verzweigungsstellen der Algebra gemeinsame Teiler hat[15a]). Die Umkehrung des Satzes ist schon vorweg festgestellt.

Bemerkungen: Der Satz gilt, wie der Beweis erkennen läßt, auch für beliebige normale Divisionsalgebren, die voll verzweigt sind. ($\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^n$ für die Verzweigungsstellen.)

Der Inhalt dieses Paragraphen gilt unverändert für Funktionenkörper einer Variablen mit endlichem Konstantenkörper.

§ 2.
Sätze über Erweiterungsideale.

Sei A eine normale einfache Algebra mit dem Zentrum k, $\mathfrak{M}$ eine beliebige Maximalordnung aus A, K ein beliebiger maximal kommutativer Teilkörper von A.

Ist zunächst $\mathfrak{M} \cap K = \mathfrak{O}$ die Hauptordnung von K, so haben H. Hasse, E. Noether und C. Chevalley[16]) die Frage beantwortet, wann ein $\mathfrak{M}$-Linksideal $\mathfrak{L}$ von A sich als Erweiterungsideal eines $\mathfrak{O}$-Ideals aus K darstellen läßt: $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{l}$. Sie haben gezeigt, daß dies sicher der Fall ist, wenn $\mathfrak{L}$ prim zur Diskriminante $\mathfrak{d}$ von A ist und auch die Rechtsordnung $\overline{\mathfrak{M}}$ von $\mathfrak{L}$ die Hauptordnung $\mathfrak{O}$ von K enthält.

Ist jetzt allgemeiner $\mathfrak{M} \cap K = \mathfrak{O}'$ eine beliebige Ordnung von K, so gilt ein entsprechender Satz, bei dem nur die Menge der betrachteten Linksideale $\mathfrak{L}$ weiter eingeschränkt ist.

Satz: *Ist $\mathfrak{O}'$ optimal in $\mathfrak{M}$ enthalten und ist $\mathfrak{L}$ ein zur Diskriminante $\mathfrak{d}$ von A und zum Führer $\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{O}}$ primes $\mathfrak{M}$-Linksideal, dessen Rechtsordnung $\overline{\mathfrak{M}}$ ebenfalls $\mathfrak{O}'$ optimal enthält, so ist $\mathfrak{L}$ Erweiterungsideal eines regulären $\mathfrak{O}'$-Ideals $\mathfrak{l}$, also $\mathfrak{L} = \mathfrak{M}\mathfrak{l}$, $(\mathfrak{l}, \mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{O}}) = 1$.*

Beweis: Wir teilen die Primstellen von k in zwei Klassen ein:

1. $\mathfrak{p}_1$ die Nichtteiler von $N\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{O}}$ und $\mathfrak{d}$.
2. $\mathfrak{p}_2$ die Teiler von $N\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{O}}$ oder $\mathfrak{d}$.

Nach Voraussetzung enthält das Linksideal $\mathfrak{L}$ nur Teiler $\mathfrak{p}_1$. Nach Hasse[3]) ist $\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}_1}$ Erweiterungsideal eines regulären Ordnungsideals $\mathfrak{l}_{\mathfrak{p}_1}$ aus $\mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}_1}$,

---

15a) Geeignete Potenzen jedes Primideals können als Führer auftreten, vgl. z. B. die Anmerkung in der Dedekindschen Diskriminantenarbeit, Ges. Werke Bd. I, S. 373, oder die Erläuterungen am Schluß.

16) Vgl. Anm. [3]), [4]), [5]).

denn es ist ja $A_{\mathfrak{p}_1} \sim 1$ und $\mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}_1} = \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_1}$. An den Stellen $\mathfrak{p}_2$ ist $\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}_2} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}_2}$ nach Voraussetzung. Zusammensetzung nach den Stellen ergibt:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{\mathfrak{p}_1} \cap \ldots \cap \mathfrak{L}_{\mathfrak{p}_2} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}_1} \mathfrak{l}_{\mathfrak{p}_1} \cap \ldots \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}_2} \cap \ldots = \mathfrak{M}\mathfrak{l},$$

wobei $\mathfrak{l} = \mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}_1} \mathfrak{l}_{\mathfrak{p}_1} \cap \ldots \mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}_2} \cap \ldots$ ist. Nach Konstruktion ist $\mathfrak{l}$ ein reguläres Ideal aus $\mathfrak{O}'$.

Für Divisionsalgebren $A = D$ von Primzahlgrad kann man den Satz über die Erweiterungsideale analog wie im Spezialfall $\mathfrak{O}' = \mathfrak{O}$ bei Hasse und Chevalley[3, 5]) verschärfen:

Satz: *Ist $\mathfrak{O}'$ optimal in $\mathfrak{M}$ enthalten und ist $\mathfrak{L}$ ein $\mathfrak{M}$-Linksideal prim zu $\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{o}}$, dessen Rechtsordnung $\overline{\mathfrak{M}}$ ebenfalls $\mathfrak{O}'$ optimal enthält, so ist $\mathfrak{L} = \mathfrak{Z}\mathfrak{M}\mathfrak{l}$, wo $\mathfrak{Z}$ ein zweiseitiges Ideal und $\mathfrak{l}$ ein reguläres $\mathfrak{O}'$-Ideal ist.*

Beweis: Aus $\mathfrak{L}$ trennen wir die zu $\mathfrak{d}$ nicht primen Komponenten — die hier zweiseitige $\mathfrak{M}$-Ideale sind — ab. Sie seien in $\mathfrak{Z}$ zusammengefaßt. Das Linksideal $\mathfrak{Z}^{-1}\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^*$ ist dann prim zu $\mathfrak{d}$. Es hat die gleiche Rechtsordnung $\overline{\mathfrak{M}}$ wie $\mathfrak{L}$. Nach dem vorigen Satze ist dann $\mathfrak{L}^* = \mathfrak{M}\mathfrak{l}$, wobei $\mathfrak{l}$ ein reguläres $\mathfrak{O}'$-Ideal ist. Daraus ergibt sich $\mathfrak{L} = \mathfrak{Z}\mathfrak{M}\mathfrak{l}$.

Ist speziell $A = \mathfrak{S} = k_n$ eine vollständige Matrixalgebra, so liefert der erste Satz:

Satz: *Enthält die Rechtsordnung eines Linksideals einer $\mathfrak{O}'$-optimalen Maximalordnung die Ordnung $\mathfrak{O}'$ optimal und ist das Ideal prim zum Führer der Ordnung, so ist das Linksideal ein Erweiterungsideal eines regulären $\mathfrak{O}'$-Ideals.*

Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen den Normen eines Ideals $\mathfrak{a}$ aus einer Hauptordnung $\mathfrak{O}$ und seines Erweiterungsideals $\mathfrak{M}\mathfrak{a}$ in A. Hierfür gilt:

Satz: *Ist $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{O}$ und $\mathfrak{a}$ ein zu $\mathfrak{d}$ primes $\mathfrak{O}$-Ideal, so ist $N_{\mathfrak{O}}\,\mathfrak{a} = N_{\text{red}}\,\mathfrak{M}\mathfrak{a}$.*

Beweis: Nach dem bekannten Vorbild von Hasse gehen wir zu den einzelnen Stellen $\mathfrak{p}$ aus k über und setzen dann zur Norm im Großen zusammen. Wegen der Voraussetzung genügt es, die zu $\mathfrak{d}$ primen Stellen $\mathfrak{p}$ zu betrachten. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die $\mathfrak{p}$-adische Maximalordnung $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ in der Form $\sum \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} c_{ik}$ vorliegt (c_{ik} ein System von Matrizeneinheiten). Es ist $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ ein Hauptidealring. In ihm werden Ideale $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = a_{\mathfrak{p}}\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ vom Höchstrang n betrachtet, diese besitzen, da $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ Hauptidealring ist, eine $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$-Basis $\omega'_1, \ldots, \omega'_n$ und es gilt: $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = (\omega'_1, \ldots, \omega'_n)\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}}$, wo $A_{\mathfrak{p}}$ eine reguläre n-reihige Matrix über $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ ist. Diese Matrix $A_{\mathfrak{p}}$ kann als Element von $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} = \sum \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} c_{ik}$ gedeutet werden. Außerdem gilt, da $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ Hauptidealring ist, $a_{\mathfrak{p}}(\omega_1, \ldots, \omega_n)\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} = (\omega'_1, \ldots, \omega'_n)\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}}$; $a_{\mathfrak{p}} \to A_{\mathfrak{p}}$ ist eine isomorphe Darstellung von $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ durch Matrizen in $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$. Wir identifizieren nun $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ mit dieser Darstellung: $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$, dann ist $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}}$. Hier-

aus liest man aber sofort die Behauptung ab. Denn bekanntlich ist $N_{\mathrm{red}}\,\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = N_{\mathrm{red}}\,\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}\,A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \cdot |A_{\mathfrak{p}}|$, während andererseits nach der Normdefinition in Zahlkörpern $N_{\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}}\,\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \cdot |A_{\mathfrak{p}}|$ ist.

Die Annahme, daß schon $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ mit dem vollen Matrizenring $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}^* = \Sigma\, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}\, c_{ik}$ zusammenfällt, ist in der Tat keine Einschränkung. Ist nämlich allgemein $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} = b_{\mathfrak{p}}^{-1}\,\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}^*\,b_{\mathfrak{p}}$ mit regulärem $b_{\mathfrak{p}}$ aus $A_{\mathfrak{p}}$, so schließt man folgendermaßen: Es sei entsprechend transformiert $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}} = b_{\mathfrak{p}}^{-1}\,\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}^*\,b_{\mathfrak{p}}$, also $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}^* \supseteq \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}^*$. Man hat

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}\,a_{\mathfrak{p}} = b_{\mathfrak{p}}^{-1}\,(\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}^*\,\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}^*\,b_{\mathfrak{p}}\,a_{\mathfrak{p}}\,b_{\mathfrak{p}}^{-1})\,b_{\mathfrak{p}},$$

also $N_{\mathrm{red}}\,\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = N_{\mathrm{red}}\,\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}^*\,\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}^*\,b_{\mathfrak{p}}\,a_{\mathfrak{p}}\,b_{\mathfrak{p}}^{-1}$. Nach dem ersten Teil des Beweises ist dies weiter

$$= N_{\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}^*}\,\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}^*\,b_{\mathfrak{p}}\,a_{\mathfrak{p}}\,b_{\mathfrak{p}}^{-1} = N_{\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}^*}\,b_{\mathfrak{p}}\,(b_{\mathfrak{p}}^{-1}\,\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}^*\,b_{\mathfrak{p}}\,a_{\mathfrak{p}})\,b_{\mathfrak{p}}^{-1} = N_{\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}^*}\,b_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}\,a_{\mathfrak{p}} \cdot b_{\mathfrak{p}}^{-1}$$

$$= N_{\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}}\,\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}\,a_{\mathfrak{p}} = N_{\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}}\,\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}.$$

Bemerkung: Der Satz gilt auch für die regulären Ideale einer beliebigen Ordnung $\mathfrak{O}'$, denn für sie ist $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}'$ für alle nicht in $N\,\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{O}}$ aufgehenden $\mathfrak{p}$.

Außerdem gilt der Normenproduktsatz:

Satz: $N_{\mathrm{red}}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} = N_{\mathrm{red}}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{b} \cdot N_{\mathrm{red}}\,\mathfrak{M}'\,\mathfrak{c}$, *wenn* $\mathfrak{M}'$ *die Rechtsordnung zu* $\mathfrak{M}\,\mathfrak{b}$ *bedeutet.*

Beweis: Es wird $N_{\mathrm{red}}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} = N\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} = N\,\mathfrak{b} \cdot N\,\mathfrak{c} = N_{\mathrm{red}}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{b}\,N_{\mathrm{red}}\,\mathfrak{M}'\,\mathfrak{c}$. Denn es ist, wie aus dem oben angegebenen Beweise hervorgeht, für Maximalordnungen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$, die $\mathfrak{O}$ optimal enthalten,

$$N_{\mathrm{red}}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{a} = N_{\mathrm{red}}\,\mathfrak{M}'\,\mathfrak{a} = N\,\mathfrak{a}.$$

Der Satz über Erweiterungsideale und ihre Normen wird in den folgenden Paragraphen eine wichtige Rolle spielen.

Wir wollen nun noch eine Charakterisierung der voll zerfallenden Primideale für galoissche Körper geben. Es sei der maximal kommutative Teilkörper K der normalen einfachen Algebra A galoissch bezüglich des Zentrums k und $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{O}$ wie vorher. Dann gilt für die Zerlegung der Primideale $\mathfrak{p}$ aus k in K: $\mathfrak{O}\,\mathfrak{p} = (\mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_g)^e$ mit $N\,\mathfrak{P}_i = \mathfrak{p}^f$, $efg = n$. Hier sollen nur Primideale $\mathfrak{p}$ betrachtet werden, die prim zur Diskriminante $\mathfrak{d}$ der Algebra A und prim zur Diskriminante des Körpers K bezüglich k sind. Also ist immer $e = 1$ und $fg = n$. Dann gilt der

Satz: *Dann und nur dann zerfällt* $\mathfrak{p}$ *in* $\mathfrak{O}$ *vollständig* ($f = 1$, $g = n$), *wenn in einer der endlich vielen möglichen Zerlegungen* $\mathfrak{M}\,\mathfrak{p} = \overline{\mathfrak{P}}_1 \ldots \overline{\mathfrak{P}}_n$ *in einseitige unzerlegbare Ideale von* A *ein einseitiges Ideal* $\overline{\mathfrak{P}}_1$ *vorkommt, dessen Rechtsordnung* $\mathfrak{M}_1$ *die Hauptordnung* $\mathfrak{O}$ *optimal enthält.*

Beweis: 1. Es sei $\mathfrak{O}\,\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_n$. Dann ist

$$\mathfrak{M}\,\mathfrak{p} = \mathfrak{M}\,\mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{M}_1\,\mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{M}_{n-1}\,\mathfrak{P}_n.$$

Dabei ist $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{O}$ nach Voraussetzung und $\mathfrak{M}_1 \supseteq \mathfrak{O}$, weil $\mathfrak{M}_1$ als Rechtsordnung von $\mathfrak{M}\mathfrak{P}_1$ die Elemente aus $\mathfrak{O}$ enthalten muß. So fortfahrend ergibt sich, daß das Produkt der $\mathfrak{M}_{i-1}\mathfrak{P}_i$ ein eigentliches ist und daß die Faktoren ganze Ideale sind. Auf Grund der oben bewiesenen Normtatsachen folgt dann weiter, daß die gefundene Produktdarstellung von $\mathfrak{M}\mathfrak{p}$ eine der nach Hasse[11]) vorhandenen Zerlegungen von $\mathfrak{M}\mathfrak{p}$ in ein eigentliches Produkt von unzerlegbaren Idealen ist.

2. Umgekehrt sei $\mathfrak{M}\mathfrak{p} = \mathfrak{M}\overline{\mathfrak{P}}_1 \cdot \mathfrak{M}_1\overline{\mathfrak{P}}_2 \ldots \mathfrak{M}_{n-1}\overline{\mathfrak{P}}_n$ mit $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{O}$, $\mathfrak{M}_1 \supseteq \mathfrak{O}$ eine eigentliche Produktdarstellung mit unzerlegbaren Faktoren. Wegen der Voraussetzung ist dann $\mathfrak{M}\overline{\mathfrak{P}}_1\mathfrak{M}_1$ ein Erweiterungsideal aus $\mathfrak{O}$: $\mathfrak{M}\overline{\mathfrak{P}}_1 = \mathfrak{M}\mathfrak{a}$. Das Ideal $\mathfrak{a}$ ist ganz. Nach dem Normensatz ist aber $\mathfrak{p} = N_{\text{red}}\,\mathfrak{M}\overline{\mathfrak{P}}_1 = N_{\text{red}}\,\mathfrak{M}\mathfrak{a} = N\mathfrak{a}$. Also ist $\mathfrak{a}$ ein Primideal ersten Grades von K, d. h. aber $f = 1$.

Zum Schluß wollen wir einen kurzen Abriß der Theorie der Erweiterungsdivisoren in einer normalen einfachen Algebra über einem Funktionenkörper einer Variablen geben. Dann kann man sinngemäß auch die Sätze dieses Paragraphen auf Funktionenkörper übertragen. Es sei k ein algebraischer Funktionenkörper einer Variablen mit beliebigem vollkommenen Konstantenkörper P, A sei eine normale einfache Algebra über k, K ein maximal kommutativer Teilkörper von A. Wir zeichnen nun in k ein transzendentes Element x aus und betrachten die Idealtheorie in k, K und A bezüglich der Hauptordnung $\mathsf{P}[x]$. Es mögen $\mathfrak{p}$ die bezüglich x endlichen Primstellen und $\mathfrak{p}_1^{\infty}, \ldots, \mathfrak{p}_r^{\infty}$ die bezüglich x unendlichen Primstellen aus k sein. Jedes Ideal $\mathfrak{A}$ und jede Maximalordnung $\mathfrak{M}$ aus A sind dann durch die zugehörigen $\mathfrak{p}$-adischen Komponenten eindeutig bestimmt: $\mathfrak{A} = [\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}, \ldots]$ und $\mathfrak{M} = [\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}, \ldots]$ [vgl. Anm. [11])]. Die Idealtheorie ist nach Hasse durch die Idealtheorie an den einzelnen Stellen bestimmt. Zwei Ideale unterscheiden sich nur in endlich vielen Komponenten.

Nach E. Witt[17]) erklären wir die Divisoren aus A durch folgende

Definition: *Ein Schema* $[\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}, \ldots, \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}_1^{\infty}}, \ldots, \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}_r^{\infty}}]$ *heiße ein Divisor aus* A, *wenn es aus einem Ideal* $[\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}, \ldots]$ (*bezüglich* x) *durch Hinzufügen von endlich vielen Komponenten an den Stellen* $\mathfrak{p}_1^{\infty}, \ldots, \mathfrak{p}_r^{\infty}$ *entsteht.*

Die Einsdivisoren $\mathfrak{E}$ sind dann Schemata, die nur Maximalordnungen als Komponenten haben. Das Produkt von zwei Divisoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ werde durch Multiplikation der Komponenten gebildet. Ein Produkt heiße eigentlich, wenn die Komponentenideale die eigentliche Multiplikation

[17]) E. Witt, Riemann-Rochscher Satz und Z-Funktion im Hyperkomplexen. Math. Annalen 110 (1934).

zulassen. Die Divisoren von A bilden dann ein Gruppoid, das nicht von der Auswahl des transzendenten Elementes x abhängt. Die Differenten $\mathfrak{D}_\mathfrak{p}$ der Komponenten $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}$ eines Einsdivisors $\mathfrak{E}$ bestimmen einen zweiseitigen $\mathfrak{E}$-Divisor $\mathfrak{D}$, den Differentendivisor von $\mathfrak{E}$. Nun sei I der Einsdivisor von K. Wir nennen einen Einsdivisor $\mathfrak{E}$ von A eine Erweiterung von I, wenn die Komponenten von I als Mengen in den Komponenten von $\mathfrak{E}$ liegen. Den Erweiterungsdivisor $\mathfrak{E}\mathfrak{a}$ eines Divisors $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \ldots]$ aus K mit einem Erweiterungsdivisor $\mathfrak{E} = [\mathfrak{M}_\mathfrak{p}, \ldots]$ von I erklären wir durch das Schema $[\mathfrak{M}_\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \ldots]$. Dann gelten folgende Verallgemeinerungen der Sätze über Erweiterungsideale, die dann die Grundlage für weitere Betrachtungen bilden:

Satz 1: *Es existieren stets Einsdivisoren $\mathfrak{E}$ in A, die Erweiterungsdivisoren von I sind.*

Satz 2: *Ist der Rechtseinsdivisor $\mathfrak{E}^*$ eines zum Differentendivisor $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{E}$ primen $\mathfrak{E}$-Linksdivisors $\mathfrak{L}$ Erweiterungsdivisor des Einsdivisors I, so ist $\mathfrak{L}$ Erweiterungsdivisor eines Divisors $\mathfrak{l}$ aus K, d. h. $\mathfrak{L} = \mathfrak{E}\mathfrak{l}$.*

Satz 3: *Bei Divisionsalgebren von Primzahlgrad kann die Voraussetzung, daß $\mathfrak{L}$ prim zum Differentendivisor $\mathfrak{D}$ ist, fortfallen. $\mathfrak{L}$ ist dann in der Form $\mathfrak{L} = \mathfrak{Z}\mathfrak{E}\mathfrak{l}$ darstellbar, wo $\mathfrak{Z}$ ein zweiseitiger $\mathfrak{E}$-Divisor ist.*

Beweis zu den Sätzen 1, 2, 3: Man gehe zu den Stellen über und gehe nach dem Vorbild von Hasse[3]) vor.

§ 3.

Arithmetische Untersuchungen über Matrixalgebren.

Zu feineren Aussagen über arithmetische Beziehungen zwischen maximal kommutativen Teilkörpern und Algebren gelangt man, wenn man sich auf Matrixalgebren beschränkt. Hier kann man, weil die bisher im Kleinen gebrauchte Methode der Einbettung von Ordnungen in Maximalordnungen aufs Große übertragbar ist, die Verhältnisse überschauen.

C. Chevalley hat in einer bisher unveröffentlichten Arbeit die Hauptergebnisse dieser Theorie entwickelt.

Sei $\mathfrak{S} = k_n$ die vollständige Matrixalgebra n-ten Grades über dem Zentrum k und $\mathfrak{o}$ die Hauptordnung von k. Dann gilt nach C. Chevalley:

Satz 1: *Die Klassenzahl von $\mathfrak{S}$ ist gleich der Klassenzahl von k.* Hierbei heißen zwei Linksideale $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ aus einer Maximalordnung $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{S}$ äquivalent, wenn $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_1 \mathsf{A}$ mit regulärem A aus $\mathfrak{S}$ ist.

Satz 2: *Zwei $\mathfrak{M}$-Linksideale $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ sind dann und nur dann äquivalent, wenn $N_{\mathrm{red}}\,\mathfrak{L}_1$ und $N_{\mathrm{red}}\,\mathfrak{L}_2$ in der gleichen Idealklasse von k liegen.*

Satz 3: *Die Typenzahl der Maximalordnungen in $\mathfrak{S}$ ist gleich* $(\mathfrak{a} : \mathfrak{a}^n(\alpha))$.

Bekanntlich sagt man von zwei Maximalordnungen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, sie gehören zum gleichen Typus, wenn sie durch einen inneren Automorphismus des Systems $\mathfrak{S}$ auseinander hervorgehen: $\mathfrak{M}_2 = \mathsf{A}^{-1}\mathfrak{M}_1\mathsf{A}$.

Wir werden besonders von Satz 2 ausgehend einige neue Ergebnisse herleiten. Dabei ist zu bemerken, daß sie für *beliebige* maximal kommutative Teilkörper von $\mathfrak{S}$ gelten.

Zum besseren Verständnis geben wir zunächst eine kurze Darstellung der Definitionen und Beweise zu den drei Chevalleyschen Sätzen.

Definition: *M heißt Linearformenmodul vom Range n bezüglich der Hauptordnung $\mathfrak{o}$ des Körpers k, wenn 1. die Koeffizienten der Linearformen aus M Elemente aus k mit beschränkten Nennern sind, 2. mit zwei Linearformen y_1 und y_2 aus M auch alle Linearkombinationen $a_1 y_1 + a_2 y_2$ mit a_1, a_2 aus $\mathfrak{o}$ zu M gehören, und 3. unter den Linearformen von M genau n linear unabhängige vorkommen.*

Definition: *Unter dem Determinantenteiler des Linearformenmoduls M verstehen wir den gr. gem. Idealteiler $\mathfrak{a}$ aus den Determinanten, die durch Untereinanderschreiben der Koeffizienten von je n Linearformen aus M entstehen.*

Nach E. Steinitz[18]) gilt dann der

Satz: *In jedem Linearformenmodul M vom Range n bezüglich $\mathfrak{o}$ lassen sich n Elemente y_i derart finden, daß sich M in der Form*

$$M = \mathfrak{o}\, y_1 \dotplus \mathfrak{o}\, y_2 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{o}\, y_{n-1} \dotplus \mathfrak{a}\, y_n \qquad (\textit{direkte Summe})$$

darstellen läßt. Dabei ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus k und M hat den Determinantenteiler $\mathfrak{a}$.

Definition: *Zwei Linearformenmoduln M_1, M_2 heißen äquivalent im engeren Sinne ($M_1 \sim M_2$), wenn sie als $\mathfrak{o}$-Moduln modulisomorph sind.*

Man erhält, wie man sich nach dem Steinitzschen Satze durch Erweiterung des Operatorenbereichs $\mathfrak{o}$ zum Quotientenkörper k leicht überlegt, den allgemeinsten $\mathfrak{o}$-modulisomorphen Modul zu einem Linearformenmodul von n Unbestimmten, wenn man diese Unbestimmten einer (in k) umkehrbaren linearen Transformation A unterwirft.

Man zeigt leicht[19]), daß die absolute Idealklasse $\mathfrak{a}$ des Determinantenteilers $\mathfrak{a}$ von M die charakteristische Invariante der Klasse zu M im engeren Sinne äquivalenter Moduln ist.

Hieraus folgt unmittelbar der

Satz: *Die Klassenzahl der im engeren Sinne äquivalenten Moduln beliebigen Ranges n ist gleich der absoluten Klassenzahl von k.*

---

[18]) E. Steinitz, Math. Annalen 71/72 (1912).

[19]) I. Schur, Math. Annalen 72 (1912).

Definition: *Zwei Moduln* M_1, M_2 *heißen äquivalent im weiteren Sinne, wenn ein* $\mathfrak{o}$*-Ideal* $\mathfrak{b}$ *existiert, so daß* M_2 $\mathfrak{o}$*-modulisomorph zu* $\mathfrak{b}\cdot M_1$ *ist.*

Wenn M_1, M_2 die invarianten Klassen $\bar{\mathfrak{a}}_1$, $\bar{\mathfrak{a}}_2$ haben, so ist nach I. Schur[19]) $\bar{\mathfrak{a}}_2 = \bar{\mathfrak{b}}^n \bar{\mathfrak{a}}_1$, also:

Satz: *Die Anzahl der Klassen von im weiteren Sinne äquivalenten Moduln vom Range* n *ist gleich dem Index* $(\mathfrak{a} : \mathfrak{a}^n(\alpha))$ *der* n*-ten Potenzen der absoluten Idealklassen in der absoluten Klassengruppe von* k.

Für die Linksideale einer Maximalordnung von $\mathfrak{S}$ führt man bekanntlich die folgenden zwei Äquivalenzbegriffe ein: 1. Zwei Linksideale $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ heißen äquivalent *im engeren Sinne*, wenn ein reguläres Element A in $\mathfrak{S}$ existiert, so daß $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_1 \mathsf{A}$ ist, und 2. Zwei Linksideale $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ heißen äquivalent *im weiteren Sinne*, wenn ein zweiseitiges Ideal $\mathfrak{a}$ und ein reguläres Element A in $\mathfrak{S}$ existieren, so daß $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{a}\mathfrak{L}_1 \mathsf{A}$ ist.

Nun sei $\mathfrak{L}$ ein Linksideal aus der Maximalordnung $\mathfrak{M}$; ohne Einschränkung kann angenommen werden, daß $\mathfrak{M}$ ein vollständiges System von Matrizeneinheiten c_{ik} $(i, k = 1, \ldots, n)$ enthält.

Zwischen den Linksidealen $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{M}$ und den n-gliedrigen $\mathfrak{o}$-Moduln besteht folgender Zusammenhang:

a) *Die Gesamtheit der Zeilen aller Elemente des Ideals* $\mathfrak{L}$ *bildet einen* $\mathfrak{o}$*-Modul* $M_{\mathfrak{L}}$, *den dem Ideal* $\mathfrak{L}$ *zugeordneten Modul.*

Wir zeigen, daß die Menge $M_{\mathfrak{L}}$ ein $\mathfrak{o}$-Modul ist:

1. Die Koeffizienten jeder Zeile (als Linearform gedeutet) sind beschränkt.

2. Mit zwei Zeilen $y_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $y_2 = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ gehört $a_1 y_1 + a_2 y_2$ zu $M_{\mathfrak{L}}$, denn enthält $\mathfrak{L}$ die Matrizen $\begin{pmatrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_n \\ 0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\beta_1, \ldots, \beta_n \\ 0\end{pmatrix}$, so liegt auch $\begin{pmatrix}a_1\alpha_1 + b_1\beta_1, \ldots, a_1\alpha_n + b_1\beta_n \\ 0\end{pmatrix}$ in $\mathfrak{L}$.

3. Da $\mathfrak{L}$ reguläres Ideal ist, kommen genau n linear unabhängige Zeilen in $M_{\mathfrak{L}}$ vor.

b) *Schreibt man je* n *Zeilen eines* $\mathfrak{o}$*-Moduls* M *untereinander, so entsteht ein* $\mathfrak{M}$*-Linksideal* $\mathfrak{L}$, *das dem Modul* M *zugeordnete Ideal, und es ist* $M_{\mathfrak{L}} = M$.

Wir zeigen, daß die Matrizenmenge $\mathfrak{L}$ ein $\mathfrak{M}$-Linksideal ist:

1. Es ist $\mathfrak{o}\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}$.

2. Für die Matrizeneinheiten c_{ik} gilt $c_{ik}\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}$. Wegen $\mathfrak{M} = \sum \mathfrak{o} c_{ik}$ folgt also $\mathfrak{M}\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}$ und sogar $\mathfrak{M}\mathfrak{L} = \mathfrak{L}$, denn $\mathfrak{M}$ enthält die Einheitsmatrix.

3. Die Nenner der Matrizenelemente von $\mathfrak{L}$ sind beschränkt, da es die Nenner der Koeffizienten von M sind.

Nach Konstruktion ist $M_{\mathfrak{L}} = M$ klar.

Außerdem wird $M_{\mathfrak{L}} = M_{\mathfrak{M}} \cdot \mathfrak{L}$, denn $M_{\mathfrak{M}}$ ist der Modul aller n-gliedrigen Zeilen aus $\mathfrak{M}$. Ferner ist $M_{\mathfrak{M}} \cdot \mathfrak{L} \subseteq M_{\mathfrak{L}}$, da $\mathfrak{M}$ Linksordnung von $\mathfrak{L}$ ist, und sogar $M_{\mathfrak{M}} \cdot \mathfrak{L} = M_{\mathfrak{L}}$, da die Einheitszeilen in $M_{\mathfrak{M}}$ liegen.

Aus den obigen Definitionen und Bemerkungen folgt sofort:

1. Wenn $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}\mathsf{A}$, so ist $M_{\mathfrak{L}'} = M_{\mathfrak{M}} \cdot \mathfrak{L}' = M_{\mathfrak{M}} \cdot \mathfrak{L}\mathsf{A} = M_{\mathfrak{L}} \cdot \mathsf{A}$, also $M_{\mathfrak{L}}$ zu $M_{\mathfrak{L}'}$ im engeren Sinne äquivalent. Umgekehrt:

2. Wenn $M_{\mathfrak{L}'}$ zu $M_{\mathfrak{L}}$ äquivalent im engeren Sinne ist, so erhält man nach einer früheren Bemerkung $M_{\mathfrak{L}'} = M_{\mathfrak{L}} \cdot \mathsf{A}$, also $M_{\mathfrak{M}} \cdot \mathfrak{L}' = M_{\mathfrak{M}} \cdot \mathfrak{L}\mathsf{A}$. Dann wird also $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}\mathsf{A}$.

Wir können diese Tatsachen in der kurzen Formel

$$\mathfrak{L}' \sim \mathfrak{L} \longleftrightarrow M_{\mathfrak{L}} \sim M_{\mathfrak{L}'}$$

zusammenfassen. Hieraus folgt aber nach den zuvor aufgestellten Tatsachen über Modulklassen sofort der

Satz 1: *Die Anzahl der Idealklassen von $\mathfrak{M}$ im engeren Sinne ist gleich der Anzahl der im engeren Sinne äquivalenten* $\mathfrak{o}$*-Moduln vom Range n, also gleich der absoluten Klassenzahl von k.*

Außerdem können wir die Invariante des einem Ideal $\mathfrak{L}$ zugeordneten Moduls $M_{\mathfrak{L}}$ sofort explizit bestimmen. Sie ist nach Definition der gr. gem. Idealteiler der Determinanten des Elementes aus $\mathfrak{L}$, also gleich $N_{\text{red}}\,\mathfrak{L}$, wie man durch Zurückgehen auf die einzelnen Primstellen einsieht. Hiernach ist einer Idealklasse aus $\mathfrak{M}$ im engeren Sinne eindeutig die absolute Idealklasse der reduzierten Norm eines beliebigen Ideals aus der Klasse zugeordnet. (Die absolute Idealklasse wird bei der Zuordnung sogar vollständig erschöpft. Denn jedes ihrer Ideale $\alpha N_{\text{red}}\,\mathfrak{L}$ erscheint als Invariante des Linksideals $\mathfrak{L}\mathsf{A}$, da jedes $\alpha \neq 0$ aus k sich als $N_{\text{red}}\,\mathsf{A}$ mit regulärem Element A aus $\mathfrak{S}$ darstellen läßt.) Also:

Satz 2: *Zwei Linksideale $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ aus $\mathfrak{M}$ sind dann und nur dann äquivalent im engeren Sinne, wenn ihre reduzierten Normen nach k zur gleichen absoluten Idealklasse gehören.*

Satz 3: *Die Anzahl der Idealklassen von $\mathfrak{M}$ im weiteren Sinne ist gleich dem Index* $(\mathfrak{a} : \mathfrak{a}^n(\alpha))$. Also: *Die Typenzahl der Maximalordnungen aus $\mathfrak{S}$ ist gleich* $(\mathfrak{a} : \mathfrak{a}^n(\alpha))$.

Denn zwei Maximalordnungen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{M}\mathfrak{L}$ sind vom gleichen Typus, wenn das Linksideal $\mathfrak{L} = \mathfrak{a}\mathfrak{M}\mathsf{A}$ zur Hauptklasse im weiteren Sinne gehört.

Wir gehen nun zu neuen Fragestellungen über, die wir mit Hilfe von Satz 1, 2, 3 behandeln können.

I. *In einer Matrizalgebra $\mathfrak{S} = k_n$ ist ein zweiseitiges Ideal $\mathfrak{M}\mathfrak{a}$ dann und nur dann Hauptideal $\mathfrak{M}\mathsf{A}$, wenn $\mathfrak{a}^n \sim 1\ (k)$.*

Beweis: Für die Zugehörigkeit von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}\,\mathfrak{a}$ zur gleichen Klasse ist nach Satz 2 notwendig und hinreichend, daß

$$N_{\text{red}}\,\mathfrak{M} = 1 \sim N_{\text{red}}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^n.$$

II. Möge k die absolute Klassenzahl $h \neq 1$ haben. Wir betrachten die Algebra $\mathfrak{S} = k_h$. In ihr ist der absolute Klassenkörper K_0 zu k eingebettet. Daraus folgt eine *Deutung des Hauptidealsatzes der Klassenkörpertheorie.*

Nach dem eben unter I. Bewiesenen gilt für alle Ideale $\mathfrak{a}$ aus k wegen $n = h$: $\mathfrak{M}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{M}\,\mathsf{A}$, denn $\mathfrak{a}^h \sim 1\,(k)$. Nun enthalte $\mathfrak{M}$ speziell die Hauptordnung $\mathfrak{O}_0$ des absoluten Klassenkörpers K_0. Dann ist $\mathsf{A}^{-1}\mathfrak{M}\,\mathsf{A} = \mathfrak{M}$, also auch $\mathfrak{O}_0$-optimal, denn $\mathfrak{M}\,\mathfrak{a}$ ist ein zweiseitiges Ideal. Wenn wir A von links mit einer Einheit E aus $\mathfrak{M}$ so normieren können, daß $\mathsf{A}' = \mathsf{E}\,\mathsf{A}$ in K_0 liegt, so wird $\mathfrak{M}\,\mathfrak{O}_0\,\mathfrak{a} = \mathfrak{M}\,\mathsf{A} = \mathfrak{M}\,\mathsf{E}\,\mathsf{A}$ $= \mathfrak{M}\,\mathfrak{O}_0\,\mathsf{A}$, also $\mathfrak{O}_0\,\mathfrak{a} = \mathfrak{O}_0\,\mathsf{A}'$.

Umgekehrt ist nach dem Hauptidealsatze $\mathfrak{O}_0\,\mathfrak{a} = \mathfrak{O}_0\,\mathsf{A}''$ mit A'' in K_0. Dann wird $\mathfrak{M}\,\mathfrak{O}_0\,\mathfrak{a} = \mathfrak{M}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{M}\,\mathfrak{O}_0\,\mathsf{A}'' = \mathfrak{M}\,\mathsf{A}''$, d. h. $\mathsf{E}''\mathsf{A} = \mathsf{A}''$, E'' eine passende Einheit aus $\mathfrak{M}$. Wir können also den Hauptidealsatz so deuten: *In der Zerlegung* $\mathfrak{M}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{M}\,\mathsf{A}$ *läßt sich für beliebige Ideale* $\mathfrak{a}$ *aus* k *das Element* A *stets so normieren, daß es nach* K_0 *fällt.*

III. K sei jetzt ein ganz *beliebiger* maximal kommutativer Teilkörper des Systems $\mathfrak{S} = k_n$, $\mathfrak{O}'$ eine beliebige Ordnung aus K, $\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{O}}$ ihr Führer. Dann bilden die regulären Ideale nach $\mathfrak{O}'$, deren Norm bezüglich k ein Hauptideal ist, ein multiplikativ abgeschlossenes System. Nimmt man noch die Elemente α aus K hinzu (wobei stets $\mathfrak{O}'\alpha$ ein reguläres Ideal sein soll), so gelangt man, wenn wir $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ nennen, falls $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\,\alpha$ ist, zu einer Klassengruppe.

Definition: *Die Klassengruppe der Klassen aus* $\mathfrak{O}'$, *deren Norm bezüglich* k *Hauptideal ist, heiße „verallgemeinertes Hauptgeschlecht nach* $\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{O}}$".

Wegen des multiplikativen Isomorphismus zwischen den regulären Idealen aus $\mathfrak{O}'$ und $\mathfrak{O}$ ist dieses verallgemeinerte Hauptgeschlecht nichts anderes als das gewöhnliche Hauptgeschlecht, als Klassengruppe mod $\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{O}}$ erklärt. Zur Deutung der Gruppe ist es aber zweckmäßig, sich auf $\mathfrak{O}'$ zu beziehen. Es gilt:

Satz: *Die Klassen des verallgemeinerten Hauptgeschlechtes nach* $\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}':\mathfrak{O}}$ *stimmen überein mit denjenigen Idealklassen nach* $\mathfrak{O}'$, *die Ideale enthalten, deren Erweiterungsideale mit einer* $\mathfrak{O}'$*-optimalen Maximalordnung* $\mathfrak{M}$ *aus* $\mathfrak{S}$ *ein einseitiges Hauptideal in* $\mathfrak{M}$ *erzeugen. Für* $\mathfrak{M} \cap K = \mathfrak{O}'$ *gilt:*

$$N_{\mathfrak{O}'}\,\mathfrak{a} \sim 1\,(k) \longleftrightarrow \mathfrak{M}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{M}\,\mathsf{A}.$$

Beweis: Mit Hilfe des Normensatzes (S. 380) und des Satzes 2 kann leicht der Beweis erbracht werden. Sei also $\mathfrak{M} \cap K = \mathfrak{O}'$ optimal. Notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{M}\mathfrak{a} = \mathfrak{M}\mathsf{A}$ für reguläres $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{O}'$ wird, ist die Zugehörigkeit von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}\mathfrak{a}$ zur gleichen Klasse im engeren Sinne. Nach Satz 2 von Chevalley heißt das:

$$1 = N_{\text{red}}\,\mathfrak{M} \sim N_{\text{red}}\,\mathfrak{M}\mathsf{A} \sim N_{\text{red}}\,\mathfrak{M}\mathfrak{a} = N_{\mathfrak{O}'}\,\mathfrak{a}, \text{ d. h. } N_{\mathfrak{O}'}\,\mathfrak{a} \sim 1\ (k).$$

Bemerkung: Für die Hauptordnung wurde ein etwas anderer komplizierterer Beweis dieser Tatsache von C. Chevalley gegeben.

IV. Die Hauptordnung $\mathfrak{O}$ eines beliebigen maximal kommutativen Teilkörpers einer beliebigen normalen einfachen Algebra A kann stets in mindestens eine Maximalordnung von A eingebettet werden. [Vgl. Anm. [9]).] Umgekehrt kann man nun fragen, ob in jeder beliebigen Maximalordnung die Hauptordnung eines passenden maximal kommutativen Teilkörpers eingebettet ist.

Für Matrixalgebren kann diese Frage bejahend beantwortet werden. Für nicht voll zerfallende Algebren wird ein Beispiel angegeben, wo dies ebenfalls der Fall ist. Ob es stets der Fall ist, bleibt offen.

Satz: *In jeder Maximalordnung $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{S} = k_n$ ist mindestens für einen passenden maximal kommutativen Teilkörper K die zugehörige Hauptordnung $\mathfrak{O}$ enthalten.*

Beweis: Wir gehen von einer festen Maximalordnung $\mathfrak{M} = \Sigma\, \mathfrak{o}\, c_{ik}$ aus (c_{ik} ein festes System von n^2 Matrizeneinheiten). In $\mathfrak{M}$ liegen ringisomorphe Bilder $\overline{\mathfrak{O}}$ sämtlicher Hauptordnungen $\mathfrak{O}$ der maximal kommutativen Teilkörper K. Um dies einzusehen, gehen wir zu den Stellen $\mathfrak{p}$ über. Dann existiert eine $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-Basis $\omega_1^{(\mathfrak{p})}, \ldots, \omega_n^{(\mathfrak{p})}$ von $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$, d. h. jedes Element $\alpha \in \mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ läßt sich in der Form $\alpha = \Sigma\, a_i\, \omega_i^{(\mathfrak{p})}$ mit $a_i \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ darstellen. Schreiben wir die Basis als Zeile, so wird

$$\alpha\,(\omega_1^{(\mathfrak{p})}, \ldots, \omega_n^{(\mathfrak{p})}) = (\omega_1^{(\mathfrak{p})}, \ldots, \omega_n^{(\mathfrak{p})})\,\mathsf{A},$$

wobei A in $\Sigma\, \mathfrak{o}_\mathfrak{p}\, c_{ik} = \mathfrak{M}_\mathfrak{p}$ liegt. Oder

$$\mathfrak{O}_\mathfrak{p}\,(\omega_1^{(\mathfrak{p})}, \ldots, \omega_n^{(\mathfrak{p})}) = (\omega_1^{(\mathfrak{p})}, \ldots, \omega_n^{(\mathfrak{p})})\,\overline{\mathfrak{O}}_\mathfrak{p};$$

d. h. aber $\mathfrak{O}_\mathfrak{p} \simeq \overline{\mathfrak{O}}_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{M}_\mathfrak{p}$. Dies gilt für alle Stellen. Jetzt gehen wir von n linear unabhängigen Elementen $\omega_1, \ldots, \omega_n$ von $\mathfrak{O}$ aus, die eine Unterordnung $\mathfrak{O}^*$ erzeugen. Mit Ausnahme endlich vieler Stellen $\mathfrak{p}^*$, den Teilern von $\mathfrak{f}_{\mathfrak{O}^*:\mathfrak{O}}$, können diese ω_i als Basis von $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ genommen werden. Daraus folgt, daß der Durchschnitt aller $\overline{\mathfrak{O}}_\mathfrak{p}$ gleich dem Durchschnitt jener endlich vielen Ordnungen $\overline{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{p}^*}$, die den Führerteilern entsprechen, mit einem Erweiterungsring $\overline{\mathfrak{O}}'$ von $\overline{\mathfrak{O}}^*$ wird. $\overline{\mathfrak{O}}'$ können wir an den Ausnahmestellen als die Hauptordnung von $\overline{K}_{\mathfrak{p}^*}$ und an den übrigen

Stellen als $\overline{\mathfrak{O}}_\mathfrak{p}$ wählen. Dann ist der Durchschnitt aller $\overline{\mathfrak{O}}_\mathfrak{p}$ sicher vom Rang n. Nun bezeichne $\overline{\mathfrak{O}}$ die Hauptordnung von $\overline{K} \simeq K$. Dann sind die $\overline{\mathfrak{O}}_\mathfrak{p}$ wirklich die Komponenten von $\overline{\mathfrak{O}}$. Wäre nämlich $\overline{\mathfrak{O}}_\mathfrak{p} \cap \ldots \subset \overline{\mathfrak{O}}$, so müßte $\overline{\mathfrak{O}}$ mindestens eine Komponente besitzen, die $\overline{\mathfrak{O}}_\mathfrak{p}$ echt enthält. Da aber die $\overline{\mathfrak{O}}_\mathfrak{p}$ Hauptordnungen an den Stellen sind, so führt $\overline{\mathfrak{O}}_\mathfrak{p} \cap \ldots \subset \overline{\mathfrak{O}}$ nach Hasse [vgl. Anm.[11]), S. 527/528] zu einem Widerspruch[19a]). Nach dem Modulsatz von E. Noether gilt also im Großen

$$\overline{\mathfrak{O}} = \overline{\mathfrak{O}}_\mathfrak{p} \cap \ldots \subseteq \mathfrak{M}_\mathfrak{p} \cap \ldots = \Sigma c_{ik}\mathfrak{o}_\mathfrak{p} \cap \ldots = \Sigma(\mathfrak{o}_\mathfrak{p} \cap \ldots)\, c_{ik} = \Sigma \mathfrak{o}\, c_{ik} = \mathfrak{M},$$

und $\overline{\mathfrak{O}}$ ist isomorph zu $\mathfrak{O}$. In der speziellen Maximalordnung $\mathfrak{M}$ liegt demnach stets ein ringisomorphes Bild $\overline{\mathfrak{O}}$ der vorgegebenen Hauptordnung $\mathfrak{O}$. Dann ist der Quotientenkörper $\overline{K}$ zu $\overline{\mathfrak{O}}$ ein zu K isomorpher maximal kommutativer Teilkörper von $\mathfrak{S}$. Wir haben also festgestellt: Bei gegebener Maximalordnung $\mathfrak{M}$ und gegebenem Körper K existiert stets ein zu K isomorpher Körper $\overline{K}$ derart, daß die Hauptordnung $\overline{\mathfrak{O}}$ von $\overline{K}$ in $\mathfrak{M}$ liegt.

Nach dieser Vorbereitung können wir an den Beweis des Satzes selbst gehen.

Fall 1: Wenn $(n, h) = 1$ ist (wobei h die absolute Klassenzahl von k bedeutet), so wird $(\mathfrak{a} : \mathfrak{a}^n(\alpha)) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{a}) = 1$, d. h. die Typenzahl von $\mathfrak{S}$ ist gleich Eins. Wir greifen nun eine Maximalordnung $\mathfrak{M}$ heraus, die eine gegebene Hauptordnung $\mathfrak{O}$ eines maximal kommutativen Teilkörpers K enthält. Jede weitere Maximalordnung $\mathfrak{M}'$ ist dann in der Form $\mathfrak{M}' = \beta^{-1}\mathfrak{M}\beta$ gegeben. In ihr liegt die Hauptordnung $\beta^{-1}\mathfrak{O}\beta$ von $\beta^{-1}K\beta$.

Fall 2: Für beliebiges n mit $(n, h) \neq 1$ konstruieren wir für jeden Typus von Maximalordnungen aus $\mathfrak{S}$ einen passenden Körper K. Sicherlich ist $(\mathfrak{a} : (\alpha)) > (\mathfrak{a} : \mathfrak{a}^n(\alpha))$, d. h. die Klassenzahl der Linksideale jeder Maximalordnung $\mathfrak{M}$ ist größer als die Typenzahl der Maximalordnungen. Wir haben die Aufgabe sicher gelöst, wenn wir in jeder Klasse im engeren Sinne von Linksidealen ein Erweiterungsideal aus einem passenden maximal kommutativen Teilkörper angeben können. Denn dann liefern die Rechtsordnungen dieser Erweiterungsideale sämtliche Typen von Maximalordnungen, und alle enthalten nach dem Satze aus § 2 jeweils die Hauptordnung eines passenden maximal kommutativen Teilkörpers. Für diese Konstruktion sei $\mathfrak{M}$ eine feste Maximalordnung aus $\mathfrak{S}$. Wir wählen ferner in jeder absoluten Idealklasse von k ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus

[19a]) Frl. Noether machte mich freundlicherweise darauf aufmerksam, daß ich vergessen hatte zu zeigen, daß die $\overline{\mathfrak{O}}_\mathfrak{p}$ wirklich die Komponenten von $\overline{\mathfrak{O}}$ sind.

und bestimmen zu $\mathfrak{p}$ einen Oberkörper $\mathfrak{K}(\mathfrak{p})$ vom Grade n bezüglich k, in dem $\mathfrak{p}$ voll zerfällt, $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_n$. Dann ist $N\mathfrak{P}_\nu = \mathfrak{p}$. Dieses Verfahren wenden wir auf die sämtlichen absoluten Idealklassen von k an. Wir erhalten so h Körper $\mathfrak{K}(\mathfrak{p}_1), \ldots, \mathfrak{K}(\mathfrak{p}_h)$. Nun bestimmen wir gemäß der Vorbemerkung ein zu $\mathfrak{K}(\mathfrak{p}_i)$ isomorphes Bild $K(\mathfrak{p}_i)$ in $\mathfrak{S}$ derart, daß $\mathfrak{M}$ die Hauptordnungen der $K(\mathfrak{p}_i)$ enthält. Dann möge $\mathfrak{M}\mathfrak{P}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{M}\mathfrak{P}^{(h)}$ ein beliebiges System von Erweiterungsidealen zu den in $K(\mathfrak{p}_i)$ voll zerfallenden $\mathfrak{p}_i$ sein. Diese h Repräsentanten gehören verschiedenen Klassen von $\mathfrak{M}$ an. Wäre nämlich $\mathfrak{M}\mathfrak{P}^{(i)} \sim \mathfrak{M}\mathfrak{P}^{(j)}$ in $\mathfrak{S}$, so ergäbe das nach Satz 2 von Chevalley die Äquivalenzen

$$N_{\mathrm{red}}\,\mathfrak{M}\mathfrak{P}^{(i)} = N_{K(\mathfrak{p}_i)}\,\mathfrak{P}^{(i)} = \mathfrak{p}_i \sim N_{\mathrm{red}}\,\mathfrak{M}\mathfrak{P}^{(j)} = N_{K(\mathfrak{p}_j)}\,\mathfrak{P}^{(j)} = \mathfrak{p}_j$$

in k, obgleich $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_j$ für $i \neq j$ verschiedenen absoluten Idealklassen angehören sollten. Diese Erweiterungsideale $\mathfrak{M}\mathfrak{P}^{(i)}$ liefern nach Satz 1 von Chevalley Repräsentanten aller Klassen im engeren Sinne von Linksidealen. Damit ist der Beweis nach dem schon Bemerkten geführt.

Die Existenz der Hilfskörper $K(\mathfrak{p}_i)$ folgt aus einem rein arithmetisch beweisbaren Satz von H. Hasse [20]): „Es sei k ein beliebiger algebraischer Zahlkörper, ferner seien $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ irgendwelche s verschiedene Primideale aus k und sei zu jedem dieser $\mathfrak{p}_i$ ein System (e_{ik}, f_{ik}) $(k = 1, \ldots, r_i)$ von r_i Paaren natürlicher Zahlen gegeben, die nur der Bedingung genügen, daß alle s Summen $\sum_{k=1}^{r_i} e_{ik} f_{ik}$ ein und denselben Wert n haben. Dann existieren unendlich viele algebraische Körper K über k, in denen für die $\mathfrak{p}_i$ Zerlegungen der Form $\mathfrak{p}_i = \prod_{k=1}^{r_i} \mathfrak{P}_{ik}^{e_{ik}}$, $\mathfrak{P}_{ik}$ vom Relativgrade f_{ik} $(i = 1, \ldots, s)$ in Primidealpotenzen bestehen." Hiernach existieren speziell unendlich viele Körper K vom Grade n über k, in denen h beliebige Repräsentanten der absoluten Idealklassengruppe von k voll zerfallen. Je einer dieser Körper reicht für unsere Konstruktion aus. Im allgemeinen werden das nicht galoissche Körper sein. Enthält aber k die n-ten Einheitswurzeln, so kommen wir mit elementar angebbaren Kummerschen Körpern $k(\sqrt[n]{\alpha_i})$ aus. Dabei bedeutet α_i ein beliebiges für $\mathfrak{p}_i$ hyperprimäres Element aus k. Aber auch bei beliebigem Grundkörper kann man mit zyklischen Körpern auskommen. Doch braucht man dazu transzendente Hilfsmittel. Z. B. genügt der von W. Grunwald bewiesene Existenzsatz [21]).

---

[20]) H. Hasse, Zwei Existenztheoreme über algebraische Zahlkörper. Math. Annalen 95 (1925).

[21]) W. Grunwald, Ein algebraisches Existenztheorem für algebraische Zahlkörper. Journ. f. Math. 169 (1933).

In der Terminologie von E. Noether kann man den obigen Satz so aussprechen: *Zerfällt die normale einfache Algebra A, so erschöpfen die Hauptgebiete der maximal kommutativen Teilkörper sämtliche Maximalordnungen von A.*

Zum Schlusse geben wir noch ein Beispiel einer nicht voll zerfallenden normalen einfachen Algebra A, für die der bewiesene Satz auch gilt: Grundkörper $k = \mathsf{P}^{(0)}$, Zerfällungskörper zur Konstruktion sei der Gaußsche Zahlkörper $K = k(i)$, $i^2 = -1$. Wir betrachten das verschränkte Produkt von K mit seiner Gruppe mit dem Faktorensystem -23. Die erzeugenden Relationen dieses Quaternionenkörpers $\mathfrak{Q} = (-1, -23)$ sind $i^2 = -1$, $u^2 = -23$, $u^{-1}iu = -i$. Es gibt genau drei Typen von Maximalordnungen[22]. Da die Maximalordnungen endliche Moduln bezüglich des Hauptidealringes $\Gamma^{(0)}$ sind, genügt die Angabe von 3 Basissystemen:

für $\mathfrak{M}_1$ die Elemente: $1,\ \omega_1 = i,\quad \omega_2 = \frac{1+u}{2},\quad \omega_3 = \frac{i+iu}{2}$,

„ $\mathfrak{M}_2$ „ „ $1,\ \varepsilon_1 = 2i,\quad \varepsilon_2 = \frac{1+u}{2},\quad \varepsilon_3 = \frac{3i+iu}{2}$,

„ $\mathfrak{M}_3$ „ „ $1,\ \eta_1 = 4i,\quad \eta_2 = \frac{1+8i+iu}{2},\quad \eta_3 = \frac{4+5i+iu}{8}$.

Man sieht sofort, daß in jedem der Repräsentanten Hauptordnungen liegen. In $\mathfrak{M}_1$ etwa die Hauptordnung von K, in $\mathfrak{M}_2$ die Hauptordnung von $k(\sqrt{-23}) = k(\varepsilon_2)$, in $\mathfrak{M}_3$ die Hauptordnung von $k(\sqrt[3]{-1}) = k(\eta_3)$. Dabei entsprechen den zugehörigen Zerfällungskörpern die Darstellungen von $\mathfrak{Q}$ als verschränktes Produkt: $(-1, -23) \sim (-23, -1) \sim (-3, 2)$, wie man sich leicht durch Vergleich der zugehörigen Normenrestsymbole überlegt. Für diesen speziellen Quaternionenkörper erschöpfen die Hauptgebiete ebenfalls sämtliche Maximalordnungen.

Bemerkung: Die Ergebnisse dieses Paragraphen bleiben auch richtig für Funktionenkörper einer Variablen mit endlichem Konstantenkörper. Wir müssen nur ein transzendentes Element x auszeichnen und die Ganzheit in k, K, $\mathfrak{S}$ darauf beziehen. Dann ergeben sich natürlich Klassenzahlen, die von der Auswahl von x abhängen.

§ 4.
Ein Trennungssatz.

Wir betrachten die Menge aller Maximalordnungen einer normalen einfachen Algebra A, die die Hauptordnung $\mathfrak{O}$ eines maximal kommutativen Teilkörpers K enthalten. Wie schon in § 1 erklärt, zerfällt diese

[22]) K. Hey, Dissertation Hamburg 1929, Analytische Zahlentheorie in Systemen hyperkomplexer Zahlen. — Hier findet sich die Klassenzahlbestimmung.

Menge in Gebiete $G_{\mathfrak{O}}$, die Hauptgebiete zu K, indem immer alle diejenigen Maximalordnungen der Menge in ein $G_{\mathfrak{O}}$ gerechnet werden, die an den endlichen Verzweigungsstellen $\bar{\mathfrak{p}}$ von A gleiche Komponenten haben. [E. Noether, vgl. Anm. [4].] Es gibt im allgemeinen unendlich viele Hauptgebiete. Eine Divisionsalgebra D von Primzahlgrad hat jedoch für jedes K nur ein Hauptgebiet, da die $\bar{\mathfrak{p}}$-adischen Grenzmengen von D Divisionsalgebren im Kleinen sind, also nur je eine Maximalordnung besitzen. Ebenso haben die voll zerfallenden Algebren $\mathfrak{S}$ für jedes K nur ein Hauptgebiet, weil keine Verzweigungsstellen $\bar{\mathfrak{p}}$ existieren.

Sei $\mathfrak{M}$ eine Maximalordnung aus A, die $\mathfrak{O}$ enthält, $\mathfrak{A}$ ein $\mathfrak{O}$-Ideal und $\mathfrak{M}^{\mathfrak{A}}$ die Rechtsordnung zum $\mathfrak{M}$-Linksideal $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$. Ist dabei $\mathfrak{A}$ ein zur Diskriminante von A primes $\mathfrak{O}$-Ideal, so gehört $\mathfrak{M}^{\mathfrak{A}}$ zum gleichen Hauptgebiet wie $\mathfrak{M}$. Wegen $(\mathfrak{A}, \Pi\,\bar{\mathfrak{p}}) = 1$ ist für alle Stellen $\bar{\mathfrak{p}}$ erfüllt: $(\mathfrak{M}\mathfrak{A})_{\bar{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{M}_{\bar{\mathfrak{p}}}$, also $(\mathfrak{M}^{\mathfrak{A}})_{\bar{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{M}_{\bar{\mathfrak{p}}}$.

Wir beweisen zunächst den folgenden

Satz: *Seien K_1 und K_2 zwei galoissche maximal kommutative Teilkörper der normalen einfachen Algebra A. Wenn ein Hauptgebiet $G_{\mathfrak{O}_1}$ zu K_1 mit einem Hauptgebiet $G_{\mathfrak{O}_2}$ zu K_2 übereinstimmt, $G_{\mathfrak{O}_1} = G_{\mathfrak{O}_2}$, so ist $K_1 \simeq K_2$, und daher $K_2 = s^{-1} K_1 s$ mit regulärem s aus A.*

Beweis: Wir betrachten die Maximalordnungen der zusammenfallenden Hauptgebiete $G_{\mathfrak{O}_1}$ und $G_{\mathfrak{O}_2}$, die also an den Verzweigungsstellen der Algebra gleiche Komponenten haben. Sei $\mathfrak{M}$ eine solche Maximalordnung. Dann ist jedenfalls $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{O}_2$. Sei ferner $\mathfrak{B}$ ein zur Diskriminante von A primes $\mathfrak{M}$-Linksideal, dessen Rechtsordnung $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}} \supseteq \mathfrak{O}_1$ ist; nach dem Satz über Erweiterungsideale aus § 2 ist dann $\mathfrak{B} = \mathfrak{M}\mathfrak{B}^{(1)}$ mit einem $\mathfrak{O}_1$-Ideal $\mathfrak{B}^{(1)}$. Nach obiger Vorbemerkung gehört auch $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}^{(1)}}$ zu $G_{\mathfrak{O}_1}$, d. h. auch zu $G_{\mathfrak{O}_2}$, enthält somit $\mathfrak{O}_2$; daher ist auch $\mathfrak{B} = \mathfrak{M}\mathfrak{B}^{(2)}$ mit einem $\mathfrak{O}_2$-Ideal $\mathfrak{B}^{(2)}$. Hieraus folgt nach dem Normensatz aus § 2 die Normenrelation $N_{\mathrm{red}}\,\mathfrak{B} = N_1\,\mathfrak{B}^{(1)} = N_2\,\mathfrak{B}^{(2)}$, wo N_1, N_2 die Normen von K_1 bzw. K_2 nach k bedeuten.

Nun sei $\mathfrak{p}^{(1)}$ ein beliebiges zur Diskriminante der Algebra A primes Primideal aus k, das in K_1 voll zerfällt: $\mathfrak{p}^{(1)} = \mathfrak{P}_1^{(1)} \ldots \mathfrak{P}_n^{(1)}$[23]. Wir nehmen für obiges $\mathfrak{B}$ das Erweiterungsideal $\mathfrak{M}\mathfrak{P}^{(1)}$. Nach dem eben Gezeigten gilt also $\mathfrak{M}\mathfrak{P}^{(1)} = \mathfrak{M}\mathfrak{B}^{(2)}$ mit einem ganzen $\mathfrak{O}_2$-Ideal $\mathfrak{B}^{(2)}$. Jetzt wenden wir den Normensatz an: $N_{\mathrm{red}}\,\mathfrak{M}\mathfrak{P}^{(1)} = N_{\mathrm{red}}\,\mathfrak{M}\mathfrak{B}^{(2)} = N_2\,\mathfrak{B}^{(2)} = N_1\,\mathfrak{P}^{(1)} = \mathfrak{p}^{(1)}$. Wir haben also einem Primideal ersten Grades $\mathfrak{P}^{(1)}$ aus K_1 ein Ideal $\mathfrak{B}^{(2)}$

[23]) Nach dem allgemeinen Zerfällungskörperkriterium von Hasse (Math. Annalen 107) sind die Verzweigungsstellen einer Algebra stets von den in einem galoisschen Zerfällungskörper von A voll zerfallenden Primidealen verschieden. Wir brauchen aber hier diese feine Aussage nicht, da es bei dem maßgebenden analytischen Schluß auf endlich viele Ausnahmestellen nicht ankommt.

mit der Norm $\mathfrak{p}^{(1)}$ aus K_2 zugeordnet. Wegen der Ganzheit muß $\mathfrak{B}^{(2)}$ auch ein Primideal ersten Grades $\mathfrak{P}^{(2)}$ sein, d. h. $\mathfrak{p}^{(1)}$ zerfällt auch in K_2 voll. Ebenso zeigt man, daß ein in K_2 voll zerfallendes zur Diskriminante von A primes $\mathfrak{p}^{(2)}$ auch in K_1 voll zerfällt. Demnach stimmen die Mengen der in K_1 und K_2 voll zerfallenden Primideale aus k überein: $\{\mathfrak{p}^{(1)}\} = \{\mathfrak{p}^{(2)}\}$, bis auf endlich viele Ausnahmen, wenn man Anm. [23]) nicht gebraucht. Hieraus schließen wir aber sofort, daß K_1 und K_2 abstrakt isomorph sein müssen. Denn nach dem Kronecker-Bauerschen Satz [24]) ist der Typus eines relativ-galoisschen Oberkörpers K/k eindeutig charakterisiert durch die Menge der Primideale aus k, die in K voll zerfallen. Aus $K_1 \simeq K_2$ folgt dann bekanntlich, daß innerhalb A eine Relation $K_2 = s^{-1} K_1 s$ mit passendem regulärem Elemente s aus A besteht.

Wir zeigen jetzt schärfer:

Satz: *Unter den gleichen Voraussetzungen gilt sogar* $K_1 = K_2$.

Beweis: Weil jedenfalls $K_2 = s^{-1} K_1 s$, also $\mathfrak{O}_2 = s^{-1} \mathfrak{O}_1 s$ ist, haben wir nach Voraussetzung eine Gebietsgleichheit $G_{\mathfrak{O}} = G_{s^{-1}\mathfrak{O}s}$. Sei $\mathfrak{M}$ eine beliebige Maximalordnung aus $G_{\mathfrak{O}}$. Dann ist sicher $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{O}$, $\mathfrak{M} \supseteq s^{-1}\mathfrak{O}s$.

Wegen $B\mathfrak{O}B^{-1} = \mathfrak{O}$ für beliebige Elemente B aus K gilt auch $B\mathfrak{M}B^{-1} \supseteq \mathfrak{O}$. Für zur Diskriminante von A prime B gehört nach der Vorbemerkung auf Seite 392 auch $B\mathfrak{M}B^{-1}$ zum selben Hauptgebiet $G_{\mathfrak{O}}$ wie $\mathfrak{M}$. Also hat man auch $B\mathfrak{M}B^{-1} \supseteq s^{-1}\mathfrak{O}s$ und somit $\mathfrak{M} \supseteq (sB)^{-1}\mathfrak{M}(sB)$. Wir werden dann die Behauptung $s^{-1}\mathfrak{O}s = \mathfrak{O}$ in der Weise beweisen, daß wir unter der Annahme $s^{-1}\mathfrak{O}s \neq \mathfrak{O}$ ein Element B aus K konstruieren, für das $(sB)^{-1}\mathfrak{O}(sB)$ nicht in $\mathfrak{M}$ enthalten ist, im Widerspruch zu der eben gemachten Feststellung.

Zur Konstruktion von B sei $\mathfrak{p}$ ein zur Diskriminante von A primes in K voll zerfallendes Primideal von k. Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, daß bei der Matrizendarstellung $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} = \Sigma c_{ik}\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ gilt: $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}} = \Sigma c_{ii}\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$. Ist das nämlich für eine Maximalordnung $\mathfrak{M}_0$ aus $G_{\mathfrak{O}}$ noch nicht erfüllt, so wählen wir $\mathfrak{M}$ so, daß $\mathfrak{M}_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{M}_{0\,\mathfrak{q}}$ für alle $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ wird und $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} = \Sigma c_{ik}\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$, wo die c_{ik} ein solches Matrizeneinheitensystem sind, daß $c_{ii} = e_i$ die Idempotente der direkten Summendarstellung $K_{\mathfrak{p}} = \Sigma e_i k_{\mathfrak{p}}$, also $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}} = \Sigma e_i \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ sind. Nach einem Satze von C. Chevalley [25]) existieren solche c_{ik}. Das so konstruierte $\mathfrak{M}$ liegt in der Tat auch in $G_{\mathfrak{O}}$. Denn die Abänderung von $\mathfrak{M}_0$ betrifft nur eine Nichtverzweigungsstelle $\mathfrak{p}$ von A, und es ist

---

[24]) H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. Sonderdruck aus dem Jahresbericht der DMV, 1930, Teil II, S. 139—141. — Für einen rein arithmetischen Beweis vgl. Deuring, Journ. f. Math. 173 (1935).

[25]) C. Chevalley, Sur certains idéaux d'une algèbre simple. Abh. Math. Sem. Hamburg. 10 (1934).

auch $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{O}$, weil ja $\mathfrak{M}_q = \mathfrak{M}_{0\,q} \supseteq \mathfrak{O}_q$ nach Wahl von $\mathfrak{M}_0$ und $\mathfrak{M}_p = \Sigma c_{ik}\,\mathfrak{o}_p \supseteq \Sigma c_{ii}\,\mathfrak{o}_p = \mathfrak{O}_p$ ist. Angenommen es sei $s^{-1}\mathfrak{O}\,s \neq \mathfrak{O}$, dann ist für jede endliche Primstelle $\mathfrak{p}$ von k auch $s^{-1}\mathfrak{O}_p s \neq \mathfrak{O}_p$, denn aus $s^{-1}\mathfrak{O}_p s = \mathfrak{O}_p$ folgte $s^{-1}K_p s = K_p$ und daraus durch Durchschnittsbildung mit A weiter $s^{-1}K\,s = K$, also $s^{-1}\mathfrak{O}\,s = \mathfrak{O}$.

Insbesondere für die oben betrachtete in K voll zerfallende Stelle $\mathfrak{p}$ folgt aus der festgestellten Tatsache $s^{-1}\mathfrak{O}_p s \neq \mathfrak{O}_p$, daß in $s^{-1}\mathfrak{O}_p s$ mindestens ein Element α_p existiert, das als Matrix $\alpha_p = \sum\limits_{\mu,\nu} \alpha_{\mu\nu}\,c_{\mu\nu}$ mindestens eine Koordinate $\alpha_{ik} \neq 0$ mit $i \neq k$ hat; denn sonst lägen alle α_p aus $s^{-1}\mathfrak{O}_p s$ in K_p, also in $\mathfrak{O}_p$. Sei α_p ein solches Element. Wir transformieren es mit einer genügend hohen Potenz π_k^N des Primelementes

$$\pi_k = c_{11} + \dots + c_{kk}\,p + \dots + c_{nn},$$

das der k-ten Komponente $c_{kk}\,\mathfrak{o}_p$ von $\mathfrak{O}_p$ entspricht, bilden also $\pi_k^{-N}\alpha_p\,\pi_k^N$. Dabei geht insbesondere α_{ik} in $p^{-N}\alpha_{ik}$ über. Für hinreichend hohes N gehört daher $\pi_k^{-N}\alpha_p\,\pi_k^N$ nicht mehr zu $\mathfrak{M}_p$. Dasselbe gilt für jeden Transformator $\varepsilon_p\,\pi_k^N$, wo ε_p Einheit aus $\mathfrak{O}_p$ ist.

Nun bestimmen wir in K ein Element B^*, dessen $\mathfrak{p}$-adische Komponente von der Form $\varepsilon_p\,\pi_k^N$ ist. Dazu wählen wir in der reziproken Idealklasse zu $\mathfrak{P}_k^N$ ein $\mathfrak{O}$-Ideal $\mathfrak{A}$, das zu $\mathfrak{p}$ prim ist. Wir setzen dann $B^* = \mathfrak{P}_k^N\,\mathfrak{A}$. Dann wird in der Tat $B_{\mathfrak{p}}^* = \varepsilon_p\,\pi_k^N$. Wir haben somit ein Element B^* angegeben, so daß $(s\,B^*)^{-1}\,\mathfrak{O}_p\,(s\,B^*) \not\subseteq \mathfrak{M}_p$, also auch $(s\,B^*)^{-1}\,\mathfrak{O}\,(s\,B^*) \not\subseteq \mathfrak{M}$. Unser Satz besagt, daß *verschiedenen maximal kommutativen galoisschen Zerfällungskörpern einer normalen einfachen Algebra verschiedene Hauptgebiete entsprechen und umgekehrt.*

Bemerkung: Auch für algebraische Funktionenkörper einer Variablen mit endlichem Konstantenkörper gilt der Trennungssatz. Dabei ist unter einem Hauptgebiet die Gesamtheit aller Einsdivisoren (vgl. § 2) zu verstehen, die Erweiterungsdivisoren des Einsdivisors des maximal kommutativen Teilkörpers sind und die an den Verzweigungsstellen übereinstimmen. Der Beweis verläuft in allen Einzelheiten wie oben, denn die Idealtheorie im Kleinen bleibt erhalten, ebenso gilt der Kronecker-Bauersche Satz [16]).

---

[16]) Wenn man die Klassenkörpertheorie dieser Funktionenkörper kennt, so gelten auch alle Aussagen über relativ-galoissche Funktionenkörper in sinngemäßer Übertragung aus der Zahlentheorie. Vgl. F. K. Schmidt, Zur Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p. Sitzungsber. der phys.-mediz. Sozietät zu Erlangen 58/59 (1927); E. Witt, Riemann-Rochscher Satz und Z-Funktion im Hyperkomplexen. Math. Annalen 110 (1934); H. Hasse, Theorie der relativ-zyklischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper. Journ. f. Math. 172 (1934); E. Witt, Der Existenzsatz für abelsche Funktionenkörper. Journ. f. Math. 173 (1935).

§ 5.

Der verschränkte Gruppenring.

Wir geben zunächst einige allgemeine Vorbemerkungen.

A sei eine normale einfache Algebra über dem Zentrum k, K ein beliebiger maximal kommutativer Teilkörper von A, $\mathfrak{M}$ eine Maximalordnung von A, die die Hauptordnung $\mathfrak{O}$ von K enthält.

Satz: *Dann und nur dann haben die Erweiterungsideale* $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{M}\mathfrak{B}$ *zweier zur Diskriminante von* A *primen* $\mathfrak{O}$*-Ideale die gleiche Rechtsordnung* $\mathfrak{M}^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}$, *wenn* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{c}$ *ein Ideal des Zentrums* k *ist.*

Beweis: 1. Sei $\mathfrak{M}^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}$, dann ist das Produkt $\mathfrak{M}\mathfrak{A}\cdot(\mathfrak{M}\mathfrak{B})^{-1}$ ein eigentliches Produkt. Also wird $\mathfrak{M}\mathfrak{A}\cdot(\mathfrak{M}\mathfrak{B})^{-1} = \mathfrak{M}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\mathfrak{c}\mathfrak{M}$. Da nach Voraussetzung $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ prim zur Diskriminante von A sind, so ist das zweiseitige $\mathfrak{M}$-Ideal $\mathfrak{c}\mathfrak{M}$ auch prim zur Diskriminante, also Erweiterungsideal eines Zentrumsideals $\mathfrak{c}$. Dann wird aber $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{c}$.

2. Sei $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{c}$. Es ist $\mathfrak{M}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{M}^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{M}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{M}\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{M}\mathfrak{B}$. Wegen $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{c}$ ist auch $\mathfrak{M}\mathfrak{A} = \mathfrak{M}\mathfrak{B}\mathfrak{c} = \mathfrak{M}\mathfrak{c}\mathfrak{B}$, d. h. $\mathfrak{M}^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}$.

Wir wollen nun annehmen, daß $A = D$ eine Divisionsalgebra von Primzahlgrad ist. Dann können wir noch mehr aussagen.

Satz: *Sind die Ideale* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *prim zu denjenigen Verzweigungsstellen der Divisionsalgebra* D, *die nicht gleichzeitig Verzweigungsstellen des maximal kommutativen Teilkörpers* K *sind, so folgt aus* $\mathfrak{M}^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}$ *die Äquivalenz* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{F}$, *wo* $\mathfrak{F}$ *sich aus* k*-Idealen und gemeinsamen Teilern der Diskriminante der Algebra und des Körpers zusammensetzt, und umgekehrt.*

Beweis: 1. Sei $\mathfrak{M}^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}$. Wie oben wird $\mathfrak{M}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\mathfrak{F}\mathfrak{M}$. Wegen der Voraussetzung über $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ entsteht das zweiseitige Ideal $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ als Erweiterungsideal eines K-Ideals, das aus gemeinsamen Diskriminantenteilern und k-Idealen zusammengesetzt ist. Denn die den Diskriminanten von K und D gemeinsamen Primteiler $\mathfrak{p}$ sind von der Form $\mathfrak{M}\mathfrak{p} = (\mathfrak{M}\mathfrak{P})^l$, wo $\mathfrak{O}\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^l$, d. h. das zweiseitige $\mathfrak{M}$-Ideal $\mathfrak{M}\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{p}$ ist Erweiterungsideal des Primteilers $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ in K.

2. Sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{F}$. Dann schließt man wie im vorigen Beweise.

Nun sei K/k relativ-galoissch vom Grade n, $\mathfrak{G}$ die zugehörige Gruppe. Wir betrachten den Matrizenring $\mathfrak{S} = k_n$, d. h. das verschränkte Produkt von K mit seiner Gruppe $\mathfrak{G}$ bei Faktorensystem 1. Sei $\mathfrak{O}$ die Hauptordnung von K, u_S die Operatoren zu $\mathfrak{G}$: $u_S^{-1} K u_S = K^S$ elementweise. Unter Ω wollen wir den verschränkten Gruppenring $\mathfrak{O}\times\mathfrak{G} = \sum\limits_S \mathfrak{O} u_S$ verstehen, wobei $u_E = 1$ normiert ist. Dann ist Ω bestimmt in einer Maximalordnung $\mathfrak{M}$ enthalten. Denn sei $\mathfrak{M}'$ eine beliebige Maximalordnung

von $\mathfrak{S}$, so bilde man das Modulprodukt $\mathfrak{M}'\Omega$. Dies ist ein $\mathfrak{M}'$-Linksideal. Seine Rechtsordnung $\mathfrak{M}$ enthält den Ring Ω, weil $\Omega^2 = \Omega$.

Satz: *Den verschiedenen stark ambigen Idealen $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{O}$ modulo den Idealen des Zentrums entsprechen eineindeutig die verschiedenen Maximalordnungen $\mathfrak{M}'$, die den verschränkten Gruppenring Ω enthalten, nämlich als Rechtsordnungen $\mathfrak{M}^{\mathfrak{A}}$ der $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$.*

Stark ambig heißen Ideale, für die $\mathfrak{A}^S = \mathfrak{A}$ für alle $S \in \mathfrak{G}$ gilt.

Beweis: Wir haben zu zeigen:

1. $\mathfrak{M}^{\mathfrak{A}} \supseteq \Omega$.
2. Aus $\mathfrak{M}' \supseteq \Omega$ folgt $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}^{\mathfrak{A}}$.
3. $\mathfrak{M}^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{M}^{\mathfrak{B}} \longleftrightarrow \mathfrak{A} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{c}$.

Der dritte Punkt ist im ersten Satz dieses Paragraphen bereits festgestellt; $\mathfrak{S}$ ist hier voll zerfallend, so daß die Diskriminante von $\mathfrak{S}$ gleich 1 ist.

Zu 1. Es sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^S$ für alle $S \in \mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{M}\mathfrak{A} = \mathfrak{M}\mathfrak{A}^S = \mathfrak{M}u_S^{-1}\mathfrak{A}u_S = \mathfrak{M}u_S \cdot u_S^{-1}\mathfrak{A}u_S = \mathfrak{M}\mathfrak{A}\cdot u_S$. Die Rechtsordnung $\mathfrak{M}^{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$ enthält $\mathfrak{O}$, außerdem liegt wegen $\mathfrak{M}\mathfrak{A} = \mathfrak{M}\mathfrak{A}u_S$ auch u_S in $\mathfrak{M}^{\mathfrak{A}}$. Daher liegt auch $\Omega = \sum\limits_S \mathfrak{O}\,u_S$ in $\mathfrak{M}^{\mathfrak{A}}$.

Zu 2. Sei umgekehrt $\mathfrak{M}' \supseteq \Omega$ vorausgesetzt. Dann betrachten wir das Modulprodukt $\mathfrak{M}\mathfrak{M}'$. Dieses $\mathfrak{M}$-Linksideal hat die Rechtsordnung $\mathfrak{M}'$, die nach Voraussetzung insbesondere $\mathfrak{O}$ enthält. Es ist also nach dem Satz über Erweiterungsideale erzeugbar als Erweiterungsideal eines $\mathfrak{O}$-Ideals $\mathfrak{A}$: $\mathfrak{M}\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}\mathfrak{A}$. Ferner enthält $\mathfrak{M}'$ nach Voraussetzung auch die u_S. Daher wird $\mathfrak{M}\mathfrak{A} = \mathfrak{M}\mathfrak{A}u_S = \mathfrak{M}u_S\cdot u_S^{-1}\mathfrak{A}u_S = \mathfrak{M}\mathfrak{A}^S$, d. h. $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^S$ für jedes $S \in \mathfrak{G}$. Also ist $\mathfrak{A}$ stark ambig.

Für nicht voll zerfallende Algebren kann man, wenn speziell K/k zyklisch von Primzahlgrad l ist, folgende Überlegungen anstellen. Sie führen im wesentlichen zum Ausschluß der Verzweigungsstellen der Algebra.

Sei $D = (\alpha, K, S)$ eine zyklische Divisionsalgebra vom Primzahlgrade l mit $u^l = \alpha$, α ganz in k. Wenn α nicht von vornherein ganz ist, so kann es stets in trivialer Weise ganz gemacht werden. Außerdem sei wieder $\Omega = \sum\limits_{\nu=0}^{l-1} \mathfrak{O}\,u^\nu$ der verschränkte Gruppenring.

Satz: *Den stark ambigen Idealen modulo den Idealen des Zentrums und den gemeinsamen Verzweigungsstellen der Divisionsalgebra und des zyklischen maximal kommutativen Teilkörpers entsprechen eineindeutig die verschiedenen Maximalordnungen von D, die den verschränkten Gruppenring Ω enthalten.*

Beweis: Daß die Beziehung zwischen den $\mathfrak{M}^{\mathfrak{A}}$ und den $\mathfrak{A}$ modulo den gemeinsamen Verzweigungsstellen von D und K und den Idealen des

Zentrums k eineindeutig ist, war bereits in dem zweiten Satz dieses Paragraphen festgestellt.

I. Wir zeigen zunächst $\mathfrak{M}^{\mathfrak{A}} \supseteq \Omega$ für stark ambige $\mathfrak{A}$. Da sich jedes stark ambige Ideal in unserem Falle modulo den Idealen des Grundkörpers aus stark ambigen Primidealen $\mathfrak{P}$ zusammensetzt, kann der Beweis für jeden Differententeiler $\mathfrak{P}$ von K/k allein geführt werden. Der Fall eines beliebigen stark ambigen Ideals ergibt sich dann durch Zusammensetzung.

1. Sei $\mathfrak{p}$ ein Diskriminantenteiler von D und K. Dann ist das Ideal $\mathfrak{M}\mathfrak{P}$ ($\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^l$ in K) ein zweiseitiges Ideal, d. h. $\mathfrak{M}^{\mathfrak{P}} = \mathfrak{M} \supseteq \Omega$. Wir werden also auf keine neue Maximalordnung geführt. Dem entspricht, daß im Satz die stark ambigen Ideale auch modulo den gemeinsamen Verzweigungsstellen zu rechnen sind.

2. Wir betrachten nun Primideale $\mathfrak{p}$, die in der Diskriminante von K aufgehen, aber nicht in der Diskriminante von D. Dann ist $D_\mathfrak{p} \sim 1$, also das verschränkte Produkt $(\alpha, K_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p}, S) \sim 1$. D. h. aber $\alpha = N\,\mathsf{A}_\mathfrak{p}$ mit $\mathsf{A}_\mathfrak{p}$ aus $K_\mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ in $K_\mathfrak{p}$ voll verzweigt ist, ist sogar notwendig $\mathsf{A}_\mathfrak{p}$ ganz. Wir normieren nun das Faktorensystem α an der Stelle $\mathfrak{p}$ zu 1, indem wir für u den neuen Operator $v_\mathfrak{p} = u\,\mathsf{A}_\mathfrak{p}^{-1}$ einführen. Dann wird $v_\mathfrak{p}^l = 1$. Dies $v_\mathfrak{p}$ liegt in $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}$ und ist Einheit. Das kann man so einsehen: Man betrachte das Ideal $\mathfrak{M}_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p}$, seine Rechtsordnung ist $v_\mathfrak{p}^{-1}\,\mathfrak{M}_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p}$. Sie enthält wegen $v_\mathfrak{p}^{-1}\,\mathfrak{O}_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p} = \mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ die Hauptordnung $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ kein Verzweigungsteiler der Algebra ist, wird nach Hasse[8]) $\mathfrak{M}_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p} = \mathfrak{M}_\mathfrak{p}\,\mathsf{B}_\mathfrak{p}$ mit $\mathsf{B}_\mathfrak{p} \in K_\mathfrak{p}$. Nun betrachten wir die reduzierten Normen: $N_{\mathrm{red}}\,\mathfrak{M}_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p} = \mathfrak{o}_\mathfrak{p} \cdot N_{\mathrm{red}}\, v_\mathfrak{p}$ $= N_{\mathrm{red}}\,\mathfrak{M}_\mathfrak{p}\,\mathsf{B}_\mathfrak{p} = N\,\mathsf{B}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. Da an der Stelle $\mathfrak{p}$ das Element $v_\mathfrak{p}$ eine l-te Einheitswurzel ist, so existiert in $D_\mathfrak{p}$ eine Maximalordnung $\overline{\mathfrak{M}}_\mathfrak{p}$, die die Hauptordnung des Körpers der l-ten Einheitswurzeln enthält. $\overline{\mathfrak{M}}_\mathfrak{p}$ enthält also speziell $v_\mathfrak{p}$ als Einheit, und es wird $N_{\mathrm{red}}\,\overline{\mathfrak{M}}_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p} = N_{\mathrm{red}}\,\overline{\mathfrak{M}}_\mathfrak{p} = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. Folglich wird auch $N(\mathsf{B}_\mathfrak{p}) = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. Nun gilt Hilberts Satz 90[27]) für beliebige abstrakte zyklische Körper. Also wird hier speziell $(\mathsf{B}_\mathfrak{p}) = (\mathfrak{P}^a)^{1-S}$ $= (\mathfrak{P}^0)^a = \mathfrak{O}_\mathfrak{p}$, weil $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^S$. Hieraus folgt $\mathfrak{M}_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p} = \mathfrak{M}_\mathfrak{p}\,\mathsf{B}_\mathfrak{p} = \mathfrak{M}_\mathfrak{p}\,\mathfrak{O}_\mathfrak{p} = \mathfrak{M}_\mathfrak{p}$, also ist auch $v_\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}$ ganz und Einheit. Hiermit ist gezeigt, daß aus $\mathfrak{M}_\mathfrak{p} \supseteq \Sigma\,\mathfrak{O}_\mathfrak{p} \cdot u^\nu$ folgt $\mathfrak{M}_\mathfrak{p} \supseteq \Sigma\,\mathfrak{O}_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p}^\nu$, $v_\mathfrak{p}^l = 1$. Die Umkehrung ist klar, da $\mathsf{A}_\mathfrak{p}$ ein ganzes Element ist.

Um nun $\mathfrak{M}^{\mathfrak{P}} \supseteq \Omega$ zu beweisen, gehen wir zu den einzelnen Stellen über. Für die $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ wird $\mathfrak{M}_\mathfrak{q} = \mathfrak{M}_\mathfrak{q}^{\mathfrak{P}} \supseteq \Omega$, da $(\mathfrak{M}\mathfrak{P})_\mathfrak{q} = \mathfrak{M}_\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{M} \supseteq \Omega$ nach Voraussetzung. Für die Stelle $\mathfrak{p}$ genügt nach dem eben Festgestellten der Nachweis, daß $\Sigma\,\mathfrak{O}_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p}^\nu$ in $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}^{\mathfrak{P}}$ liegt. Wir betrachten das Ideal $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}\mathfrak{P}$ $= \mathfrak{M}_\mathfrak{p}\pi = \mathfrak{M}_\mathfrak{p}\pi^S = \mathfrak{M}_\mathfrak{p} \cdot v_\mathfrak{p}^{-1}\pi v_\mathfrak{p} = \mathfrak{M}_\mathfrak{p}\pi v_\mathfrak{p}$. Hieraus folgt, daß auch $v_\mathfrak{p}$

[27]) D. Hilbert, Gesammelte Abhandlungen, Bd. I, S. 149.

in der Rechtsordnung $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}^{\mathfrak{P}}$ von $\mathfrak{M}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{P}$ eine Einheit ist. Wegen $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}^{\mathfrak{P}} \supseteq \mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ wird also $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}^{\mathfrak{P}} \supseteq \Sigma \mathfrak{O}_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p}^\nu$, erst recht $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}^{\mathfrak{P}} \supseteq \sum \mathfrak{O}_\mathfrak{p} u^\nu$. D. h. aber $\mathfrak{M}^{\mathfrak{P}} \supseteq \Sigma \mathfrak{O} u^\nu = \Omega$.

Jedem Differententeiler $\mathfrak{P}$ von K, der prim zur Diskriminante von D ist, entspricht also eine Maximalordnung $\mathfrak{M}^{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}^{-1}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{P}$, die Ω enthält.

3. Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}\,\mathfrak{Q} \ldots$ ein beliebiges Produkt von stark ambigen Primidealen, so folgt $\mathfrak{M}^{\mathfrak{A}} \supseteq \Omega$, d. h. $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{M}\,\mathfrak{A} \supseteq \Omega$ durch schrittweise Anwendung des Bewiesenen auf $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \ldots$.

II. Aus $\mathfrak{M}' \supseteq \Omega$ folgt $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}^{\mathfrak{A}}$.

Sei $\mathfrak{M} \supseteq \Omega$, $\mathfrak{M}' \supseteq \Omega$. Wir betrachten $\mathfrak{M}\,\mathfrak{M}'$. Für die Diskriminantenteiler $\mathfrak{p}$ von D ist $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}' = \mathfrak{M}_\mathfrak{p}$ und daher $(\mathfrak{M}\,\mathfrak{M}')_\mathfrak{p} = \mathfrak{M}_\mathfrak{p}$; denn $(\mathfrak{M}\,\mathfrak{M}')_\mathfrak{p} = \mathfrak{M}\,\mathfrak{M}'\,\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \mathfrak{M}\,\mathfrak{o}_\mathfrak{p}\,\mathfrak{M}'\,\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \mathfrak{M}_\mathfrak{p}\,\mathfrak{M}_\mathfrak{p}' = \mathfrak{M}_\mathfrak{p}$. D. h. aber $(\mathfrak{M}\,\mathfrak{M}', \mathfrak{p}) = 1$. Für die Nichtverzweigungsstellen $\mathfrak{q}$ von D gilt mit einem Ideal $\mathfrak{A}_\mathfrak{q}$ aus $K_\mathfrak{q}$: $(\mathfrak{M}\,\mathfrak{M}')_\mathfrak{q} = \mathfrak{M}_\mathfrak{q}\,\mathfrak{A}_\mathfrak{q} = \mathfrak{M}_\mathfrak{q}\,v_\mathfrak{q}^{-1}\,\mathfrak{A}_\mathfrak{q} = \mathfrak{M}_\mathfrak{q}\,v_\mathfrak{q}^{-1}\,\mathfrak{A}_\mathfrak{q}\,v_\mathfrak{q}\,\mathfrak{M}_\mathfrak{q} = \mathfrak{M}_\mathfrak{q}\,\mathfrak{A}_\mathfrak{q}^S$, d. h. $\mathfrak{A}_\mathfrak{q} = \mathfrak{A}_\mathfrak{q}^S$. Denn für die Stellen $\mathfrak{q}$ ist nach Hasse [3]) $(\mathfrak{M}\,\mathfrak{M}')_\mathfrak{q}$ Erweiterungsideal aus $K_\mathfrak{q}$, und $v_\mathfrak{q}$, $v_\mathfrak{q}^{-1}$ sind als lokal normierte Operatoren Einheiten in $\mathfrak{M}_\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{M}_\mathfrak{q}'$, wie man ähnlich wie unter 1. zeigen kann. Zusammensetzung der Stellen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ ergibt im Großen ein Erweiterungsideal eines stark ambigen Ideals aus K, das keine Verzweigungsstellen von D enthält.

Zum Schlusse soll noch das einfachste Beispiel angegeben werden, in dem sich die Beschränkung der stark ambigen Ideale modulo den gemeinsamen Verzweigungsstellen auswirkt:

Sei $k = \mathsf{P}^{(0)}$ der rationale Zahlkörper, $K = k(i)$ der Gaußsche Zahlkörper, $\mathfrak{Q} = k(i\,u)$, $u^2 = -1$ der gewöhnliche Quaternionenkörper. Dann stimmen die endlichen Verzweigungsstellen von K und $\mathfrak{Q}$ überein, sie sind beide gleich 2. Die Hauptordnung $\mathfrak{O} = \Gamma^{(0)}[i]$ von K liegt in der Maximalordnung $\mathfrak{M} = \left[1, i, u, \frac{1+i+u+iu}{2}\right]_{\Gamma^{(0)}}$. Es gibt nur eine Maximalordnung, nämlich $\mathfrak{M}$, die $\Omega = [1, i, u, i\,u]_{\Gamma^{(0)}}$ enthält. Durch Ausrechnen überzeugt man sich leicht, daß kein Element ξ in $\mathfrak{Q}$ existiert, für das $\xi^{-1}\mathfrak{M}\,\xi \supseteq \Omega$, denn $\mathfrak{Q}$ hat bekanntlich die Typenzahl 1.

(Eingegangen am 5. 12. 1934.)

Einige Sätze über $\mathfrak{p}$-adische Potenzreihen mit Anwendung auf gewisse exponentielle Gleichungen.

Von

Th. Skolem in Bergen (Norwegen).

In dieser Abhandlung sollen einige Sätze bewiesen werden über Potenzreihen, deren Koeffizienten Zahlen des Körpers $K(\mathfrak{p})$ sind. Dabei ist K ein algebraischer Zahlkörper und $\mathfrak{p}$ ein Primideal daraus. Die Sätze beziehen sich auf die Nullstellenmannigfaltigkeiten in $K(\mathfrak{p})$ von Systemen dieser $\mathfrak{p}$-adischen Potenzreihen und auf das Verschwinden ihrer Funktionaldeterminanten auf jenen Nullstellenmannigfaltigkeiten. Ich will aber darauf aufmerksam machen, daß diese Arbeit so voraussetzungslos geschrieben ist wie nur möglich. Die hier aufgestellten Sätze über die Nullstellen dieser Potenzreihen werden nämlich vollständig bewiesen, ohne irgendwelche sonst bewiesenen Sätze dieser Art als bekannt vorauszusetzen. Vorliegende Abhandlung kann deshalb verstanden werden ohne Kenntnisse in der Idealtheorie und Eliminationstheorie der Potenzreihen.

Nachher mache ich einige Anwendungen hiervon auf gewisse exponentielle Gleichungen, woraus interessante Folgerungen über einige diophantische Gleichungen ableitbar sind. Die betrachteten exponentiellen Gleichungen haben die Gestalt

$$\sum_i a_i \alpha_{1i}^{x_1} \dots \alpha_{ti}^{x_t} = 0\ (\mathfrak{p}),$$

wo die a_i gegebene Zahlen aus $K(\mathfrak{p})$ sind, $\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{t1}$ Zahlen eines in K enthaltenen Körpers K_1 und $\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{ti}$ $(i = 2, 3, \dots)$ die dazu beziehungsweise konjugierten Zahlen des konjugierten, auch in K enthaltenen, Körpers K_i. Die Möglichkeit der Ableitung von Sätzen über diophantische Gleichungen beruht darauf, daß viele diophantische Gleichungen mittels der Dirichletschen Einheitstheorie als exponentielle Gleichungen der erwähnten Form oder Systeme von solchen geschrieben werden können.

In dieser Art beweise ich im folgenden, daß jede Gleichung der Form

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \dots + a_n y^n = b$$

nur endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen x und y hat, wenn die Gleichung

$$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

irreduzibel ist und nicht nur reelle Wurzeln hat [1]). Außerdem beweise ich, daß jede Gleichung der Form

$$N(\alpha x + \beta y + \gamma z) = a,$$

wo α, β, γ drei linear unabhängige ganze Zahlen sind in einem Körper fünften Grades derart, daß unter allen konjugierten dazu nur ein reeller vorkommt, und N die Norm bedeutet, nur endlich viele ganzzahlige Lösungen x, y, z hat [2]).

Der Ring der Potenzreihen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten aus $K(\mathfrak{p})$, die ein endliches Konvergenzgebiet haben, d. h. die konvergieren, wenn alle $x_i \precsim \mathfrak{p}^c$ sind für ein gewisses c, soll $\mathfrak{P}_n$ heißen.

Satz 1. *Ist* $P(x_1, \ldots, x_{m+1})$ *ein solches Element von* $\mathfrak{P}_{m+1}$, *daß* $P(0, \ldots, 0, x_{m+1})$ *nicht identisch Null ist, so gibt es Elemente* Q *und* R *von* $\mathfrak{P}_{m+1}$ *derart, daß die Identität*

$$P = Q\,R(\mathfrak{p})$$

gilt, wobei Q *ein Polynom ist in bezug auf* x_{m+1}, *etwa*

$$Q = \sum_{r=0}^{l} B_r x_{m+1}^r,$$

während $B_l(0, \ldots, 0)$ *eine* $\mathfrak{p}$*-adische Einheit ist und* $R(0, \ldots, 0) \neq 0(\mathfrak{p})$ [3]).

Beweis. Es sei

$$P = \sum_{r=0}^{\infty} A_r(x_1, \ldots, x_m)\, x_{m+1}^r.$$

Nach der Voraussetzung sind nicht alle $A_r(0, \ldots, 0) = 0$. Außerdem ist

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_r(0, \ldots, 0)\, x_{m+1}^r$$

konvergent für alle $x_{m+1} \precsim \mathfrak{p}^c$. Es sei die Zahl π aus K genau durch $\mathfrak{p}$ teilbar. Setzt man für $i = 1, 2, \ldots, m+1$ jedes $x_i = \pi^c y_i$, so konvergiert P, wenn alle $y_i \precsim 1$ sind. Speziell konvergiert

$$\sum_{r=0}^{\infty} A'_r(0, \ldots, 0)\, y_{m+1}^r,$$

wo

$$A'_r(0, \ldots, 0) = \pi^{cr} A_r(0, \ldots, 0)$$

ist, für alle $y_{m+1} \precsim 1$. Dann ist $\lim A'_r(0, \ldots, 0) = 0$, und infolgedessen haben die A'_r ein $\mathfrak{p}$-adisches Maximum für einen oder mehrere Werte

---

[1]) Dies ist ein ziemlich großer Teil eines bekannten Satzes von A. Thue.

[2]) Dieser Satz ist wohl kaum auf Grund der Thue-Siegelschen Sätze beweisbar.

[3]) Dem Wortlaute nach ist dies der sogenannte Weierstraßsche Vorbereitungssatz; vgl. z. B. W. Rückert, Math. Annalen 107, S. 262. Die Bestimmung des Polynoms Q ist aber hier eine andere als in den üblichen Beweisen dieses Satzes.

von r. Es sei l der größte Wert von r, für den dies Maximum eintritt. Es sei $A_l'(0, \ldots, 0) \sim \mathfrak{p}^u$. Setzt man dann für $i = 1, 2, \ldots, m$ jedes $y_i = \pi^\nu z_i$, so wird P eine nach Potenzprodukten von $z_1, \ldots, z_m, y_{m+1}$ fortschreitende Reihe, die für alle $z_i \lesssim \mathfrak{p}^{-\nu}$ und $y_{m+1} \lesssim 1$ konvergiert. Zugleich wird, wenn ν hinreichend groß gewählt ist, jedes Potenzprodukt, worin mindestens ein Faktor $x_1, \ldots, x_m$ auftritt, einen Koeffizienten erhalten, der $< \mathfrak{p}^u$ ist.

Dann kann ich schreiben

$$P = \pi^u (f_0(y_{m+1}) + \pi f_1(z_1, \ldots, z_m, y_{m+1}) + \pi^2 f_2(z_1, \ldots, z_m, y_{m+1}) + \ldots),$$

wobei die Koeffizienten hier alle $\mathfrak{p}$-adisch ganz sind, und der Koeffizient von y_{m+1}^l in f_0, der höchsten Potenz von y_{m+1} darin, eine $\mathfrak{p}$-adische Einheit ist. Dann kann man solche Polynome $\bar{f}_i$ und g_i mit ganzen $\mathfrak{p}$-adischen Koeffizienten finden, daß eine Identität der Form

$$(1) \qquad \pi^{-u} P = (f_0 + \pi \bar{f}_1 + \pi^2 \bar{f}_2 + \ldots)(1 + \pi g_1 + \pi^2 g_2 + \ldots) \quad (\mathfrak{p})$$

stattfindet, während zugleich alle $\bar{f}_i$ von kleinerem Grade in y_{m+1} als f_0 sind. Man erkennt nämlich, wenn man die geforderte Gleichung (1) in die unendliche Reihe von Kongruenzen nach steigenden Potenzen von $\mathfrak{p}$ auflöst, daß man die $\bar{f}_i$ allmählich findet als Reste der Division mod $\mathfrak{p}$ von früher gefundenen Polynomen durch f_0, während die g_i die dabei auftretenden unvollständigen Quotienten sind. Setzt man nun

$$f_0 + \pi \bar{f}_1 + \pi^2 \bar{f}_2 + \ldots = Q = B_0 + B_1 y_{m+1} + \ldots + B_l y_{m+1}^l,$$
$$\pi^u (1 + \pi g_1 + \pi^2 g_2 + \ldots) = R,$$

so sind Q und R $\mathfrak{p}$-adische Potenzreihen in $z_1, \ldots, z_m, y_{m+1}$, die jedenfalls konvergieren, wenn alle z_i und $y_{m+1} \lesssim 1$ sind. Außerdem ist

$$B_l(0, \ldots, 0) \sim \mathfrak{p}^{-u} A_l'(0, \ldots, 0)$$

eine $\mathfrak{p}$-adische Einheit und $R(0, \ldots, 0) \neq 0$, nämlich $\sim \mathfrak{p}^u$. Werden wieder in Q und R die ursprünglichen Variablen x_i eingeführt, so gehen sie in Reihen über, die für alle $x_1, \ldots, x_m \lesssim \mathfrak{p}^{c+\nu}$ und $x_{m+1} \lesssim \mathfrak{p}^c$ konvergieren. Der Satz ist hierdurch vollständig bewiesen.

Der Kürze halber nenne ich im folgenden eine Menge von unendlich vielen $\mathfrak{p}$-adischen Wertsystemen $(x_1, x_2, \ldots)$, die den Anfangspunkt $(0, 0, \ldots)$ als Häufungsstelle haben, eine h-Menge.

Satz 2. *Es seien $P_1, P_2, \ldots, P_n$ $\mathfrak{p}$-adische Potenzreihen in $x_1, \ldots, x_{m+1}$, die für alle $x_i \lesssim \mathfrak{p}^{c_1}$ konvergieren und also Elemente von $\mathfrak{P}_{m+1}$ sind. Es sei M eine h-Menge gemeinsamer Nullstellen der P_i. Dann gibt es Elemente Q_i, S_j, R_{ij} von $\mathfrak{P}_{m+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ derart, daß die Identitäten*

$$(2) \qquad S_j P_j = \sum_{i=1}^{m} Q_i R_{ij} \ (\mathfrak{p}), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

gelten, wobei alle $Q_i = 0$ und alle $S_j \neq 0$ sind für eine h-Untermenge M_0 von M.

Anmerkung. Herr B. L. v. d. Waerden hat mir mitgeteilt, daß Satz 2 vom Standpunkte der allgemeinen Ideal- und Eliminationstheorie aus betrachtet eigentlich folgendes bedeutet: Da der Anfangspunkt $(0, \ldots, 0)$ nicht isolierter Punkt der Nullstellenmannigfaltigkeit M ist, so enthält diese eine mindestens eindimensionale Teilmannigfaltigkeit M_0. Eine solche kann durch höchstens m unabhängige Gleichungen $Q_1 = 0, \ldots, Q_m = 0$ als Partialschnitt derart dargestellt werden, daß das Ideal $(Q_1, \ldots, Q_m)$ eine nicht-eingebettete Primärkomponente besitzt, welche prim ist und zur Mannigfaltigkeit M_0 gehört.

Ich bin aber zu dem Satze dadurch geführt worden, daß ich zuerst den Fall $m = 1$ betrachtete. In diesem Falle fand ich sehr leicht, daß wenn zwei oder mehrere Polynome — ich betrachtete zuerst Polynome — von x_1 und x_2, $P_1, \ldots, P_n$, unendlich viele gemeinsame Nullstellen haben, ein gemeinsamer Teiler Q vorhanden sein muß, d. h. man hat $P_i = Q R_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ und die gemeinsamen Nullstellen mit eventuell endlich vielen Ausnahmen der P_i sind die Nullstellen von Q. Dann lag der Gedanke nahe, daß für $m = 2$ die P_i in der Form $Q_1 R_{i1} + Q_2 R_{i2}$ ausdrückbar sein müßten usw., und wegen des Satzes 1 müssen die Potenzreihen sich analog verhalten. Allerdings konnte ich nicht mehr beweisen, daß die P_i selbst so ausdrückbar waren, sondern erst gewisse Produkte $S_i P_i$.

Beweis. Der Satz ist richtig für $m = 0$, weil die P_i dann identisch $= 0$ sein müssen. Ich nehme deshalb seine Gültigkeit für m Variablen an und beweise sie für $m + 1$ Variablen. Dabei nehme ich zuerst an, daß die P_i bloß Polynome sind in bezug auf x_{m+1}. Danach beweise ich, daß der Satz auch gültig bleibt, wenn die P_i beliebige Elemente von $\mathfrak{P}_{m+1}$ sind.

Um den Satz für die Polynome P_i von x_{m+1} zu beweisen, benutze ich wieder vollständige Induktion und zwar in bezug auf die Summe der Grade π_i von P_i. Der Satz ist ja richtig, wenn $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 0$ ist, so daß die P_i Potenzreihen in $x_1, \ldots, x_m$ sind; denn nach der Voraussetzung gibt es ja dann Elemente Q_i, S_j, R_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m-1;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ von $\mathfrak{P}_m$ derart, daß die Identitäten gelten

$$S_j P_j = \sum_{i=1}^{m-1} Q_i R_{ij}(\mathfrak{p}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei alle $Q_i = 0$ und alle $S_j \neq 0$ sind für eine h-Untermenge von M. Ich nehme deshalb an, daß der Satz wahr ist für kleinere Werte von

$\sum_{i=1}^{n} \pi_i$ als ϱ, und betrachte Polynome P_i von x_{m+1} mit der Gradsumme ϱ. Ich setze

$$P_i = A_{i,0} + A_{i,1} x_{m+1} + \ldots + A_{i,\pi_i} x_{m+1}^{\pi_i}.$$

Es ist klar, daß der Satz gilt, wenn bloß ein $\pi_i > 0$ ist, etwa π_1. Denn da $P_2, \ldots, P_n$ nur die Variablen $x_1, \ldots, x_m$ enthalten, so gibt es nach der Annahme für $i = 2, 3, \ldots, m$ und $j = 2, 3, \ldots, n$ Elemente Q_i, S_j und R_{ij} von $\mathfrak{P}_m$ derart, daß die Identitäten

$$S_j P_j = \sum_{i=2}^{m} Q_i R_{ij}(\mathfrak{p}), \quad j = 2, \ldots, n,$$

gelten, und dabei alle $Q_i = 0$ und $S_j \neq 0$ sind für eine h-Untermenge von M. Setzt man dann $Q_1 = P_1$, $S_1 = 1$, $R_{1,1} = 1$ und alle $R_{ij} = 0$, wo $i = 1$, $j > 1$ oder $i > 1$, $j = 1$, so hat man die Identitäten (2) und alle $Q_i = 0$ und $S_j \neq 0$ für dieselbe h-Untermenge von M. Es bleibt also nur der Fall, wo mindestens zwei Indizes i vorhanden sind derart, daß $\pi_i > 0$ ist.

Erstens kann es dann sein, daß für einen solchen Index a die Potenzreihe $A_{a,\pi_a} = 0$ ist für eine h-Untermenge $\overline{M}$ von M. Dann setze ich

$$\overline{P}_a = P_a - A_{a,\pi_a} x_{m+1}^{\pi_a}, \qquad P_{n+1} = A_{a,\pi_a}. \tag{3}$$

Für die Polynome

$$P_1, \ldots, P_{a-1}, \overline{P}_a, P_{a+1}, \ldots, P_{n+1}$$

ist die Gradsumme dann $< \varrho$; denn P_{n+1} ist ja vom Grade 0, und $\overline{P}_a$ hat höchstens den Grad $\pi_a - 1$. Außerdem ist $\overline{M}$ eine h-Menge gemeinsamer Nullstellen aller dieser Polynome. Also gibt es nach der Annahme Elemente

$$Q_i, S_j, R_{ij} \ (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, a-1, a+1, \ldots, n+1)$$
$$\text{und} \quad \overline{S}_a, \overline{R}_{ia}$$

derart, daß die Identitäten gelten

$$S_1 P_1 = Q_1 R_{1,1} + \ldots + Q_m R_{m1}, \ldots, \overline{S}_a \overline{P}_a = Q_1 \overline{R}_{1a} + \ldots + Q_m \overline{R}_{ma}, \ldots$$
$$S_{n+1} P_{n+1} = Q_1 R_{1,n+1} + \ldots + Q_m R_{m,n+1},$$

wobei alle $Q_i = 0$ und alle S_j und $\overline{S}_a \neq 0$ sind für eine h-Untermenge M_0 von $\overline{M}$. Aus (3) folgt aber

$$S_a P_a = Q_1 R_{1a} + \ldots + Q_m R_{ma},$$

wenn allgemein

$$S_{n+1} \overline{R}_{ia} + \overline{S}_a R_{i,n+1} x_{m+1}^{\pi_a} = R_{ia} \quad \text{und} \quad S_{n+1} \overline{S}_a = S_a$$

gesetzt ist. Da M_0 h-Untermenge von M ist, so hat man wieder (2).

Zweitens hat man den Fall, daß für alle i, für welche $\pi_i > 0$ ist, $A_{i,\pi_i} \neq 0$ ist für alle Elemente von M derart, daß alle $x_i \precsim \mathfrak{p}^{c_2}$ sind. Es sei $\overline{M}$ die h-Untermenge von M, die alle Elemente davon enthält, für welche alle $x_i \precsim \mathfrak{p}^{c_2}$ sind. Jetzt wähle ich zwei Indizes a und b derart, daß $\pi_a \geqq \pi_b > 0$. Weiter setze ich

$$\overline{P}_a = A_{b,\pi_b} P_a - A_{a,\pi_a} P_b \, x_{m+1}^{\pi_a - \pi_b}. \tag{4}$$

Dann ist die Gradsumme wieder $< \varrho$ für die Polynome

$$P_1, \ldots, P_{a-1}, \overline{P}_a, P_{a+1}, \ldots, P_n.$$

Außerdem sind diese alle $= 0$ für die Elemente der h-Menge $\overline{M}$. Also gibt es nach der Annahme Elemente $S_1, \ldots, S_{a-1}, \overline{S}_a, S_{a+1}, \ldots, S_n$: Q_i und R_{ij} für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, a-1, a+1, \ldots, n$ und endlich $\overline{R}_{ia}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ von $\mathfrak{P}_{m+1}$ derart, daß

$$S_1 P_1 = Q_1 R_{1,1} + \ldots + Q_m R_{m\,1}, \ldots, \overline{S}_a \overline{P}_a = Q_1 \overline{R}_{1\,a} + \ldots + Q_m \overline{R}_{m\,a}, \ldots$$
$$S_b P_b = Q_1 R_{1\,b} + \ldots + Q_m R_{m\,b}, \ldots, S_n P_n = Q_1 R_{1\,n} + \ldots + Q_m R_{m\,n},$$

wobei die $Q_i = 0$ und

$$S_1, \ldots, S_{a-1}, \overline{S}_a, S_{a+1}, \ldots, S_n \quad \text{alle} \quad \neq 0$$

sind für eine h-Untermenge M_0 von $\overline{M}$. Nun bekommt man aber nach (4)

$$\overline{S}_a S_b A_{b,\pi_b} P_a = Q_1 (S_b \overline{R}_{1\,a} + \overline{S}_a A_{a,\pi_a} x_{m+1}^{\pi_a - \pi_b} R_{1\,b}) + \ldots$$
$$+ Q_m (S_b \overline{R}_{m\,a} + \overline{S}_a A_{a,\pi_a} x_{m+1}^{\pi_a - \pi_b} R_{m\,b}),$$

und setzt man

$$\overline{S}_a S_b A_{b,\pi_b} = S_a, \quad S_b \overline{R}_{i\,a} + \overline{S}_a A_{a,\pi_a} x_{m+1}^{\pi_a - \pi_b} R_{i\,b} = R_{i\,a},$$

so bekommt man wieder die Identitäten der Form (2), wobei alle $Q_i = 0$ und $S_j \neq 0$ sind für alle Elemente von M_0. Hierdurch ist die Allgemeingültigkeit des Satzes bewiesen für Polynome von x_{m+1} mit Koeffizienten, die Elemente von $\mathfrak{P}_m$ sind.

Danach sollen Potenzreihen $P_1, \ldots, P_n$ in $x_1, \ldots, x_{m+1}$ betrachtet werden. Es ist klar, daß man von identisch verschwindenden Reihen absehen kann, d. h. ich kann annehmen, daß kein P_i identisch verschwindet. Erstens kann es sein, daß jedes $P_i(0, \ldots, 0, x_{m+1})$ nicht identisch verschwindet. Dann kann man nach Satz 1 für jedes i ein Polynom $\overline{P}_i$ von x_{m+1} mit Koeffizienten, die Elemente von $\mathfrak{P}_m$ sind, und eine Potenzreihe K_i finden derart, daß $P_i = \overline{P}_i K_i$ identisch $(\mathfrak{p})$ ist und $K_i(0, \ldots, 0) \neq 0$, so daß immer $K_i(x_1, \ldots, x_m) \neq 0$ ist, wenn alle $x_i \precsim \mathfrak{p}^{c_3}$ sind. Es sei M eine h-Menge gemeinsamer Nullstellen der P_i und $\overline{M}$ ihre h-Untermenge, die alle Elemente von M enthält, für

welche alle $x_i \lesssim \mathfrak{p}^{c_3}$ sind. Dann ist offenbar $\overline{M}$ eine h-Menge gemeinsamer Nullstellen aller $\overline{P}_i$. Deshalb gibt es nach dem eben bewiesenen Elemente Q_i, S_j und $\overline{R}_{ij}$ von $\mathfrak{P}_{m+1}$ derart, daß die Identitäten

$$S_j \overline{P}_j = \sum_{i=1}^{m} Q_i \overline{R}_{ij}(\mathfrak{p}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

gelten, wobei alle $Q_i = 0$ und $S_j \neq 0$ für eine h-Untermenge M_0 von $\overline{M}$. Setzt man dann $R_{ij} = \overline{R}_{ij} K_j$, so bekommt man wieder die Identitäten (2), und die Q_i sind $= 0$ und die $S_j \neq 0$ für die h-Untermenge M_0 von M.

Um die Allgemeingültigkeit des Satzes zu zeigen, genügt es deshalb durch eine Variablentransformation, welche den Punkt $(0, \ldots, 0)$ invariant läßt, zu bewerkstelligen, daß wenn $y_1, \ldots, y_{m+1}$ die neuen Variablen sind, nicht alle $P_i(0, \ldots, 0, y_{m+1})$ identisch $= 0$ sind. In der Tat kann man dies schon mittels einer linearen homogenen Transformation machen, wie ich jetzt zeigen will.

Wie schon bemerkt, ist $\prod_{i=1}^{n} P_i$ nicht identisch $= 0$. Infolgedessen gibt es Wertsysteme der Variablen derart, daß alle $P_i \neq 0$ werden; es sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}$ ein solches. Da alle $P_i(0, \ldots, 0) = 0$ sind, so ist mindestens ein $\alpha_i \neq 0$, und da es auf die Numerierung der Variablen nicht ankommt, kann ich $\alpha_{m+1} \neq 0$ annehmen. Setzt man dann

$$\alpha_{m+1} x_1 - \alpha_1 x_{m+1} = y_1, \ldots, \alpha_{m+1} x_m - \alpha_m x_{m+1} = y_m, \; x_{m+1} = y_{m+1},$$

so gehen die P_i in Potenzreihen P_i' der neuen Variablen $y_1, \ldots, y_{m+1}$ über, während eine h-Menge M' gemeinsamer Nullstellen existiert. Außerdem ist kein $P_i'(0, \ldots, 0, y_{m+1})$ identisch $= 0$; denn es ist ja

$$P_i'(0, \ldots, 0, \alpha_{m+1}) = P_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}) \neq 0.$$

Hierdurch ist Satz 2 vollständig bewiesen.

Satz 3. *Für jedes Element* $(x_1, \ldots, x_{m+1})$ *der im Satz 2 erwähnten Untermenge* M_0 *von* M, *worin alle* $Q_i = 0$ *und* $S_j \neq 0$ *sind, ist die Funktionaldeterminante*

$$\frac{\partial(P^{(1)}, \ldots, P^{(m+1)})}{\partial(x_1, \ldots, x_{m+1})} = 0,$$

wo $P^{(1)}, \ldots, P^{(m+1)}$ *beliebige* $m+1$ *der Potenzreihen* P_i *sind.*

Anmerkung: Daß die Funktionaldeterminante $= 0$ sein muß in einem nichtisolierten Punkte π der Nullstellenmannigfaltigkeit des Ideals $(P^{(1)}, \ldots, P^{(m+1)})$, erkennt man äußerst leicht so: Ist

$$\frac{\partial(P^{(1)}, \ldots, P^{(m+1)})}{\partial(x_1, \ldots, x_{m+1})} \neq 0,$$

so haben offenbar die Tangentialhyperebenen der Hyperflächen $P^{(i)} = 0$ in π nur den Punkt π gemein, der deshalb eine isolierte gemeinsame Null-

stelle sein muß. Da der Anfangspunkt $(0, \ldots, 0)$ eine Häufungsstelle der gemeinsamen Nullstellen der $P^{(i)}$ ist, so folgt hieraus sofort, daß die Funktionaldeterminante $= 0$ ist für $(0, \ldots, 0)$. Für die übrigen Punkte in M_0 folgt dasselbe in dieser Weise aber erst, wenn man zeigt, daß auch diese Punkte nicht isoliert sind. Setzt man übrigens den Satz als bekannt voraus, daß die Nullstellenmannigfaltigkeit der $P^{(i)}$ einen mindestens eindimensionalen Bestandteil enthalten muß, und daß die Punkte eines solchen Teiles alle nichtisoliert sind, so folgt allerdings, daß die Funktionaldeterminante $= 0$ sein muß in allen Punkten dieser Teilmannigfaltigkeit. Statt derartiges vorauszusetzen (vgl. die Bemerkung in der Einleitung) gebe ich hier den folgenden Beweis des Satzes 3.

Beweis. Die Potenzreihen P_j, Q_i, R_{ij}, S_j im Satz 2 haben einen gemeinsamen Konvergenzbereich um den Nullpunkt. Aus den Gleichungen

$$S_j P_j = \sum_{i=1}^{m} Q_i R_{ij} (\mathfrak{p}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

folgen dann in jedem Punkte des gemeinschaftlichen Konvergenzbereiches, der zu der h-Menge M_0 gehört, die Gleichungen

$$S_j \frac{\partial P_j}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial Q_i}{\partial x_1} R_{ij}, \ldots, S_j \frac{\partial P_j}{\partial x_{m+1}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial Q_i}{\partial x_{m+1}} R_{ij} (\mathfrak{p}) \tag{5}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Aus $m + 1$ beliebig gewählten der Gleichungen (5) folgt aber in bekannter Weise, daß die Determinante

$$\left| \frac{\partial P^{(h)}}{\partial x_i} \right| = 0 \, (\mathfrak{p}) \qquad (i, h = 1, 2, \ldots, m+1)$$

ist. Hierdurch ist Satz 3 bewiesen.

Nun ist jede solche Funktionaldeterminante wieder ein Element von $\mathfrak{P}_{m+1}$. Da sie alle ebenso wie die gegebenen P_j eine h-Menge gemeinsamer Nullstellen haben, so gilt dies also auch wieder für alle diese Reihen mit den Reihen zusammengenommen, welche als Funktionaldeterminanten daraus ableitbar sind usw. endlich oft wiederholt. Also gilt folgender Satz:

Satz 4. *Haben die Reihen $P_1, \ldots, P_n$ eine h-Menge gemeinsamer Nullstellen, so gilt dies auch* (vielleicht nicht gerade für dieselbe h-Menge, sondern bloß für eine h-Untermenge davon) *für alle Reihen $P_1, \ldots, P_N$, die aus $P_1, \ldots, P_n$ abgeleitet werden können durch endlich oft wiederholte Bildung von Funktionaldeterminanten der Form*

$$\frac{\partial (P^{(1)}, \ldots, P^{(m+1)})}{\partial (x_1, \ldots, x_{m+1})}.$$

Unter einer zu $(a_1, \ldots, a_{m+1})$ gehörigen h-Menge verstehe ich eine Menge von unendlich vielen Punkten $(x_1, \ldots, x_{m+1})$, für welche $(a_1, \ldots, a_{m+1})$

eine Häufungsstelle ist. Es ist dann klar, daß Satz 4 gültig bleibt, wenn man allgemein statt h-Menge sagt: h-Menge in bezug auf $(a_1, \ldots, a_{m+1})$. Denn man kann die Transformation

$$x_i - a_i = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+1)$$

machen.

Jetzt sollen einige Anwendungen der bisher bewiesenen Sätze gemacht werden. In diesen Anwendungen soll K ein algebraischer Zahlkörper sein, der die Körper $K_1, \ldots, K_m$ enthält, wobei der Grad von $K_1 \geqq m$ ist, und $K_1, \ldots, K_m$ alle konjugiert zu K_1 sind. Es sollen $\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{t1}$ immer t Zahlen aus K_1 bedeuten, während die dazu konjugierten Zahlen aus K_i als $\alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{ti}$ bezeichnet werden.

Satz 5. *Es seien die $m-1$ linear unabhängigen* $\mathfrak{p}$*-adischen Gleichungen*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^{(\lambda)} \xi_i = 0\,(\mathfrak{p}), \quad \xi_i = \alpha_{1i}^{x_1} \ldots \alpha_{ti}^{x_t}, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, m-1,$$

gegeben, wobei die $a_i^{(\lambda)}$ Zahlen des Körpers $K(\mathfrak{p})$ sind und $\mathfrak{p}$ ein Primidealfaktor in K der natürlichen Primzahl p, die prim ist zu $N(\alpha_{1,1}\alpha_{2,1}\ldots\alpha_{t1})$, $N =$ Norm. Gibt es mindestens zwei ganzzahlige Lösungen $x_1, \ldots, x_t$, so muß ein Potenzprodukt

$$\alpha_{1i}^{l_1} \alpha_{2i}^{l_2} \ldots \alpha_{ti}^{l_t}$$

mit ganzen Exponenten $l_1, \ldots, l_t$, die nicht alle 0 sind, für alle i denselben Wert haben. Kommen alle ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ wirklich vor, und ist K_1 vom Grade m, so muß dieser Wert rational sein.

Beweis. Die $m-1$ Gleichungen können bei passender Numerierung in bezug auf $\xi_2, \ldots, \xi_m$ aufgelöst werden, so daß man bekommt:

$$\xi_i = b_i \xi_1\,(\mathfrak{p}), \quad i = 2, 3, \ldots, m,$$

wo $b_i \neq 0\,(\mathfrak{p})$ sein muß, nämlich eine $\mathfrak{p}$-adische Einheit, da ja die ξ prim zu $\mathfrak{p}$ sind. Hat man nun zwei verschiedene Lösungen

$$x_1', \ldots, x_t' \quad \text{und} \quad x_1'', \ldots, x_t''$$

oder mit anderen Worten

$$\alpha_{1i}^{x_1'} \ldots \alpha_{ti}^{x_t'} = b_i \alpha_{1,1}^{x_1'} \ldots \alpha_{t,1}^{x_t'}, \; \alpha_{1i}^{x_1''} \ldots \alpha_{ti}^{x_t''} = b_i \alpha_{1,1}^{x_1''} \ldots \alpha_{t1}^{x_t''}\,(\mathfrak{p}), \; i = 2, 3, \ldots, m,$$

so bekommt man

$$\alpha_{1i}^{l_1} \ldots \alpha_{ti}^{l_t} = \alpha_{1,1}^{l_1} \ldots \alpha_{t1}^{l_t}\,(\mathfrak{p}), \qquad i = 2, 3, \ldots, m, \tag{6}$$

wenn

$$x_1' - x_1'' = l_1, \ldots, x_t' - x_t'' = l_t$$

gesetzt werden. Da aber die beiden Seiten der Gleichungen (6) Zahlen aus K sind, so folgt aus ihrer Gleichheit nach $\mathfrak{p}$, daß sie gleich sind im gewöhnlichen Sinne. Daraus folgt, daß der gemeinsame Wert aller

$\alpha_{1i}^{l_1}\ldots\alpha_{ti}^{l_t}$ rational sein muß, falls $\xi_1, \ldots, \xi_m$ eine volle Reihe konjugierter Zahlen sind. Der Satz ist hierdurch bewiesen.

Man erkennt übrigens, daß, wenn die Gleichungen (6) stattfinden, unendlich viele ganzzahlige Lösungen existieren, falls es überhaupt solche gibt; denn ist $x_1, \ldots, x_t$ eine solche, so ist auch $x_1 + l_1 u, \ldots, x_t + l_t u$ eine solche für beliebige ganze u.

Satz 6. *Es seien bloß $m-2$ linear unabhängige Gleichungen*

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{m} a_i^{(\lambda)} \xi_i = 0\,(\mathfrak{p}), \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, m-2,$$

gegeben, wobei $m - 2 \geqq t$ ist. Gibt es unendlich viele ganzzahlige Lösungen $x_1, \ldots, x_t$, so gibt es Potenzprodukte

$$\alpha_{1,1}^{l_1}\alpha_{2,1}^{l_2}\ldots\alpha_{t1}^{l_t},$$

$l_1, \ldots, l_t$ ganz und nicht alle 0, die zu einem echten Unterkörper von K_1 gehören.

Beweis. Es genügt, den Satz in dem Falle zu beweisen, daß in jeder Hyperebene mit rationalen Koeffizienten des $(x_1, \ldots, x_t)$-Raumes nur endlich viele Lösungen $x_1, \ldots, x_t$ vorkommen. Gibt es nämlich unendlich viele, die alle der Gleichung

$$h_1 x_1 + h_2 x_2 + \ldots + h_t x_t = h, \quad \text{etwa} \quad h_1 \neq 0,$$

genügen, so kann ich setzen

$$x_2 = h_1 y_2 + r_2, \ldots, x_t = h_1 y_t + r_t, \quad \text{alle } r_i \geqq 0 \text{ und } < h_1,$$

wodurch

$$x_1 = -h_2 y_2 - h_3 y_3 - \ldots + \bar{h},$$

wo

$$\bar{h} = \frac{-h_2 r_2 - h_3 r_3 - \ldots + h}{h_1},$$

also ganz sein muß für gewisse r_i. Dadurch erhält man

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{a}_i^{(\lambda)} (\alpha_{1i}^{-h_2}\alpha_{2i}^{h_1})^{y_2}\ldots(\alpha_{1i}^{-h_t}\alpha_{ti}^{h_1})^{y_t} = 0, \quad \bar{a}_i^{(\lambda)} = a_i^{(\lambda)}\alpha_{1i}^{\bar{h}}\alpha_{2i}^{r_2}\ldots\alpha_{ti}^{r_t}.$$

Es gibt nur endlich viele mögliche Systeme dieser Form nach den Werten von $r_2, \ldots, r_t$. Infolgedessen muß mindestens eines dieser Systeme unendlich viele ganzzahlige Lösungen $y_2, \ldots, y_t$ haben. Nimmt man also an, daß der Satz schon für die kleinere Variablenzahl $t-1$ bewiesen ist, so weiß man, daß ganze Exponenten $l_2, \ldots, l_t$, nicht alle 0, existieren derart, daß

$$(\alpha_{1,1}^{-h_2}\alpha_{2,1}^{h_1})^{l_2}\ldots(\alpha_{1,1}^{-h_t}\alpha_{t,1}^{h_1})^{l_t}$$

zu einem echten Unterkörper von K_1 gehört, d. h.

$$\alpha_{1,1}^{-h_2 l_2 - \dots - h_t l_t}\,\alpha_{2,1}^{h_1 l_2} \dots \alpha_{t,1}^{h_1 l_t}$$

gehört dazu. Offenbar ist der Satz dadurch sofort für die jetzige Variablenzahl t bewiesen. Also kann ich annehmen, daß für beliebige Wahl der rationalen Koeffizienten $h_1, \dots, h_t, h$, so daß sie nicht alle 0 sind, nur endlich viele (eventuell keine) der Lösungen $x_1, \dots, x_t$ die Gleichung $h_1 x_1 + \dots + h_t x_t = h$ befriedigen.

Weiter genügt es, den Satz in dem Falle zu beweisen, daß alle $\alpha_{ij} \equiv 1 \pmod{p}$ bzw. (mod 4) sind. Denn sonst gibt es jedenfalls ganze positive Exponenten e_i derart, daß alle $\alpha_{ij}^{e_i} \equiv 1 \pmod{p}$ sind, und durch die Aufspaltung mittels der Gleichungen

$$x_1 = e_1 y_1 + r_1, \dots, x_t = e_t y_t + r_t$$

von $\sum_{i=1}^{m} a_i^{(\lambda)} \xi_i = 0\,(\mathfrak{p})$ in endlich viele Gleichungssysteme

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{a}_i^{(\lambda)} \bar{\xi}_i = 0\,(\mathfrak{p}), \quad \bar{\xi}_i = (\alpha_{1i}^{e_1})^{y_1} \dots (\alpha_{ti}^{e_t})^{y_t}, \quad \bar{a}_i^{(\lambda)} = a_i^{(\lambda)} \alpha_{1i}^{r_1} \dots \alpha_{ti}^{r_t}$$

sieht man ein, daß es genügt, die Richtigkeit des Satzes für jedes dieser letzten Gleichungssysteme zu beweisen. Also kann ich annehmen, daß schon in den gegebenen Gleichungen alle $\alpha_{ij} \equiv 1 \pmod{p}$ sind.

Nun kann ich allgemein annehmen, daß die Gleichungen gelten (l bedeutet den $\mathfrak{p}$-adischen Logarithmus)

$$l\frac{\alpha_{si}}{\alpha_{s1}} = \eta_{s1}\, l\frac{\alpha_{r+1,i}}{\alpha_{r+1,1}} + \dots + \eta_{s,t-r}\, l\frac{\alpha_{ti}}{\alpha_{t1}}\,(\mathfrak{p}) \quad (s = 1, 2, \dots, r;\ i = 1, 2, \dots, m),$$

wobei die η Zahlen des Körpers $K(\mathfrak{p})$ sind, während es nicht möglich ist, dieselben Gleichungen für $s = 1, 2, \dots, r$ und $r+1$ oder $r+2$ usw. aufzustellen; es mag natürlich auch sein, daß $r = 0$ ist. Dann ist also

$$\frac{\alpha_{si}}{\alpha_{s1}} = \left(\frac{\alpha_{r+1,i}}{\alpha_{r+1,1}}\right)^{\eta_{s1}} \left(\frac{\alpha_{r+2,i}}{\alpha_{r+2,1}}\right)^{\eta_{s2}} \dots \left(\frac{\alpha_{ti}}{\alpha_{t1}}\right)^{\eta_{s,t-r}} (\mathfrak{p}),$$

und wird dies in die gegebenen Gleichungen eingesetzt, so bekommt man das System

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{m} a_i^{(\lambda)} \beta_{1i}^{\zeta_1} \beta_{2i}^{\zeta_2} \dots \beta_{t-r,i}^{\zeta_{t-r}} = 0\ (\mathfrak{p}),$$

wo

$$\zeta_1 = \eta_{1,1} x_1 + \dots + \eta_{r1} x_r + x_{r+1},\ \zeta_2 = \eta_{1,2} x_1 + \dots + \eta_{r2} x_r + x_{r+2}, \dots,$$
$$\zeta_{t-r} = \eta_{1,t-r} x_1 + \dots + \eta_{r,t-r} x_r + x_t$$

und

$$\beta_{1i} = \alpha_{r+1,i},\quad \beta_{2i} = \alpha_{r+2,i}, \dots, \beta_{t-r,i} = \alpha_{ti}.$$

Zuerst werde ich zeigen, daß aus den unendlich vielen Lösungen $x_1, \ldots, x_t$ von (7) auch unendlich viele verschiedene Lösungen $\zeta_1, \ldots, \zeta_{t-r}$ von (8) entstehen müssen. Nehmen wir das Gegenteil an. Dann müßte $r > 0$ sein, und unendlich viele Lösungen $x_1, \ldots, x_t$ müßten zu demselben Wertsystem $\zeta_1, \ldots, \zeta_{t-r}$ Anlaß geben. Nun seien $x_1^{(j)}, \ldots, x_t^{(j)}$ für $j = 1, 2, \ldots$ solche Lösungen. Dann bekäme man

$$(9) \qquad \eta_{1s}(x_1^{(j)} - x_1^{(1)} +) \ldots + \eta_{rs}(x_r^{(j)} - x_r^{(1)}) + x_{r+s}^{(j)} - x_{r+s}^{(1)} = 0\,(\mathfrak{p}),$$
$$s = 1, 2, \ldots, t - r; \quad j = 2, 3, \ldots.$$

Zuerst ist es nicht möglich, daß z. B. $x_1^{(j)} - x_1^{(1)} = 0$ sein könnte für alle j; denn dann befriedigten ja alle Lösungen $x_1^{(j)}, \ldots, x_t^{(j)}$ eine Gleichung mit rationalen Koeffizienten. Es sei deshalb j_1 ein solcher Index, etwa der kleinste, daß $x_1^{(j_1)} - x_1^{(1)} \neq 0$ ist. Dann ist es weiter nicht möglich, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^{(j_1)} - x_1^{(1)} & x_2^{(j_1)} - x_2^{(1)} \\ x_1^{(j)} - x_1^{(1)} & x_2^{(j)} - x_2^{(1)} \end{vmatrix} = 0$$

sein könnte für alle Indizes j; denn wäre das der Fall, so befriedigten ja alle Lösungen $x_1^{(j)}, \ldots, x_t^{(j)}$ wieder eine Gleichung mit rationalen Koeffizienten, nämlich

$$(x_1^{(j_1)} - x_1^{(1)})(x_2^{(j)} - x_2^{(1)}) = (x_2^{(j_1)} - x_2^{(1)})(x_1^{(j)} - x_1^{(1)}).$$

Deshalb sei j_2 ein solcher Index, daß

$$\begin{vmatrix} x_1^{(j_1)} - x_1^{(1)} & x_2^{(j_1)} - x_2^{(1)} \\ x_1^{(j_2)} - x_1^{(1)} & x_2^{(j_2)} - x_2^{(1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Augenscheinlich gibt es dann wieder ein solches j_3, daß die analoge 3-reihige Determinante $\neq 0$ ist usw. Nach r Schritten gelangt man zu dem Ergebnis, daß es Indizes $j_1, \ldots, j_r$ gibt derart, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^{(j_1)} - x_1^{(1)} & x_2^{(j_1)} - x_2^{(1)} & \ldots & x_r^{(j_1)} - x_r^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(j_r)} - x_1^{(1)} & x_2^{(j_r)} - x_2^{(1)} & \ldots & x_r^{(j_r)} - x_r^{(1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Schreibt man nun die Gleichungen (9) für $j_1, j_2, \ldots, j_r$ und dazu noch ein beliebiges j auf, wobei man s z. B. $= 1$ setzt, so bekommt man durch Elimination von $\eta_{1,1}, \eta_{2,1}, \ldots, \eta_{r1}$ offenbar

$$\begin{vmatrix} x_1^{(j_1)} - x_1^{(1)} & x_2^{(j_1)} - x_2^{(1)} & \ldots & x_r^{(j_1)} - x_r^{(1)} & x_{r+1}^{(j_1)} - x_{r+1}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(j_r)} - x_1^{(1)} & x_2^{(j_r)} - x_2^{(1)} & \ldots & x_r^{(j_r)} - x_r^{(1)} & x_{r+1}^{(j_r)} - x_{r+1}^{(1)} \\ x_1^{(j)} - x_1^{(1)} & x_2^{(j)} - x_2^{(1)} & \ldots & x_r^{(j)} - x_r^{(1)} & x_{r+1}^{(j)} - x_{r+1}^{(1)} \end{vmatrix} = 0,$$

so daß die unendlich vielen Wertsysteme $x_1^{(j)}, \ldots, x_t^{(j)}$ wieder eine Gleichung mit rationalen Koeffizienten, nicht alle 0, befriedigen würden.

Hierdurch ist also bewiesen, daß die unendlich vielen Lösungen $x_1, \ldots, x_t$ auch zu unendlich vielen Wertsystemen $\zeta_1, \ldots, \zeta_{t-r}$ Anlaß geben müssen. Da alle ζ_i p-adisch $\lesssim \max(\eta_{1,1}, \ldots, \eta_{r,t-r}, 1)$ sind, so müssen Häufungsstellen für die Lösungen $\zeta_1, \ldots, \zeta_{t-r}$ von (8) existieren. Ist $c_1, \ldots, c_{t-r}$ eine solche, so bilden also die Lösungen eine zu diesem Punkte gehörige h-Menge M im früher erklärten Sinne. Da die linken Seiten unserer Gleichungen jetzt p-adische und also auch p-adische Potenzreihenentwicklungen haben, die für alle ganzen p-adischen Werte der x konvergieren — denn alle α_{ij} waren ja $\equiv 1 \bmod p$ bzw. mod 4 —, so gibt es deshalb nach Satz 4 eine h-Untermenge von M derart, daß für alle ihre Elemente nicht nur die Gleichungen (8) stattfinden, sondern auch die in bezug auf $\zeta_1, \ldots, \zeta_{t-r}$ gebildeten Funktionaldeterminanten $= 0\,(\mathfrak{p})$ sind. Die Gleichungen (8) kann ich bei passender Numerierung in bezug auf $\xi_3, \ldots, \xi_m$ auflösen, so daß ich bekomme

$$g_i = \xi_i - a_{i1}\xi_1 - a_{i2}\xi_2 = 0\,(\mathfrak{p}) \qquad (i = 3, 4, \ldots, m). \tag{10}$$

Sollte es für ein i eintreten, daß etwa $a_{i2} = 0\,(\mathfrak{p})$ wird, so ist die Sache bald erledigt[4]). Denn sind $x_1^{(1)}, \ldots, x_t^{(1)}$ und $x_1^{(2)}, \ldots, x_t^{(2)}$ zwei verschiedene der Lösungen $x_1, \ldots, x_t$, so bekommt man, wenn man die ξ wieder mit Hilfe der α_{ij} schreibt,

$$\alpha_{1i}^{l_1}\alpha_{2i}^{l_2}\ldots\alpha_{ti}^{l_t} = \alpha_{1,1}^{l_1}\alpha_{2,1}^{l_2}\ldots\alpha_{t1}^{l_t},$$

wobei $l_j = x_j^{(1)} - x_j^{(2)}$, so daß die l_j ganz und nicht alle 0 sind. Dann gehört also $\alpha_{1,1}^{l_1}\ldots\alpha_{t1}^{l_t}$ zu einem echten Unterkörper von K_1. Deshalb kann ich weiter annehmen, daß alle a_{i1} und $a_{i2} \neq 0\,(\mathfrak{p})$ sind. Infolgedessen kann ich die ξ_i, wo $i \neq 1, j$, auch durch ξ_1, ξ_j ausdrücken, was unten benutzt wird. Mittels einer kleinen Rechnung findet man, daß für diejenigen Werte der ξ, für welche die Gleichungen (10) erfüllt sind, die Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(g_i, g_j, g_h, \ldots)}{\partial(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots)}$$

in der Form

$$D_{i,j,h,\ldots} = \begin{vmatrix} a_{i1}\xi_1 l\dfrac{\beta_{1i}}{\beta_{1,1}} + a_{i2}\xi_2 l\dfrac{\beta_{1i}}{\beta_{1,2}} & a_{j1}\xi_1 l\dfrac{\beta_{1j}}{\beta_{1,1}} + a_{j2}\xi_2 l\dfrac{\beta_{1j}}{\beta_{1,2}} & \cdots \\ a_{i1}\xi_1 l\dfrac{\beta_{2i}}{\beta_{2,1}} + a_{i2}\xi_2 l\dfrac{\beta_{2i}}{\beta_{2,2}} & a_{j1}\xi_1 l\dfrac{\beta_{2j}}{\beta_{2,1}} + a_{j2}\xi_2 l\dfrac{\beta_{2j}}{\beta_{2,2}} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

[4]) Eigentlich folgt in diesem Falle die Richtigkeit des Satzes 6 aus Satz 5.

geschrieben werden können. Die Indizes $i, j, h, \ldots$ kommen dabei in der Anzahl $t - r$ vor. Wir haben also auch die Gleichungen

(11) $$D_{i,j,h,\ldots} = 0\,(\mathfrak{p}).$$

Der Koeffizient von ξ_1^{t-r} in $D_{i,j,h,\ldots}$ ist $a_{i1}a_{j1}a_{h1}\ldots d_{i,j,h,\ldots}$, wo

(12) $$d_{i,j,h,\ldots} = \begin{vmatrix} l\dfrac{\beta_{1i}}{\beta_{1,1}} & l\dfrac{\beta_{1j}}{\beta_{1,1}} & \ldots \\ l\dfrac{\beta_{2i}}{\beta_{2,1}} & l\dfrac{\beta_{2j}}{\beta_{2,1}} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Es ist nicht möglich, daß diese Determinante $d_{i,j,h,\ldots} = 0\,(\mathfrak{p})$ ist für alle Wahlen von $i, j, h, \ldots$ sowohl für (10) wie für die analogen Gleichungen, die man erhält, wenn alle ξ durch ξ_1 und ξ_3 bzw. ξ_1 und $\xi_4, \ldots$ bzw. ξ_1 und ξ_m ausgedrückt werden. Denn wäre das der Fall, so könnte man Zahlen $\tau_1, \ldots, \tau_{t-r}$ finden, die nicht alle 0 sind derart, daß die Gleichungen

$$\tau_1 l\frac{\beta_{1i}}{\beta_{1,1}} + \ldots + \tau_{t-r} l\frac{\beta_{t-r,i}}{\beta_{t-r,1}} = 0\,(\mathfrak{p})$$

alle stattfänden. Dann wäre aber die Zahl r Seite 409 nicht maximal, wie vorausgesetzt. Ich kann deshalb annehmen, daß $d_{i,j,h,\ldots} \neq 0\,(\mathfrak{p})$ ist in (12).

Dann ist die Gleichung (11) nicht identisch erfüllt in bezug auf ξ_1/ξ_2. Infolgedessen hat sie in bezug auf ξ_1/ξ_2 nur endlich viele Lösungen im Körper $K(\mathfrak{p})$. Gibt es keine solche Lösung, so ist der hier betrachtete Fall unendlich vieler Lösungen $\zeta_1, \ldots, \zeta_{t-r}$ von (8) überhaupt nicht möglich. Sonst muß das Gleichungssystem, das aus den Gleichungen (10) und einer Gleichung der Form

$$\xi_1 = b\,\xi_2$$

besteht, wo b eine Wurzel von $D_{i,j,h,\ldots}(\xi_1/\xi_2) = 0$ ist, unendlich viele ganzzahlige Lösungen $x_1, \ldots, x_t$ haben. Da aber dies System aus $m - 1$ unabhängigen linearen Gleichungen in den ξ besteht, so folgt aus Satz 5, daß es ganze rationale Exponenten $l_1, \ldots, l_t$, nicht alle Null, gibt derart, daß für alle i

$$\alpha_{1i}^{l_1} \ldots \alpha_{ti}^{l_t} = \alpha_{1,1}^{l_1} \ldots \alpha_{t1}^{l_t}$$

ist. Hierdurch ist Satz 6 vollständig bewiesen.

Anmerkung zu Satz 6. Man erkennt leicht, wenn man den Beweis des Satzes 6 durchliest, daß, wenn K_1 vom Grade m ist, und in (10) und allen dazu analogen Gleichungen alle Koeffizienten $\neq 0\,(\mathfrak{p})$ sind, oder mit anderen Worten wenn zwischen drei beliebigen der ξ eine lineare homogene Gleichung besteht, deren Koeffizienten alle $\neq 0\,(\mathfrak{p})$ sind, un-

endlich viele ganzzahlige Lösungen $x_1, \ldots, x_t$ nur dann existieren können, wenn für gewisse ganze Zahlen $l_1, \ldots, l_t$, die nicht alle $= 0$ sind, $\alpha_{1,1}^{l_1} \ldots \alpha_{t1}^{l_t}$ eine rationale Zahl ist.

Satz 7. *Eine Gleichung der Form*

(13) $$f_m(x, y) = a, \quad f_m \text{ homogen vom Grade } m,$$

wobei a und die Koeffizienten in f_m ganz rational sind, während das Polynom f_m irreduzibel ist, und $f_m(t, 1) = 0$ nicht ausschließlich reelle Wurzeln hat, besitzt nur endlich viele ganzzahlige Lösungen x, y.

Beweis. Es sei

$$f_m(x, y) = a_0 x^m + \ldots + a_m y^m.$$

Wird $a_0 x = x_1$ gesetzt, so bekommt man

(14) $$x_1^m + a_1 x^{m-1} y + \ldots + a_0^{m-1} a_m y^m = a_0^{m-1} a = b.$$

Es sei ϑ_1 eine Wurzel der Gleichung

(15) $$\vartheta^m + a_1 \vartheta^{m-1} + \ldots + a_0^{m-1} a_m = 0.$$

Dann geht (14) über in

$$N(x_1 - \vartheta_1 y) = b.$$

Nun sei $\varkappa^{(1)}, \ldots, \varkappa^{(l)}$ ein vollständiges System nicht-assoziierter Zahlen mit der Norm b in dem von ϑ_1 herrührenden Körper $k(\vartheta_1)$. Dann hat man also

$$x_1 - \vartheta_1 y = \varkappa_1 \xi_1,$$

wo $\varkappa_1$ eine der Zahlen $\varkappa^{(1)}, \ldots, \varkappa^{(l)}$ ist und ξ_1 eine Einheit. Bilden $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ ein System von Grundeinheiten in $k(\vartheta_1)$, so ist

$$\xi_1 = \pm \varepsilon_1^{z_1} \ldots \varepsilon_n^{z_n},$$

da wir von dem trivialen Fall absehen können, wo alle Wurzeln von (15) imaginär sind, so daß in $k(\vartheta_1)$ keine anderen Einheitswurzeln als ± 1 vorkommen. Sind $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ die Wurzeln von (15), und ebenso $\xi_2, \xi_3, \ldots$ die zu ξ_1 konjugierten Einheiten aus den Körpern $k(\vartheta_2), k(\vartheta_3), \ldots$, so hat man weiter

$$x_1 - \vartheta_2 y = \varkappa_2 \xi_2, \qquad x_1 - \vartheta_3 y = \varkappa_3 \xi_3, \ldots.$$

Aus den 3 Gleichungen

$$x_1 - \vartheta_i y = \varkappa_i \xi_i, \qquad x_1 - \vartheta_j y = \varkappa_j \xi_j, \qquad x_1 - \vartheta_h y = \varkappa_h \xi_h$$

bekommt man aber

(16) $$(\vartheta_j - \vartheta_h) \varkappa_i \xi_i + (\vartheta_h - \vartheta_i) \varkappa_j \xi_j + (\vartheta_i - \vartheta_j) \varkappa_h \xi_h = 0.$$

Da alle ϑ_r verschieden sind, so sind hier immer alle Koeffizienten $\neq 0$. Da nicht alle ϑ_r reell sind, so ist $n \leqq m - 2$. Aus der Anmerkung zu Satz 6 folgt deshalb, daß nur endlich viele ganzzahlige Lösungen der Gleichungen (16) in $z_1, \ldots, z_n$ und also nur endlich viele Lösungen von (13) in ganzen Zahlen x und y existieren können, da nämlich $\varepsilon_1^{l_1} \ldots \varepsilon_n^{l_n}$ nur für $l_1 = l_2 = \ldots = l_n = 0$ einen rationalen Wert annimmt. Hierdurch ist Satz 7 bewiesen.

Satz 8. *Ein System von $m - 3$ linear-unabhängigen Gleichungen*

$$(17) \qquad \sum_{i=1}^{m} a_i^{(\lambda)} \xi_i = 0 \ (\mathfrak{p})$$

mit Koeffizienten aus $K(\mathfrak{p})$ sei gegeben und $m \geqq 5$. Dabei ist hier $\xi_i = \alpha_i^x \beta_i^y$, indem α_1 und β_1 zwei ganze Zahlen aus K_1 sind und α_i, β_i die dazu konjugierten aus K_i. Gibt es unendlich viele ganzzahlige Lösungen (x, y), so gibt es ganze Exponenten l_1 und l_2, nicht beide 0, derart, daß $\alpha_1^{l_1} \beta_1^{l_2}$ zu einem echten Unterkörper von K_1 gehört.

Beweis. Wie früher genügt es anzunehmen, daß $\alpha_1 \equiv \beta_1 \equiv 1$ (mod p) bzw. (mod 4) ist, wenn $N\mathfrak{p} = p$ ist. Natürlich kann ich auch annehmen, daß die Logarithmen $l\,\frac{\alpha_j}{\alpha_i}$. $l\,\frac{\beta_j}{\beta_i}$, $i \neq j$, alle $\neq 0$ sind; denn sonst wäre ja nichts zu beweisen.

Man kann (17) in bezug auf $m - 3$ der ξ auflösen. Bei passender Numerierung kann man annehmen, daß die dabei erhaltenen Gleichungen sind:

$$(18) \qquad \xi_i = a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + a_{i3}\xi_3 \ (\mathfrak{p}), \quad i = 4, 5, \ldots, m.$$

Wenn für irgendein i zwei der Koeffizienten $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} = 0$ sind, so ist die Richtigkeit des Satzes 8 sofort klar nach Satz 5. Tritt es für zwei Indizes i und j ein, daß a_{ih} und $a_{jh} = 0$ sind, wo $h = 1, 2$ oder 3 ist, so ist die Richtigkeit klar nach Satz 6; denn man bekommt ja dann zwei Gleichungen in vier der ξ, und es gibt bloß zwei unbekannte Exponenten. Also kann ich annehmen, daß $a_{i1} = 0$ bzw. $a_{i2} = 0$ bzw. $a_{i3} = 0$ höchstens für einen Index i_1 bzw. i_2 bzw. i_3 eintritt, während zugleich i_1, i_2, i_3 verschieden sind.

Nach Satz 4 müssen nun, wenn unendlich viele ganzzahlige Lösungen (x, y) vorhanden sind, für unendlich viele darunter auch die Gleichungen

$$g_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x}\frac{\partial f_j}{\partial y} - \frac{\partial f_i}{\partial y}\frac{\partial f_j}{\partial x} = 0 \ (\mathfrak{p})$$

erfüllt sein, wobei

$$f_i = \xi_i - a_{i1}\xi_1 - a_{i2}\xi_2 - a_{i3}\xi_3$$

gesetzt ist. Nun wird, wenn $f_i = 0$ berücksichtigt wird,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = a_{i1}\xi_1 l\frac{\alpha_i}{\alpha_1} + a_{i2}\xi_2 l\frac{\alpha_i}{\alpha_2} + a_{i3}\xi_3 l\frac{\alpha_i}{\alpha_3},$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial y} = a_{i1}\xi_1 l\frac{\beta_i}{\beta_1} + a_{i2}\xi_2 l\frac{\beta_i}{\beta_2} + a_{i3}\xi_3 l\frac{\beta_i}{\beta_3},$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x} = a_{j1}\xi_1 l\frac{\alpha_j}{\alpha_1} + a_{j2}\xi_2 l\frac{\alpha_j}{\alpha_2} + a_{j3}\xi_3 l\frac{\alpha_j}{\alpha_3},$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial y} = a_{j1}\xi_1 l\frac{\beta_j}{\beta_1} + a_{j2}\xi_2 l\frac{\beta_j}{\beta_2} + a_{j3}\xi_3 l\frac{\beta_j}{\beta_3},$$

und deshalb wird

$$\begin{aligned} g_{ij} = {} & a_{i1}a_{j1}\left(l\frac{\alpha_i}{\alpha_1}l\frac{\beta_j}{\beta_1} - l\frac{\beta_i}{\beta_1}l\frac{\alpha_j}{\alpha_1}\right)\xi_1^2 + \left(a_{i1}a_{j2}\left(l\frac{\alpha_i}{\alpha_1}l\frac{\beta_j}{\beta_2} - l\frac{\beta_i}{\beta_1}l\frac{\alpha_j}{\alpha_2}\right)\right. \\ & \left. + a_{i2}a_{j1}\left(l\frac{\alpha_i}{\alpha_2}l\frac{\beta_j}{\beta_1} - l\frac{\beta_i}{\beta_2}l\frac{\alpha_j}{\alpha_1}\right)\right)\xi_1\xi_2 + a_{i2}a_{j2}\left(l\frac{\alpha_i}{\alpha_2}l\frac{\beta_i}{\beta_2} - l\frac{\beta_i}{\beta_2}l\frac{\alpha_j}{\alpha_2}\right)\xi_2^2 \\ & + \left(a_{i1}a_{j3}\left(l\frac{\alpha_i}{\alpha_1}l\frac{\beta_j}{\beta_3} - l\frac{\beta_i}{\beta_1}l\frac{\alpha_j}{\alpha_3}\right) + a_{i3}a_{j1}\left(l\frac{\alpha_i}{\alpha_3}l\frac{\beta_j}{\beta_1} - l\frac{\beta_i}{\beta_3}l\frac{\alpha_j}{\alpha_1}\right)\right)\xi_1\xi_3 \\ & + \left(a_{i2}a_{j3}\left(l\frac{\alpha_i}{\alpha_2}l\frac{\beta_j}{\beta_3} - l\frac{\beta_i}{\beta_2}l\frac{\alpha_j}{\alpha_3}\right) + a_{i3}a_{j2}\left(l\frac{\alpha_i}{\alpha_3}l\frac{\beta_j}{\beta_2} - l\frac{\beta_i}{\beta_3}l\frac{\alpha_j}{\alpha_2}\right)\right)\xi_2\xi_3 \\ & + a_{i3}a_{j3}\left(l\frac{\alpha_i}{\alpha_3}l\frac{\beta_j}{\beta_3} - l\frac{\beta_i}{\beta_3}l\frac{\alpha_j}{\alpha_3}\right)\xi_3^2. \end{aligned}$$

Zuerst ist die Möglichkeit denkbar, daß alle $g_{ij} = 0\,(\mathfrak{p})$ identisch in ξ_1, ξ_2, ξ_3 erfüllt sind. Dann hat man für alle Paare i, j aus der Reihe $4, 5, \ldots, m$

$$(19)\qquad \begin{aligned} & l\frac{\alpha_i}{\alpha_1}l\frac{\beta_j}{\beta_1} - l\frac{\beta_i}{\beta_1}l\frac{\alpha_j}{\alpha_1} = 0, \quad l\frac{\alpha_i}{\alpha_2}l\frac{\beta_j}{\beta_2} - l\frac{\beta_i}{\beta_2}l\frac{\alpha_j}{\alpha_2} = 0, \\ & l\frac{\alpha_i}{\alpha_3}l\frac{\beta_j}{\beta_3} - l\frac{\beta_i}{\beta_3}l\frac{\alpha_j}{\alpha_3} = 0\,(\mathfrak{p}). \end{aligned}$$

Das ist sofort ersichtlich, wenn alle a_{ih} und $a_{jh} \neq 0$ sind. Aber die Gleichungen (19) bleiben auch sonst gültig. Nimmt man erstens für ein Indexpaar i, j an, daß $a_{i1} = 0$, die übrigen fünf a dagegen $\neq 0$, so bekommt man, wenn g_{ij} identisch $= 0\,(\mathfrak{p})$ ist,

$$(20)\qquad \begin{aligned} & l\frac{\alpha_i}{\alpha_2}l\frac{\beta_j}{\beta_1} - l\frac{\beta_i}{\beta_2}l\frac{\alpha_j}{\alpha_1} = 0, \quad l\frac{\alpha_i}{\alpha_2}l\frac{\beta_j}{\beta_2} - l\frac{\beta_i}{\beta_2}l\frac{\alpha_j}{\alpha_2} = 0, \\ & l\frac{\alpha_i}{\alpha_3}l\frac{\beta_j}{\beta_1} - l\frac{\beta_i}{\beta_3}l\frac{\alpha_j}{\alpha_1} = 0, \quad l\frac{\alpha_i}{\alpha_3}l\frac{\beta_j}{\beta_3} - l\frac{\beta_i}{\beta_3}l\frac{\alpha_j}{\alpha_3} = 0\,(\mathfrak{p}). \end{aligned}$$

Die zweite und die dritte Gleichung in (19) kommen also schon in (20) vor. Subtrahiert man die zweite Gleichung in (20) von der ersten darin, so bekommt man

$$l\frac{\alpha_i}{\alpha_2}l\frac{\beta_2}{\beta_1} - l\frac{\beta_i}{\beta_2}l\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0,$$

woraus

$$l\frac{\alpha_i}{\alpha_2}\, l\frac{\beta_i}{\beta_1} - l\frac{\beta_i}{\beta_2}\, l\frac{\alpha_i}{\alpha_1} = 0,$$

was in Verbindung mit der ersten Gleichung in (20) die erste Gleichung in (19) gibt.

Nimmt man zweitens an, daß $a_{i1} = a_{j2} = 0$ ist, die übrigen vier a dagegen $\neq 0$, so hat man

$$(21)\qquad l\frac{\alpha_i}{\alpha_2}\, l\frac{\beta_j}{\beta_1} - l\frac{\beta_i}{\beta_2}\, l\frac{\alpha_j}{\alpha_1} = 0, \quad l\frac{\alpha_i}{\alpha_3}\, l\frac{\beta_j}{\beta_1} - l\frac{\beta_i}{\beta_3}\, l\frac{\alpha_j}{\alpha_1} = 0,$$

$$l\frac{\alpha_i}{\alpha_2}\, l\frac{\beta_j}{\beta_3} - l\frac{\beta_i}{\beta_2}\, l\frac{\alpha_j}{\alpha_3} = 0, \quad l\frac{\alpha_i}{\alpha_3}\, l\frac{\beta_j}{\beta_3} - l\frac{\beta_i}{\beta_3}\, l\frac{\alpha_j}{\alpha_2} = 0\ (\mathfrak{p}).$$

Aus der dritten und vierten Gleichung in (21) bekommt man durch ähnliche Schlüsse wie eben, daß

$$l\frac{\alpha_i}{\alpha_2}\, l\frac{\beta_j}{\beta_2} - l\frac{\beta_i}{\beta_2}\, l\frac{\alpha_j}{\alpha_2} = 0$$

stattfindet. Aber dann gilt nach dem eben bewiesenen auch die erste Gleichung in (19). Also bleiben die Gleichungen (19) stets gültig.

Wird nun

$$l\frac{\beta_4}{\beta_1} = \eta\, l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}$$

gesetzt, so bekommt man aus der ersten Gleichung in (19) für $j = 5, \ldots, m$

$$l\frac{\beta_j}{\beta_1} = \eta\, l\frac{\alpha_j}{\alpha_1},$$

woraus auch $l\frac{\beta_j}{\beta_i} = \eta\, l\frac{\alpha_j}{\alpha_i}$ für alle Paare i, j aus der Reihe $4, \ldots, m$. Die Gleichungen (19) können aber auch in der Form

$$l\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\, l\frac{\beta_j}{\beta_i} - l\frac{\beta_i}{\beta_1}\, l\frac{\alpha_j}{\alpha_i} = 0, \quad l\frac{\alpha_i}{\alpha_2}\, l\frac{\beta_j}{\beta_i} - l\frac{\beta_i}{\beta_2}\, l\frac{\alpha_j}{\alpha_i} = 0,$$

$$l\frac{\alpha_i}{\alpha_3}\, l\frac{\beta_j}{\beta_i} - l\frac{\beta_i}{\beta_3}\, l\frac{\alpha_j}{\alpha_i} = 0$$

geschrieben werden, woraus durch Subtraktion folgt

$$l\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\, l\frac{\beta_j}{\beta_i} - l\frac{\beta_2}{\beta_1}\, l\frac{\alpha_j}{\alpha_i} = 0, \quad l\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\, l\frac{\beta_j}{\beta_i} - l\frac{\beta_3}{\beta_1}\, l\frac{\alpha_j}{\alpha_i} = 0,$$

$$l\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\, l\frac{\beta_j}{\beta_i} - l\frac{\beta_3}{\beta_2}\, l\frac{\alpha_j}{\alpha_i} = 0$$

und deshalb bekommt man auch $l\frac{\beta_2}{\beta_1} = \eta\, l\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ und $l\frac{\beta_3}{\beta_1} = \eta\, l\frac{\alpha_3}{\alpha_1}$, d. h. man hat überhaupt für alle i

$$\frac{\beta_i}{\beta_1} = \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right)^{\eta}.$$

Dadurch nimmt eine beliebige der Gleichungen (17) die Form an

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^{(\lambda)} \alpha_i^{x+\eta y} = 0.$$

Wird $x + \eta y = \zeta$ gesetzt, so ist für ganze x und y in p-adischem Sinne $\zeta \precsim \max(\eta, 1)$. Ist nun die Gleichung $\sum_{i=1}^{m} a_i \alpha_i^{\zeta} = 0$ erfüllt für unendlich viele solche ζ, so gibt es eine Häufungsstelle ζ_0. Wird dann $\zeta = \zeta_0 + \zeta'$ gesetzt und $\bar{a}_i = a_i \alpha_i^{\zeta_0}$, so hat die Gleichung $\sum_{i=1}^{m} \bar{a}_i \alpha_i^{\zeta'} = 0$ unendlich viele Lösungen ζ', die gegen 0 konvergieren und also eine h-Menge bilden. Nach Satz 4 gelten dann alle Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{a}_i (l\,\alpha_i)^r \alpha_i^{\zeta'} = 0, \quad r = 0, 1, \ldots, m-1$$

für eine h-Untermenge davon. Speziell bekommt man die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{a}_i (l\,\alpha_i)^r = 0, \quad r = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Da die a_i nicht alle 0 sind, so sind die $\bar{a}_i$ nicht alle 0. Also folgt

$$\prod_{i \neq j} (l\,\alpha_i - l\,\alpha_j) = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m,$$

d. h. für ein Paar i, j gilt $\alpha_i = \alpha_j$ und also wegen der Beziehung

$$\frac{\beta_h}{\beta_1} = \left(\frac{\alpha_h}{\alpha_1}\right)^{\eta}, \quad h = 1, \ldots, m,$$

auch $\beta_i = \beta_j$.

Sonst gibt es nur endlich viele Lösungen ζ. Hat trotzdem (17) unendlich viele ganzzahlige Lösungen (x, y), so muß für zwei Paare x_1, y_1 und x_2, y_2 die Gleichung $x_1 + \eta y_1 = x_2 + \eta y_2$ stattfinden, woraus

$$x_1 - x_2 = \eta (y_2 - y_1),$$

d. h. η ist rational. Ist $\eta = -\frac{l_1}{l_2}$, so bekommt man für alle i $\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right)^{l_1} = \left(\frac{\beta_i}{\beta_1}\right)^{-l_2}$ oder mit anderen Worten $\alpha_1^{l_1} \beta_1^{l_2} = \alpha_i^{l_1} \beta_i^{l_2}$.

Weiter muß der Fall betrachtet werden, daß ein g_{ij} nicht identisch verschwindet. Es sei $g_{4,5}$ nicht identisch $= 0\,(\mathfrak{p})$. Ich setze

$$g_{4,5} = b_{1,1}\xi_1^2 + b_{1,2}\xi_1\xi_2 + b_{2,2}\xi_2^2 + b_{1,3}\xi_1\xi_3 + b_{2,3}\xi_2\xi_3 + b_{3,3}\xi_3^2,$$

wo also

$$b_{1,1} = a_{4,1} a_{5,1} \left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\, l\frac{\beta_5}{\beta_1} - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\, l\frac{\alpha_5}{\alpha_1} \right).$$

$$b_{1,2} = a_{4,1} a_{5,2} \left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\, l\frac{\beta_5}{\beta_2} - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\, l\frac{\alpha_5}{\alpha_2} \right) + a_{4,2} a_{5,1} \left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\, l\frac{\beta_5}{\beta_1} - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\, l\frac{\alpha_5}{\alpha_1} \right),$$

usw.

Nun muß nach Satz 4 für unendlich viele der Lösungen (x, y) nicht nur $g_{4,5} = 0\,(\mathfrak{p})$, sondern auch $g_{4,4,5} = 0$ und $g_{4,5,5} = 0\,(\mathfrak{p})$ stattfinden, wobei

$$g_{4,4,5} = \frac{\partial f_4}{\partial x}\frac{\partial g_{4,5}}{\partial y} - \frac{\partial f_4}{\partial y}\frac{\partial g_{4,5}}{\partial x}, \quad g_{4,5,5} = \frac{\partial f_5}{\partial x}\frac{\partial g_{4,5}}{\partial y} - \frac{\partial f_5}{\partial y}\frac{\partial g_{4,5}}{\partial x}.$$

Nach einigen Rechnungen findet man

$$g_{4,4,5} = c_{1,1,1}\xi_1^3 + c_{1,1,2}\xi_1^2\xi_2 + c_{1,2,2}\xi_1\xi_2^2 + c_{2,2,2}\xi_2^3 + c_{1,1,3}\xi_1^2\xi_3 + \dots + c_{3,3,3}\xi_3^3 + c_{1,2,3}\xi_1\xi_2\xi_3,$$

wo

(22)
$$\begin{aligned}
c_{1,1,1} &= a_{4,1}b_{1,1}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\beta_1^2 - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\alpha_1^2\right),\\
c_{2,2,2} &= a_{4,2}b_{2,2}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\beta_2^2 - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\alpha_2^2\right),\\
c_{3,3,3} &= a_{4,3}b_{3,3}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\,l\beta_3^2 - l\frac{\beta_4}{\beta_3}\,l\alpha_3^2\right),\\
c_{1,1,2} &= a_{4,1}b_{1,2}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\beta_1\beta_2 - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\alpha_1\alpha_2\right)\\
&\quad + a_{4,2}b_{1,1}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\beta_1^2 - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\alpha_1^2\right),\\
c_{1,2,2} &= a_{4,1}b_{2,2}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\beta_2^2 - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\alpha_2^2\right)\\
&\quad + a_{4,2}b_{1,2}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\beta_1\beta_2 - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\alpha_1\alpha_2\right),\\
c_{1,1,3} &= a_{4,1}b_{1,3}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\beta_1\beta_3 - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\alpha_1\alpha_3\right)\\
&\quad + a_{4,3}b_{1,1}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\,l\beta_1^2 - l\frac{\beta_4}{\beta_3}\,l\alpha_1^2\right),\\
c_{1,3,3} &= a_{4,1}b_{3,3}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\beta_3^2 - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\alpha_3^2\right)\\
&\quad + a_{4,3}b_{1,3}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\,l\beta_1\beta_3 - l\frac{\beta_4}{\beta_3}\,l\alpha_1\alpha_3\right),\\
c_{2,2,3} &= a_{4,2}b_{2,3}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\beta_2\beta_3 - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\alpha_2\alpha_3\right)\\
&\quad + a_{4,3}b_{2,2}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\,l\beta_2^2 - l\frac{\beta_4}{\beta_3}\,l\alpha_2^2\right),\\
c_{2,3,3} &= a_{4,2}b_{3,3}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\beta_3^2 - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\alpha_3^2\right)\\
&\quad + a_{4,3}b_{2,3}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\,l\beta_2\beta_3 - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\alpha_2\alpha_3\right),\\
c_{1,2,3} &= a_{4,1}b_{2,3}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\beta_2\beta_3 - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\alpha_2\alpha_3\right)\\
&\quad + a_{4,2}b_{1,3}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\beta_1\beta_3 - l\frac{\beta_4}{\beta_3}\,l\alpha_1\alpha_3\right)\\
&\quad + a_{4,3}b_{1,2}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\,l\beta_1\beta_2 - l\frac{\beta_4}{\beta_3}\,l\alpha_1\alpha_2\right).
\end{aligned}$$

Tritt es nun ein, daß $g_{4,5}$ als Polynom in ξ_1, ξ_2, ξ_3 reduzibel ist im Körper $K(\mathfrak{p})$, so ist die Richtigkeit des Satzes 8 klar nach Satz 6; denn dann bekommt man ja bei der Zerlegung von $g_{4,5}$ in seine Linearfaktoren außer den $m-3$ Gleichungen (18) noch eine weitere lineare Gleichung in ξ_1, ξ_2, ξ_3, die offenbar von den ersten $m-3$ linear unabhängig ist. Ist $g_{4,5}$ dagegen wohl irreduzibel, aber kein Teiler von $g_{4,4,5}$ oder $g_{4,5,5}$, so muß Satz 8 richtig sein nach Satz 5; denn geht $g_{4,5}$ z. B. nicht in $g_{4,4,5}$ auf, so sind die Gleichungen

$$g_{4,5} = 0, \quad g_{4,4,5} = 0\,(\mathfrak{p})$$

nur von endlich vielen Werten von ξ_1/ξ_3 und ξ_2/ξ_3 erfüllt, d. h. man bekommt die Disjunktion zwischen einer endlichen Anzahl von Gleichungen der Form

$$\xi_1 = b\,\xi_3, \quad \xi_2 = c\,\xi_3,$$

welche mit (18) zusammen ein System von $m-1$ linear-unabhängigen Gleichungen in den ξ geben. Also bleibt nur übrig zu untersuchen, wie die Sache steht, wenn das quadratische Polynom $g_{4,5}$ sowohl in dem kubischen Polynom $g_{4,4,5}$ wie in $g_{4,5,5}$ aufgeht.

Dann muß

$$c_{1,1,1}\xi_1^3 + c_{1,1,2}\xi_1^2\xi_2 + \ldots + c_{3,3,3}\xi_3^3 + c_{1,2,3}\xi_1\xi_2\xi_3$$
$$= (b_{1,1}\xi_1^2 + b_{1,2}\xi_1\xi_2 + \ldots + b_{3,3}\xi_3^2)\left(\frac{c_{1,1,1}}{b_{1,1}}\xi_1 + \frac{c_{2,2,2}}{b_{2,2}}\xi_2 + \frac{c_{3,3,3}}{b_{3,3}}\xi_3\right)$$

sein, wodurch man bekommt

$$(23)\quad \begin{aligned}
&b_{1,1}\frac{c_{2,2,2}}{b_{2,2}} + b_{1,2}\frac{c_{1,1,1}}{b_{1,1}} = c_{1,1,2}, \qquad b_{1,2}\frac{c_{2,2,2}}{b_{2,2}} + b_{2,2}\frac{c_{1,1,1}}{b_{1,1}} = c_{1,2,2},\\
&b_{1,1}\frac{c_{3,3,3}}{b_{3,3}} + b_{1,3}\frac{c_{1,1,1}}{b_{1,1}} = c_{1,1,3}, \qquad b_{1,3}\frac{c_{3,3,3}}{b_{3,3}} + b_{3,3}\frac{c_{1,1,1}}{b_{1,1}} = c_{1,3,3},\\
&b_{2,2}\frac{c_{3,3,3}}{b_{3,3}} + b_{2,3}\frac{c_{2,2,2}}{b_{2,2}} = c_{2,2,3}, \qquad b_{2,3}\frac{c_{3,3,3}}{b_{3,3}} + b_{3,3}\frac{c_{2,2,2}}{b_{2,2}} = c_{2,3,3},\\
&\qquad b_{1,2}\frac{c_{3,3,3}}{b_{3,3}} + b_{1,3}\frac{c_{2,2,2}}{b_{2,2}} + b_{2,3}\frac{c_{1,1,1}}{b_{1,1}} = c_{1,2,3}.
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung in (23) nimmt durch Einsetzung der Werte der c nach (22) die Form an

$$a_{4,2}b_{1,1}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\beta_2^3 - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\alpha_2^3\right) + a_{4,1}b_{1,2}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\beta_1^3 - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\alpha_1^3\right)$$
$$= a_{4,1}b_{1,2}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\beta_1\beta_2 - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\alpha_1\alpha_2\right) + a_{4,2}b_{1,1}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\beta_1^3 - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\alpha_1^3\right),$$

oder

$$(2a_{4,2}b_{1,1} - a_{4,1}b_{1,2})\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\frac{\beta_2}{\beta_1} - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = 0.$$

Durch ähnliche Rechnungen bekommt man aus (23) das System

$$
(24)\qquad
\begin{aligned}
&(2a_{4,2}b_{1,1}-a_{4,1}b_{1,2})\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\frac{\beta_2}{\beta_1}-l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)=0,\\
&(2a_{4,1}b_{2,2}-a_{4,2}b_{1,2})\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\frac{\beta_2}{\beta_1}-l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)=0,\\
&(2a_{4,3}b_{1,1}-a_{4,1}b_{1,3})\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\frac{\beta_3}{\beta_1}-l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)=0,\\
&(2a_{4,1}b_{3,3}-a_{4,3}b_{1,3})\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\frac{\beta_3}{\beta_1}-l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)=0,\\
&(2a_{4,3}b_{2,2}-a_{4,2}b_{2,3})\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\frac{\beta_3}{\beta_2}-l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)=0,\\
&(2a_{4,2}b_{3,3}-a_{4,3}b_{2,3})\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\frac{\beta_3}{\beta_2}-l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)=0,\\
&a_{4,1}b_{2,3}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\frac{\beta_1^2}{\beta_2\beta_3}-l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2\alpha_3}\right)+a_{4,2}b_{1,3}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\frac{\beta_2^2}{\beta_1\beta_3}-l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1\alpha_3}\right)\\
&\qquad+a_{4,3}b_{1,2}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\,l\frac{\beta_3^2}{\beta_1\beta_2}-l\frac{\beta_4}{\beta_3}\,l\frac{\alpha_3^2}{\alpha_1\alpha_2}\right)=0.
\end{aligned}
$$

Ebenso bekommt man natürlich, da $g_{4,5}$ in $g_{4,5,6}$ aufgeht, auch die analogen Gleichungen, die aus (24) entstehen, wenn der Index 4 überall durch 5 ersetzt wird.

Zuerst betrachte ich die folgende Annahme:

1. Sowohl einer der Ausdrücke

$$2a_{4s}b_{rr}-a_{4r}b_{rs},\quad 2a_{4r}b_{ss}-a_{4s}b_{rs},$$

wie auch einer der Ausdrücke

$$2a_{5s}b_{rr}-a_{5r}b_{rs},\quad 2a_{5r}b_{ss}-a_{5s}b_{rs}$$

ist $\neq 0$, wobei $r, s\ (r \neq s)$ zwei der Indizes 1, 2, 3 sind. Z. B. für $r=1$, $s=2$ bekommt man dann sowohl

$$(25)\qquad l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\frac{\beta_2}{\beta_1}-l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=0$$

wie

$$(26)\qquad l\frac{\alpha_5}{\alpha_1}\,l\frac{\beta_2}{\beta_1}-l\frac{\beta_5}{\beta_1}\,l\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=0.$$

Aus (25) und (26) folgt aber

$$(27)\qquad l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\frac{\beta_5}{\beta_1}-l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\frac{\alpha_5}{\alpha_1}=0.$$

Da (25) und (26) ebensogut in der Form

$$l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\frac{\beta_2}{\beta_1}-l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=0,\quad l\frac{\alpha_5}{\alpha_2}\,l\frac{\beta_2}{\beta_1}-l\frac{\beta_5}{\beta_2}\,l\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=0$$

geschrieben werden können, so bekommt man auch

$$(28)\qquad l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\frac{\beta_5}{\beta_2}-l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\frac{\alpha_5}{\alpha_2}=0$$

und augenscheinlich auch

(29) $$l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\frac{\beta_5}{\beta_2}-l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\frac{\alpha_5}{\alpha_2}=0,\quad l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\frac{\beta_5}{\beta_1}-l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\frac{\alpha_5}{\alpha_1}=0.$$

Aus (27), (28) und (29) folgt aber $b_{1,1}=b_{1,2}=b_{2,2}=0$, und das streitet gegen die gemachte Annahme.

Ich kann also weiter annehmen, für jedes Paar r, s, $r \neq s$, der Zahlen 1, 2, 3 gälten entweder die Gleichungen

$$2a_{4s}b_{rr}-a_{4r}b_{rs}=0 \quad\text{und}\quad 2a_{4r}b_{ss}-a_{4s}b_{rs}=0$$

oder

$$2a_{5s}b_{rr}-a_{5r}b_{rs}=0 \quad\text{und}\quad 2a_{5r}b_{ss}-a_{5s}b_{rs}=0.$$

Da entweder a_{4r} oder $a_{4s} \neq 0$ ist, folgt hieraus $b_{rs}^2-4b_{rr}b_{ss}=0$, d. h. man hat

(30) $$b_{1,2}^2-4b_{1,1}b_{2,2}=0,\quad b_{1,3}^2-b_{1,1}b_{3,3}=0,\quad b_{2,3}^2-4b_{2,2}b_{3,3}=0\ (\mathfrak{p}).$$

Sind die drei Zahlen $b_{1,1}$, $b_{2,2}$, $b_{3,3}=0$, so folgt aus (30) auch $b_{1,2}=b_{1,3}=b_{2,3}=0$, woraus $g_{4,5}=0$ identisch. Ist $b_{1,1}=0$, dagegen $b_{2,2}\neq 0$, so folgt aus (30), daß auch $b_{1,2}=b_{1,3}=0$ sein muß, und dann ist

$$4b_{2,2}g_{4,5}=(2b_{2,2}\xi_2+b_{2,3}\xi_3)^2.$$

Also kann ich weiter annehmen, daß alle $b \neq 0$ sind. Man bekommt nun, von Indizesvertauschungen abgesehen, zwei weitere Fälle.

2. $$\begin{aligned} &2a_{4,2}b_{1,1}-a_{4,1}b_{1,2}=0, && 2a_{4,1}b_{2,2}-a_{4,2}b_{1,2}=0,\\ &2a_{4,3}b_{1,1}-a_{4,1}b_{1,3}=0, && 2a_{4,1}b_{3,3}-a_{4,3}b_{1,3}=0,\\ &2a_{4,3}b_{2,2}-a_{4,2}b_{2,3}=0, && 2a_{4,2}b_{3,3}-a_{4,3}b_{2,3}=0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, da $a_{4,1}$, $a_{4,2}$, $a_{4,3}\neq 0$ sein müssen, z. B.

$$b_{1,1}b_{2,3}=\frac{a_{4,1}}{2a_{4,2}}b_{1,2}\cdot\frac{2a_{4,2}}{a_{4,3}}b_{3,3}=\frac{a_{4,1}}{a_{4,3}}b_{1,2}\cdot\frac{a_{4,3}}{2a_{4,1}}b_{1,3}=\frac{b_{1,2}b_{1,3}}{2},$$

und deshalb wird

$$4b_{1,1}g_{4,5}=(2b_{1,1}\xi_1+b_{1,2}\xi_2+b_{1,3}\xi_3)^2.$$

3.
(31) $$\begin{aligned} &2a_{4,2}b_{1,1}-a_{4,1}b_{1,2}=0, && 2a_{4,1}b_{2,2}-a_{4,2}b_{1,2}=0,\\ &2a_{4,3}b_{1,1}-a_{4,1}b_{1,3}=0, && 2a_{4,1}b_{3,3}-a_{4,3}b_{1,3}=0,\\ &2a_{5,3}b_{2,2}-a_{5,2}b_{2,3}=0, && 2a_{5,2}b_{3,3}-a_{5,3}b_{2,3}=0. \end{aligned}$$

Hier muß die Determinante $a_{4,2}a_{5,3}-a_{4,3}a_{5,2}\neq 0$ sein; denn sonst würde man auch $2a_{4,3}b_{2,2}-a_{4,2}b_{2,3}=0$ und $2a_{4,2}b_{3,3}-a_{4,3}b_{2,3}=0$ erhalten, so daß man wieder den Fall 2. hatte. Was die beiden anderen Koeffizientendeterminanten

$$a_{4,1}a_{5,2}-a_{4,2}a_{5,1} \quad\text{und}\quad a_{4,1}a_{5,3}-a_{4,3}a_{5,1}$$

betrifft, so kann höchstens eine von ihnen $=0\,(\mathfrak{p})$ sein. Ich unterscheide deshalb wieder zwei Fälle.

3a. Alle drei Determinanten sind $\neq 0$. Dann gelten außer den Gleichungen (31) auch

$$(32) \qquad l\frac{\alpha_5}{\alpha_1}\, l\frac{\beta_2}{\beta_1} - l\frac{\beta_5}{\beta_1}\, l\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0, \quad l\frac{\alpha_5}{\alpha_1}\, l\frac{\beta_3}{\beta_1} - l\frac{\beta_5}{\beta_1}\, l\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 0,$$

$$l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\, l\frac{\beta_3}{\beta_2} - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\, l\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = 0,$$

da z. B. $2a_{5,2}b_{1,1} - a_{5,1}b_{1,2} \neq 0$ sein muß (vgl. (24)). Aus der ersten und zweiten Gleichung in (32) folgt $l\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\, l\frac{\beta_2}{\beta_1} - l\frac{\beta_3}{\beta_1}\, l\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0$, woraus $l\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\, l\frac{\beta_3}{\beta_2} - l\frac{\beta_3}{\beta_1}\, l\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = 0$ und daraus in Verbindung mit der dritten Gleichung in (32) offenbar $l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\, l\frac{\beta_3}{\beta_1} - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\, l\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 0$ und auch $l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\, l\frac{\beta_2}{\beta_1} - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\, l\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0$ oder mit anderen Worten $l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\, l\frac{\beta_2}{\beta_1} - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\, l\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0$. Also hat man wieder (25) und (26) mit demselben Ergebnis wie früher.

Jetzt ist also überhaupt bewiesen, daß, wenn $g_{4,5}$ in $g_{4,4,5}$ und $g_{4,5,5}$ aufgeht, während die drei Koeffizientendeterminanten aus g_4 und $g_5 \neq 0$ sind, $g_{4,5}$ reduzibel sein muß, und Satz 8 folgt aus Satz 6.

3b. Es ist

$$a_{4,1}a_{5,2} - a_{4,2}a_{5,1} = 0.$$

Wegen der Möglichkeit einer Indizesvertauschung genügt diese Annahme. Dann gelten auch die Gleichungen

$$2a_{5,2}b_{1,1} - a_{5,1}b_{1,2} = 0, \quad 2a_{5,1}b_{2,2} - a_{5,2}b_{1,2} = 0.$$

Man erkennt, daß jetzt alle $a \neq 0$ sein müssen. Setzt man

$$\bar f_4 = -\frac{1}{a_{4,2}} f_4 = \xi_2 + \frac{a_{4,1}}{a_{4,2}}\xi_1 + \frac{a_{4,3}}{a_{4,2}}\xi_3 - \frac{1}{a_{4,2}}\xi_4,$$

$$\bar f_5 = f_5 - \frac{a_{5,1}}{a_{4,1}} f_4 = \xi_5 - \frac{a_{4,1}a_{5,3} - a_{4,3}a_{5,1}}{a_{4,1}}\xi_3 - \frac{a_{5,1}}{a_{4,1}}\xi_4,$$

so wird

$$\bar g_{4,5} = \frac{\partial \bar f_4}{\partial x}\frac{\partial \bar f_5}{\partial y} - \frac{\partial \bar f_4}{\partial y}\frac{\partial \bar f_5}{\partial x} = -\frac{1}{a_{4,2}} g_{4,5}.$$

Da $g_{4,5}$ als Polynom in ξ_1, ξ_2, ξ_3 nicht identisch verschwindet, so kann $\bar g_{4,5}$ als Polynom in ξ_1, ξ_3, ξ_4 nicht identisch verschwinden. Außerdem sind die drei Koeffizientendeterminanten der linearen Ausdrücke

$$-\frac{a_{4,1}}{a_{4,2}}\xi_1 - \frac{a_{4,3}}{a_{4,2}}\xi_3 + \frac{1}{a_{4,2}}\xi_4, \quad \frac{a_{4,1}a_{5,3} - a_{4,3}a_{5,1}}{a_{4,1}}\xi_3 + \frac{a_{5,1}}{a_{4,1}}\xi_4$$

$\neq 0\,(\mathfrak{p})$; denn auch

$$-\frac{a_{4,3}}{a_{4,2}}\cdot\frac{a_{5,1}}{a_{4,1}} - \frac{1}{a_{4,2}}\cdot\frac{a_{4,1}a_{5,3} - a_{4,3}a_{5,1}}{a_{4,1}} = -\frac{a_{5,3}}{a_{4,2}}$$

ist $\neq 0$. Geht nun $\bar{g}_{4,5}$ nicht in $\bar{g}_{4,4,5} = \frac{\partial(\bar{g}_4, \bar{g}_{4,5})}{\partial(x,y)}$ oder nicht in $\bar{g}_{4,5,5} = \frac{\partial(\bar{g}_5, \bar{g}_{4,5})}{\partial(x,y)}$ auf, so folgt wie früher die Richtigkeit des Satzes 8. Geht $\bar{g}_{4,5}$ aber auf sowohl in $\bar{g}_{4,4,5}$ wie in $\bar{g}_{4,5,5}$, so muß zufolge des bisher bewiesenen $\bar{g}_{4,5}$ reduzibel sein, und Satz 8 folgt aus Satz 6.

Hierdurch ist Satz 8 vollständig bewiesen.

Satz 9. *Es sei K_1 ein solcher Körper fünften Grades, daß in der Reihe der konjugierten Körper $K_1, \ldots, K_5$ nur ein reeller vorkommt. Weiter seien α, β, γ ganze Zahlen aus K_1, welche linear-unabhängig in bezug auf den absoluten Rationalitätsbereich sind. Ist dann*

$$f(x,y,z) = N(\alpha x + \beta y + \gamma z),\ N = Norm,$$

so hat die Gleichung

$$f(x,y,z) = a,$$

wo a eine ganze rationale Zahl ist, nur endlich viele Lösungen in ganzen rationalen Zahlen x, y, z.

Beweis. Es gibt in K_1 nur endlich viele nicht-assoziierte Zahlen, deren Norm $= a$ ist. Es sei $\delta^{(1)}, \ldots, \delta^{(u)}$ ein vollständiges Repräsentantensystem dieser Zahlen. Dann muß

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \xi$$

sein, wo δ eine der Zahlen $\delta^{(i)}$ ist und ξ eine Einheit. Ich setze $\alpha = \alpha_1, \ldots, \xi = \xi_1$ und bezeichne die konjugierten Zahlen aus K_i ($i = 2,3,4,5$) mit $\alpha_i, \ldots, \xi_i$. Dann gelten also die Gleichungen

$$\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z = \delta_i \xi_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Hieraus bekommt man

$$(33)\quad \begin{gathered}
\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1\xi_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2\xi_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3\xi_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4\xi_4 \end{vmatrix} = 0, \quad
\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1\xi_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2\xi_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3\xi_3 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 & \delta_5\xi_5 \end{vmatrix} = 0, \quad
\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1\xi_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2\xi_2 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4\xi_4 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 & \delta_5\xi_5 \end{vmatrix} = 0, \\
\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1\xi_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3\xi_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4\xi_4 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 & \delta_5\xi_5 \end{vmatrix} = 0, \quad
\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2\xi_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3\xi_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4\xi_4 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 & \delta_5\xi_5 \end{vmatrix} = 0.
\end{gathered}$$

Das sind lineare Gleichungen in den ξ mit Koeffizienten aus dem Normalkörper K, der von den Zahlen in $K_1, \ldots, K_5$ erzeugt wird. Zwei der Gleichungen müssen auch linear-unabhängig sein; denn da α, β, γ linear

unabhängig relativ zum absoluten Körper sind, so können nicht alle Determinanten

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 \end{vmatrix}$$

$= 0$ sein. Ist aber z. B.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

so sind die erste und zweite der Gleichungen (33) linear unabhängig, da ja die erste ξ_4, aber nicht ξ_5 enthält, die zweite ξ_5, aber nicht ξ_4 enthält.

Weiter ist $\xi_1 = \varepsilon_1^u \varepsilon_2^v$, wenn ε_1 und ε_2 zwei Grundeinheiten in K_1 sind. Nach Satz 8 könnten dann unendlich viele ganzzahlige Lösungen u, v unserer Gleichungen in den ξ nur existieren, wenn ganze Exponenten l_1 und l_2, nicht beide 0, vorhanden wären derart, daß $\varepsilon_1^{l_1} \varepsilon_2^{l_2}$ zu einem Unterkörper von K_1 gehörte, d. h. $\varepsilon_1^{l_1} \varepsilon_2^{l_2} =$ einer rationalen Zahl wäre. Da das nicht der Fall ist, so ist Satz 9 hierdurch bewiesen.

Die in dieser Abhandlung bewiesenen Sätze über die exponentiellen Gleichungen können weitgehend verallgemeinert werden. Bei einer späteren Gelegenheit werde ich auf diese Verallgemeinerungen eingehen.

Natürlich ist es auch wünschenswert, die Sätze derart zu verschärfen, daß man nicht bloß die Endlichkeit der Anzahl der ganzzahligen Lösungen unter den angegebenen Bedingungen beweist, sondern auch eine obere Schranke für diese Lösungszahl wirklich angibt. In meinen früheren Arbeiten[5]) über die Anwendung der p-adischen Methode auf exponentielle Gleichungen habe ich tatsächlich eine solche obere Schranke angeben können, aber dort war freilich nur von spezielleren Anwendungen die Rede. Auch auf die Möglichkeit einer solchen Verschärfung hoffe ich später zurückzukommen.

---

[5]) Diese sind: 1. Einige Sätze über gewisse Reihenentwicklungen und exponentiale Beziehungen mit Anwendung auf diophantische Gleichungen. (Oslo Vid. Akad. Skrifter, I. Mat. Naturv. Kl. 1933. Nr. 6). 2. En metode til behandling av ubestemte ligninger. (Chr. Michelsens Institutts beretninger IV, 6, Bergen 1934). 3. Ein Verfahren zur Behandlung gewisser exponentialer Gleichungen und diophantischer Gleichungen. 8-e skandinaviske matematikerkongres, Stockholm 1934).

(Eingegangen am 1. 1. 1935).

Über den Noetherschen Fundamentalsatz.

Von

W. van der Woude in Leiden (Niederlande).

Es gibt bekanntlich vom Noetherschen „Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Funktionen" mehrere Beweise[1]). Aber der Satz ist von so großer Wichtigkeit, daß es mir erlaubt scheint, durch die Veröffentlichung des folgenden rein algebraischen, meines Erachtens sehr einfachen, Beweises die Anzahl noch um eins zu vermehren.

Ich spreche hier ausschließlich über den sogenannten „kleinen" Noetherschen Satz.

„Es liegen zwei Kurven $F_1(x, y) = 0$ und $F_2(x, y) = 0$ vor. In ihren Schnittpunkten dürfen sie mehrfache Punkte besitzen; nur sei ein für allemal angenommen, daß sie dort keine gemeinsame Tangente haben. Eine dritte Kurve $F_3(x, y) = 0$ gehe durch alle diese Schnittpunkte.

Einer der Schnittpunkte sei als Koordinatenursprung angenommen. Wenn es nun stets — d. h. welcher Schnittpunkt auch gewählt sein mag — möglich ist, Potenzreihen $a(x, y)$ und $b(x, y)$ zu bestimmen, welche die Identität

$$F_3 \equiv a F_1 + b F_2$$

formal befriedigen, dann existieren Polynome $A(x, y)$ und $B(x, y)$ derart, daß der Identität

$$\text{(I)} \qquad F_3 \equiv A F_1 + B F_2$$

genügt wird".

Weniger umfassend ist der Satz:

„Wenn F_3 in jedem Schnittpunkte, wo F_1 und F_2 einen p-fachen bzw. einen q-fachen Punkt besitzen, einen $(p + q - 1)$-fachen Punkt hat, so gibt es Polynome, welche die Identität (I) befriedigen".

---

[1]) M. Noether, Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Funktionen, Math. Annalen 6, S. 351; A. Voss, Über einen Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Funktionen, ebenda 27, S. 527; F. Severi, Vorlesungen über algebraische Geometrie (Übersetzung von E. Löffler), B. G. Teubner, 1921, S. 108 ff.; B. L. van der Waerden, Moderne Algebra II, J. Springer, 1931, S. 67 ff. — Die Idee des hier gegebenen Beweises findet sich wenig vollständig ausgearbeitet in einer früheren Mitteilung des Verfassers: „Over the stelling van Noether", Koninkl. Akad. van Wetenschappen Amsterdam, Proc. 1915, S. 1245.

In § 2 wird der Fall, wo F_1 und F_2 nur einfache Schnittpunkte besitzen, erledigt. Für die folgenden Erweiterungen bedarf der gegebene Beweis dann nur sehr geringer Änderungen. Es ist hier stets die Einschränkung gemacht, daß F_1 und F_2 in ihren Schnittpunkten keine gemeinsame Tangente besitzen. Aber auch wenn diese Einschränkung nicht getroffen wird, bewährt sich, wie Herr van der Waerden mir zeigte, der Beweis bei leichter Modifizierung. Darauf gehe ich aber nicht ein.

§ 1.

Einige Vorbemerkungen:

Es seien zwei Kurven

$$F_1(x, y) = 0,$$
$$F_2(x, y) = 0,$$

bzw. von den Ordnungen m und n, gegeben. Beide dürfen auch in Kurven niedrigerer Ordnung („Faktorkurven") zerfallen; nur dürfen sie keine Faktorkurve gemeinsam haben. Zweitens wird hier stets der Fall ausgeschlossen, in dem F_1 und F_2 in einem ihrer Schnittpunkte, die mehrfache Punkte von beiden sein dürfen, eine gemeinsame Tangente haben. Algebraisch ausgedrückt: F_1 und F_2 haben keinen rationalen Faktor gemeinsam; wird einer ihrer Schnittpunkte als Koordinatenursprung angenommen, dann haben die beiden Polynome, gebildet aus den Gliedern niedrigsten Grades in F_1 und F_2, keinen gemeinsamen Faktor (hier und weiter wird ein gemeinsamer Zahlenfaktor außer acht gelassen).

Weiter kann man durch eine projektive Transformation stets erreichen:

1. daß das Glied mit x^m in F_1 und ebenso das Glied mit x^n in F_2 vorkommt;

2. daß es keine zwei Schnittpunkte von F_1 und F_2 gibt, die auf einer und derselben Geraden parallel zu einer der Koordinatenachsen liegen; es darf auch keine Tangente in einem der Schnittpunkte parallel zu einer Koordinatenachse sein (oder damit zusammenfallen).

Die y-Resultante $\varrho(y)$ von F_1 und F_2 kann in der Form

$$\varrho(y) \equiv PF_1 + QF_2 \tag{1}$$

dargestellt werden, wo P und Q Polynome in x und y, höchstens $(n-1)$ ten bzw. $(m-1)$-ten Grades *in* x, sind.

Es soll dann noch eine dritte Kurve

$$F_3(x, y) = 0$$

vorliegen; vorläufig wird angenommen, daß F_3 *in* x höchstens vom Grade $(m+n-1)$ ist. (In § 4 wird gezeigt, daß diese Einschränkung für die Gültigkeit des dann schon bewiesenen Satzes unwesentlich ist).

Hilfssatz I. Es gibt Polynome R und S derart, daß

(2) $$\varrho(y) F_3 \equiv R F_1 + S F_2,$$

wo R und S höchstens vom $(n-1)$-ten bzw. $(m-1)$-ten Grade *in* x sind.

Beweis. Aus (1) folgt

(2⁺) $$\varrho(y) F_3 \equiv P F_1 F_3 + Q F_2 F_3.$$

Das erste Glied dieser Identität ist höchstens vom $(m+n-1)$-ten Grade in x; das nämliche gilt dann für das zweite Glied. Es dürfen also in PF_1F_3 und auch in QF_2F_3 Glieder höheren Grades in x vorkommen, aber in ihrer Summe heben diese Glieder sich auf. In F_1F_2 kommt gewiß das Glied x^{m+n} mit einem konstanten, von Null verschiedenen Faktor vor; man kann also Polynome q, R, S in x und y bestimmen, welche die folgenden Identitäten erfüllen

$$P F_1 F_3 \equiv q F_1 F_2 + R F_1,$$
$$Q F_2 F_3 \equiv -q F_1 F_2 + S F_2.$$

wo R und S in bezug auf x von nicht höherem als $(n-1)$-tem bzw. $(m-1)$-tem Grade sind.

So kann man dann (2⁺) umformen zu

(2) $$\varrho(y) F_3 \equiv R F_1 + S F_2,$$

wo R und S die genannten Bedingungen erfüllen.

Endlich weise ich auf den folgenden evidenten Satz hin, der öfters Anwendung finden wird.

Hilfssatz II. Es sei gegeben, daß in F_1 Glieder p-ten Grades (in x und y zusammen), in F_2 Glieder q-ten Grades vorkommen, während es aber in F_1 und F_2 keine Glieder von niedrigerem als p-tem bzw. q-tem Grade gibt; außerdem sei gegeben — wie schon gesagt —, daß die beiden Polynome, gebildet von diesen Gliedern niedrigsten Grades, keinen Faktor gemeinsam haben. Gibt es dann Polynome R und S in x und y, derart daß $RF_1 + SF_2$ keine Glieder von niedrigerem als dem $(p+q)$-ten Grade enthält, so kommen in R und S keine Glieder von niedrigerem als q-tem bzw. p-tem Grade vor.

§ 2.

Es seien nun drei Kurven, dargestellt durch

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0,$$

gegeben; die dritte Kurve gehe durch alle Schnittpunkte von F_1 und F_2.

Vorläufig sei noch angenommen:

1. Alle diese Schnittpunkte sind einfach;
2. F_3 besitzt in bezug auf x keine Glieder von höherem als $(n+m-1)$-tem Grade.

Es gibt dann Polynome R und S, welche die Identität

$$\varrho(y) F_3 \equiv R F_1 + S F_2 \tag{2}$$

befriedigen (Hilfssatz I); man sehe § 1 über die Grade von R und S in x.

Durch eine Translation bringe ich den Ursprung O des Koordinatensystems in einen der Schnittpunkte. Dann enthält $\varrho(y)$ den Faktor y, während die Kurve F_3 durch O geht. In $\varrho(y) F_3$ kommen also keine Glieder von niedrigerem als zweitem Grade vor; dasselbe gilt nun für $R F_1 + S F_2$. In F_1 und F_2 gibt es aber Glieder ersten Grades, welche nicht nur um einen konstanten Faktor verschieden sind; der Hilfssatz II besagt dann, daß auch R und S kein konstantes Glied enthalten, daß also die Kurven $R = 0$ und $S = 0$ durch O gehen.

Man betrachte nun die Schnittpunkte von

$$\left.\begin{aligned} F_2 &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Die Zahl dieser Schnittpunkte ist n; sie liegen, wegen (2), entweder auf F_1 oder auf R. Weil aber Sorge getragen ist, daß nicht zwei Schnittpunkte von F_1 und F_2 sich auf einer und derselben Koordinatenachse befinden und daß die Tangente von F_2 in O nicht mit der x-Achse zusammenfällt, liegt nur einer dieser Punkte, und zwar O, auf F_1; die anderen, $(n-1)$ an der Zahl, liegen auf R. Aber auch O liegt auf R; es gibt also n Schnittpunkte von

$$\left.\begin{aligned} R &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\},$$

während gegeben ist, daß der Grad von R in bezug auf x höchstens $(n-1)$ ist. Es folgt also, daß y in R als Faktor enthalten ist. Das nämliche kann man für S, statt R, beweisen; d. h. beide Glieder von (2) sind durch y teilbar. Aber in dieser Weise weitergehend kann man alle Faktoren $\varrho(y)$ verschwinden lassen; man findet dann

$$F_3 \equiv A F_1 + B F_2. \tag{3}$$

§ 3.

Ich nehme wieder an, daß O mit einem Schnittpunkte von F_1 und F_2 zusammenfällt; F_1 und F_2 mögen aber jetzt in O einen p-fachen bzw. q-fachen Punkt haben, während F_3 in O (wenigstens) einen $(p+q-1)$-fachen Punkt besitzt. Der in § 2 gegebene Beweis für das Bestehen von Polynomen A und B, welche die Identität (3) befriedigen, bedarf nur einer sehr geringen Änderung.

Von den Schnittpunkten von

$$\left.\begin{aligned} F_2 &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

wird jetzt der Punkt O q-fach gezählt; die anderen, $(n-q)$ an der Zahl, liegen auf R. In $\varrho(y)\,F_3$ gibt es kein Glied niedrigeren als $(pq+p+q-1)$-ten Grades; hier ist nur wichtig, daß es kein Glied gibt, dessen Grad unter $(p+q)$ liegt. Also ist auch in RF_1+SF_2 kein Glied niedrigeren als $(p+q)$-ten Grades enthalten. In F_1 gibt es wenigstens ein Glied p-ten Grades, in F_2 wenigstens ein Glied q-ten Grades; Glieder niedrigeren Grades sind aber nicht vorhanden. Dann enthält R kein Glied niedrigeren als q-ten Grades (Hilfssatz II); R schneidet die x-Achse in dem wenigstens q-fach zählenden Punkte O und außerdem in $(n-q)$ Punkten. R enthält also mindestens einen Faktor y; für S gilt das nämliche Resultat. Beide Glieder der Gleichung (2) sind wieder durch y teilbar; man kann dann, in dieser Weise weitergehend, alle Faktoren y aus der Resultante $\varrho(y)$ fortschaffen.

Dann wird der Koordinatenursprung O in einen anderen Schnittpunkt gelegt und alle Faktoren der Resultante $\varrho(y)$ werden zum Verschwinden gebracht. So findet man auch jetzt

$$F_3 \equiv AF_1 + BF_2.$$

§ 4.

Bis jetzt ist stets angenommen worden, daß der Grad von F_3, in bezug auf x, nicht höher als $(m+n-1)$ ist. Ich zeige jetzt, daß diese Beschränkung unnötig ist.

Es sei dazu angenommen, daß F_3 der in § 3 genannten Bedingung, daß sie in O einen $(p+q-1)$-fachen Punkt besitzt, genügt; ihr Grad in bezug auf x unterliegt aber jetzt keiner Beschränkung. Es ist gegeben, daß in F_1F_2 das Glied x^{m+n} mit einem von Null verschiedenen konstanten Faktor vorkommt; es existieren also Polynome q und F_3' in x und y derart, daß

$$F_3 \equiv qF_1F_2 + F_3', \tag{4}$$

wo der Grad von F_3' in bezug auf x kleiner als $(m+n)$ ist.

Die Gleichung (4) zeigt, daß auch F_3' in jedem Schnittpunkte von F_1 und F_2, wo diese einen p-fachen bzw. q-fachen Punkt besitzen, (wenigstens) einen $(p+q-1)$-ten Punkt hat. Es bestehen also Polynome A' und B', welche die Identität

$$F_3' \equiv A'F_1 + B'F_2$$

befriedigen. Aus dieser Gleichung und (4) folgt wieder

$$F_3 \equiv AF_1 + BF_2.$$

§ 5.

Es mögen nochmals F_1 und F_2 in einem ihrer Schnittpunkte einen p-fachen bzw. einen q-fachen Punkt besitzen; der Ursprung O des Koordinatensystems falle wieder mit diesem Punkte zusammen. Angenommen wird, daß stets — d. h. welcher Schnittpunkt auch gewählt sein mag — Potenzreihen $a(x, y)$ und $b(x, y)$ bestehen, derart daß

(5) $$F_3 \equiv a F_1 + b F_2$$

(formal) befriedigt wird.

Wenn F_3 Glieder enthält, die in bezug auf x einen höheren als den $(m + n - 1)$ Grad besitzen, so kann man, wie in § 4 dargetan ist, durch

$$F_3 \equiv q F_1 F_2 + F_3'$$

ein Polynom F_3' bestimmen mit den folgenden Eigenschaften: F_3' genügt der in § 3 gegebenen Bedingung, der Grad in bezug auf x ist höchstens $(m + n - 1)$, die Identität (5) bleibt, nach Ersetzung von F_3 durch F_3', gültig. Ich nehme weiter an, daß der Grad von F_3 in x schon in dieser Weise reduziert ist.

Ich lasse nun in a und b die Glieder, die von höherem als $(q - 1)$-tem bzw. $(p - 1)$-tem Grade sind, fort. Die restierenden Glieder bilden Polynome, die ich a^+ und b^+ nenne. Wenn man nun in (5) a und b durch a^+ und b^+ ersetzt, bleibt diese Gleichung nicht gültig, aber in den Gliedern, deren Grad die Zahl $(p + q - 1)$ nicht übersteigt, hat sich nichts geändert. Man kann also schreiben:

(6) $$F_3 - a^+ F_1 - b^+ F_2 \equiv G^{(p+q)},$$

wo $G^{(p+q)}$ ein Polynom, in dem jedes Glied wenigstens vom Grade $(p + q)$ ist, darstellt.

Aus (6) und der stets gültigen Identität

(2) $$\varrho(y) F_3 \equiv R F_1 + S F_2$$

folgt dann

$$\{R - \varrho(y) a^+\} F_1 + \{S - \varrho(y) b^+\} F_2 \equiv \varrho(y) G^{(p+q)}.$$

Der Hilfssatz II zeigt nun wieder, daß in $(R - \varrho(y) a^+)$ kein Glied von niedrigerem als q-tem Grade vorhanden ist; weil ϱ den Faktor y enthält, ist also in R kein einziges Glied x^k $(k < q)$ vorhanden. Bestimmt man dann wieder die Schnittpunkte von

$$\left.\begin{aligned} R &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\},$$

dann findet man in O einen Schnittpunkt, der wenigstens q-fach gezählt werden muß. In derselben Weise wie zuvor findet man aber $(n - q)$

Schnittpunkte, die nicht mit O zusammenfallen; und wieder zeigt es sich, daß R den Faktor y enthält, daß für S das nämliche gilt, und daß man endgültig zu

$$F_3 \equiv A F_1 + B F_2$$

geführt wird.

§ 6.

Für die Anwendungen wichtig ist der Zusatz:

Besteht die Identität

$$F_3 \equiv A F_1 + B F_2 \tag{3}$$

und sind F_1, F_2, F_3 bzw. m-ten, n-ten, r-ten Grades (in x und y zusammen), dann ist es möglich, A und B derart zu bestimmen, daß sie bzw. $(r - m)$-ten und $(r - n)$-ten Grades sind.

Beweis. Wenn A und B nicht diesen Bedingungen genügen, dann kommen in $A F_1$, und ebenso in $B F_2$, Glieder höheren als r-ten Grades vor, aber in $A F_1 + B F_2$ heben diese sich auf.

Das von den Gliedern höchsten Grades in $A F_1$ gebildete Polynom ist dann nicht nur durch das Polynom der Glieder höchsten Grades in F_1, sondern auch durch das entsprechende Polynom in F_2 teilbar; und weil diese beiden letzten Polynome keinen Faktor gemeinsam haben, auch durch ihr Produkt. Man kann also Polynome q, A, B in x und y bestimmen, welche die Identitäten

$$A F_1 \equiv q F_1 F_2 + A' F_1,$$
$$B F_2 \equiv - q F_1 F_2 + B' F_2$$

erfüllen, wo die Gradzahlen von A' und B' mindestens um eins kleiner sind als die von A und B.

Aus diesen Identitäten und (3) folgt

$$F_3 \equiv A' F + B' F_2;$$

man kann dann, wenn nötig, die Gradzahlen von A' und B' weiter erniedrigen, bis das Ziel erreicht ist.

(Eingegangen am 4. 5. 1934.)

Zur algebraischen Geometrie. VII.

Ein neuer Beweis des Restsatzes.

Von

B. L. van der Waerden in Leipzig.

Der Brill-Noethersche Restsatz folgt, wie ich früher[1]) bemerkt habe, fast unmittelbar aus dem folgenden Satz, den ich aus nachher zu erwähnenden Gründen den *Satz vom Doppelpunktsdivisor* nennen will:

Satz D. *Wenn alle Schnittpunkte der Kurven $f = 0$ und $\varphi = 0$ gewöhnliche Punkte oder gewöhnliche Singularitäten der Kurve $f = 0$ sind, d. h. wenn alle Zweige Z dieser Kurve in diesen Punkten einfach sind und getrennte Tangenten haben, und wenn jeder Zweig Z eines solchen, etwa s-fachen Punktes, der von der Kurve $\varphi = 0$ etwa μ-fach geschnitten wird, von einer weiteren Kurve $F = 0$ mindestens $(\mu + s - 1)$-fach geschnitten wird, so gilt für die ternären Formen F, φ, f die Identität*

$$F = Af + B\varphi; \tag{1}$$

überdies hat die Kurve $B = 0$ in jedem solchen Schnittpunkt einen mindestens $(s-1)$-fachen Punkt.

Gelten umgekehrt (1) und die zuletzt formulierte Adjungiertheitsbedingung für B, so erfüllen die Kurven $F = 0$ und $\varphi = 0$ die im Satz angegebenen Schnittmultiplizitätsbedingungen für jeden Zweig Z.

Ich habe in meiner früheren Note[1]) den Satz D aus dem Noetherschen Fundamentalsatz (in der ursprünglichen Noetherschen Potenzreihenformulierung) hergeleitet. Ich hatte damals nicht bemerkt, daß der Satz im Grunde nicht neu, sondern einem bekannten Satz über den Doppelpunktsdivisor aus der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen[2]) im wesentlichen gleichwertig ist. Die Voraussetzung unseres Satzes D besagt nämlich, falls sie für alle vielfachen Punkte der Kurve $f = 0$ zutrifft, daß der Divisor $\frac{F}{\varphi}$ durch den Doppelpunktsdivisor der Kurve $f = 0$ (der

---

[1]) B. L. van der Waerden, Zur Begründung des Restsatzes mit dem Noetherschen Fundamentalsatz, Math. Annalen 104 (1931), S. 472–475.

[2]) Siehe K. Hensel und G. Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln, 1902, 25. Vorlesung, § 3, S. 430. Dort auf S. 435 auch die Herleitung des Restsatzes.

aus allen s-fachen Punkten der Kurve besteht, je $(s-1)$-fach gezählt auf jedem Zweig Z_i) teilbar ist. Die Behauptung (1) läßt sich andererseits auch so lesen:

$$F = B\varphi \quad \text{oder} \quad \frac{F}{\varphi} = B \quad \text{auf der Kurve } f = 0.$$

Satz D ist also in diesem Fall gleichwertig mit der Aussage, daß ein Divisor der Klasse A^d (wo A eine Linearform in den drei homogenen Koordinaten ist), der durch den Doppelpunktsdivisor teilbar ist, gleich einer Form d-ten Grades in den homogenen Koordinaten ist. Aus diesem Grunde habe ich oben die Bezeichnung „Satz vom Doppelpunktsdivisor" vorgeschlagen. Allerdings ist Satz D insofern etwas spezieller als der allgemeine Satz vom Doppelpunktsdivisor[2]), als in Satz D die Singularitäten der Kurve $f = 0$ als gewöhnliche vielfache Punkte mit getrennten Tangenten vorausgesetzt wurden, was in der allgemeinen Theorie der algebraischen Funktionen nicht nötig ist. Für die Anwendungen ist das nicht von ausschlaggebender Wichtigkeit, da man die komplizierteren Singularitäten immer durch Cremonatransformationen auflösen kann.

Ich werde jetzt zeigen, daß der Satz D besonders einfach mit derselben Methode bewiesen werden kann, mit der Herr van der Woude in der unmittelbar vorangehenden Arbeit den „einfachen Fall" des Noetherschen Fundamentalsatzes behandelt hat. Ich glaube nicht, daß diese Methode zum Beweis des allgemeinen Falles des Noetherschen Fundamentalsatzes hinreicht. Für die Geometrie auf der Kurve ist aber der Satz D, aus dem der Restsatz folgt, wichtiger als der allgemeine Fall des Noetherschen Fundamentalsatzes.

Der Vollständigkeit halber gebe ich am Schluß noch einmal die Herleitung des Restsatzes aus dem Satz D an und füge dann noch einige Bemerkungen über andere Beweise des Restsatzes hinzu.

Wie in der vorangehenden Arbeit von W. van der Woude gehen wir von den Formen F, f und φ durch die Substitution $z = 1$ zu inhomogenen Polynomen in x und y über, wobei wir annehmen können, 1. daß das Glied x^n in f wirklich vorkommt, wo n der Grad von f ist; 2. daß die Formen, die von den Gliedern höchsten Grades in f und φ gebildet werden, teilerfremd sind; 3. daß keine zwei Schnittpunkte der Kurven $f = 0$ und $g = 0$ auf einer Geraden $y =$ konst. liegen; 4. daß keine Tangente in einem von diesen Schnittpunkten parallel zur x-Achse ist. Ist dann $\varrho(y)$ die Resultante von f und φ nach x, so gilt bekanntlich eine Identität

$$\varrho(y) = Pf + Q\varphi$$

aus der unmittelbar folgt

$$\varrho(y)F = Rf + S\varphi. \tag{2}$$

Eine solche Identität bleibt bestehen, wenn man S durch seinen Rest bei Division durch f ersetzt, dessen Grad in x kleiner als n ist.

Nun sei $Q(a, b)$ ein Schnittpunkt der Kurven $f = 0$ und $\varphi = 0$, und zwar ein s-facher Punkt von $f = 0$, durch den s einfache Zweige $Z_1, \ldots, Z_s$ dieser Kurve hindurchgehen. Setzt man die Potenzreihenentwicklung eines solchen Zweiges Z_i in (2) ein, so wird $f = 0$, also $\varrho(y)F = S\varphi$. Die Funktionen $\varrho(y)F$ und $S\varphi$ haben also an der Stelle Q (als Funktionen der Ortsuniformisierenden t) eine Nullstelle von derselben Ordnung. Hat φ die Ordnung μ_i, so hat F nach Voraussetzung mindestens die Ordnung $\mu_i + s - 1$, und da $\varrho(y)$ auch Null wird an der Stelle Q, so hat $\varrho(y)F$ mindestens die Ordnung $\mu_i + s$. Somit hat die Funktion S eine mindestens s-fache Nullstelle in Q auf jedem Zweig Z_i $(i = 1, \ldots, s)$.

Hieraus folgt aber, daß die Kurve $S = 0$ einen mindestens s-fachen Punkt in Q hat. Hätte nämlich $S = 0$ nur einen k-fachen Punkt $(k < s)$, so hätten die Zweige dieser Kurve in Q insgesamt höchstens k Tangenten, also käme unter den s Zweigen Z_i mindestens einer vor, der keinen Zweig von $S = 0$ berührte. Dieser Zweig Z_i würde dann die Kurve $S = 0$ genau k-fach schneiden, was wegen $k < s$ dem vorhin Gesagten widerspricht.

Von den n Schnittpunkten der Geraden $y = b$ mit $f = 0$ wird der Punkt Q s-fach gezählt; die anderen, $n - s$ an der Zahl, liegen wegen (2) notwendig auf $S = 0$. Die Kurve $S = 0$ schneidet also die Gerade $y = 0$ in dem s-fachen Punkt Q und außerdem noch in $n - s$ Punkten. Da S aber in x einen Grad $< n$ hat, so muß S für $y = b$ identisch verschwinden, d. h. S ist durch $y - b$ teilbar.

In (2) sind nun $\varrho(y)F$ und $S\varphi$ durch $y - b$ teilbar; also ist auch Rf und somit R durch $y - b$ teilbar. Man kann also mit $y - b$ kürzen. Durch Wiederholung derselben Schlußweise kann man alle Linearfaktoren von $\varrho(y)$ in (2) der Reihe nach zum Verschwinden bringen. Es folgt

$$F = Af + B\varphi. \tag{3}$$

Das ganze Verfahren kann so eingerichtet werden, daß die beiden Glieder rechter Hand in (2) und daher auch in (3) denselben Grad haben wie die linke Seite. Sollten daran noch Zweifel bestehen, so kann man durch eine bekannte Umformung (vgl. § 6 der Arbeit von W. v. d. Woude) auch nachträglich erreichen, daß in (3) die beiden Glieder Af und $B\varphi$ denselben Grad wie F haben. Sodann kann die Identität (3) durch Einführung von z wieder homogen gemacht werden. Damit ist die Identität (1) bewiesen.

Dieselbe Überlegung, durch die wir oben fanden, daß die Kurve $S = 0$ in jedem s-fachen Punkt von $f = 0$ ebenfalls einen s-fachen Punkt haben muß, zeigt jetzt, auf (3) angewandt, daß die Kurve $B = 0$ in jedem s-fachen Punkt von $f = 0$, Schnittpunkt von $f = 0$ und $\varphi = 0$, einen mindestens $(s-1)$-fachen Punkt besitzt. Damit ist Satz D in allen Teilen bewiesen.

Die Umkehrung des Satzes heißt so: Aus (1) und den Adjungiertheitsbedingungen für B in den Schnittpunkten von $f = 0$ und $\varphi = 0$ folgt, daß jeder Zweig Z_i eines s-fachen Punktes von $f = 0$, der von $\varphi = 0$ genau μ_i-fach geschnitten wird, von $F = 0$ mindestens $(\mu_i + s - 1)$-fach geschnitten wird. Zum Beweis braucht man nur in (1) $f = 0$ zu setzen und die Ordnungen der Nullstellen links und rechts zu vergleichen.

Der *Restsatz* besagt folgendes. Die Kurve $f = 0$ besitze keine anderen als gewöhnliche Singularitäten. Die Kurven $\varphi = 0$ und $\varphi' = 0$ mögen auf den verschiedenen Zweigen der Grundkurve $f = 0$, außer einer beiden gemeinsamen Punktgruppe H, die Punktgruppen G und G' ausschneiden. Die Kurve $\psi = 0$ sei adjungiert, d. h. sie habe einen $(s-1)$-fachen Punkt in jedem s-fachen Punkt der Grundkurve und sie schneide diese, außer in diesem auf jedem Zweig $(s-1)$-fach gezählten mehrfachen Punkten und einer Gruppe K genau nach der Gruppe G. Dann gibt es eine ebenfalls adjungierte Kurve $\psi' = 0$, welche in derselben Weise außer den vielfachen Punkten und außer K die Gruppe G' ausschneidet.

Zu der Formulierung ist noch zu bemerken, daß mit dem Wort „Punktgruppe" nicht einfach eine Menge von Punkten der Kurve $f = 0$ gemeint ist, sondern eine endliche Menge von eventuell mit Vielfachheiten versehenen Punkten auf den verschiedenen Zweigen der Kurve.

B e w e i s d e s R e s t s a t z e s. Man setze $F = \varphi' \psi$. Dann erfüllt F die Voraussetzungen des Satzes D. Daher gilt (1). Setzt man $\psi' = B$, so schneiden $F = \varphi' \psi$ und $B\varphi = \psi' \varphi$ auf der Grundkurve dieselbe Punktgruppe aus; denn für $f = 0$ wird $F = B\varphi$. Daraus folgt die Behauptung.

Der hier dargestellte Beweis scheint mir an Einfachheit und Natürlichkeit alle bekannten Beweise des Restsatzes zu übertreffen. Er beruht auf denselben Grundgedanken wie der ursprüngliche Noethersche, nämlich auf der Untersuchung der Bedingungen „im Kleinen", welche für die Identität „im Großen" (1) hinreichend sind. Auch die Methode des sukzessiven Weghebens der Resultantenfaktoren wurde von Noether[3]) schon früher angewandt. Zum Unterschied von den anderen Beweisen

[3]) M. Noether, Math. Annalen 40 (1892), S. 140—144.

werden bei uns bloß Schnittpunktsmultiplizitäten herangezogen und wird die Diskussion der Vielfachheiten der betrachteten Punkte als Punkte der Kurven $\varphi = 0$ und $F = 0$, welche ja auch mit dem eigentlichen Problem nichts zu tun haben, vermieden.

Man hat mich nach der Publikation meines ersten Beweises des Satzes vom Doppelpunktsdivisor[1]) verschiedentlich gefragt, ob mir die Beweismethode des Restsatzes nicht bekannt sei, die ebenfalls von M. Noether[4]) herrührt und auch in verschiedenen Lehrbüchern[5]) dargestellt ist, welche sich auf den folgenden (einwandfrei richtigen) Satz stützt:

Satz E. Hat die Kurve $F = 0$ in allen gemeinsamen Punkten der Kurven $\varphi = 0$ und $f = 0$, welche für diese Kurven bzw. r-fache und s-fache Punkte sind, jeweils einen mindestens $(r + s - 1)$-fachen Punkt und ist dieselbe Bedingung auch für alle zu diesen Schnittpunkten unendlich benachbarten Schnittpunkte erfüllt, so gilt (1).

Mir war dieser Beweis natürlich bekannt, aber die Herleitung des Restsatzes aus dem Satz E scheitert zunächst daran, daß die Voraussetzungen des Satzes E unter den Voraussetzungen des Restsatzes nicht immer erfüllt sind. Es sei etwa $f = x$, $\varphi = x^2 - y^2$ und $F = \varphi' = x - y^2$. Die Kurven $f = 0$ und $\varphi = 0$ haben in $Q(0, 0)$ einen Schnittpunkt, der zweifach für φ und einfach für f ist ($r = 2$, $s = 1$). Die Kurve $F = 0$ geht nur einfach durch diesen Schnittpunkt, nicht $(r + s - 1)$-fach. Satz E ist also nicht anwendbar. — Man kann auch umgekehrt $\varphi = x - y^2$ und $F = x^2 - y^2$ setzen. Es gibt dann einen Schnittpunkt von f und φ in Q und einen dazu unendlich benachbarten Schnittpunkt Q_1. Die Kurve $F = 0$ geht durch Q, aber nicht durch Q_1. Sie erfüllt somit die Bedingungen des Satzes E nicht.

Es ist leicht, kompliziertere Beispiele zu geben, in denen die Behauptung des Restsatzes nicht so trivial ist wie oben. Das Prinzip ist aber immer das gleiche: Die Voraussetzungen des Satzes D stimmen für $F = \varphi' \psi$ genau mit denen des Restsatzes überein und sind auch notwendig und hinreichend für (1) mit adjungiertem B; die Voraussetzungen von E aber verlangen etwas mehr als die von D und sind daher wohl hinreichend, aber nicht notwendig.

Diese Schwierigkeit ist übrigens wohlbekannt. Sie ist es, die Severi[6]) veranlaßte, den Begriff der scheinbaren Multiplizität einzuführen. Mittels

---

[4]) M. Noether, Math. Annalen 23 (1884), S. 348—351.

[5]) Siehe z. B. F. Enriques - O. Chisini, Teoria geometrica delle equazioni algebriche, I, Bologna 1915, S. 131.

[6]) F. Severi-E. Löffler, Vorlesungen über algebraische Geometrie, Leipzig 1921, S. 117 und 120—121.

dieses Begriffes kann der Beweis des Restsatzes in Ordnung gebracht werden, in der Weise, wie es bei Severi angedeutet ist. Vom Standpunkt der Einfachheit aber scheint der oben dargestellte Beweis, in welchem weder unendlich benachbarte Schnittpunkte noch Umdeutungen des Multiplizitätsbegriffs herangezogen zu werden brauchen, vorzuziehen zu sein.

Es war nicht, um die Max Noether gebührende Ehre als Begründer der geometrischen Theorie der algebraischen Funktionen zu verkleinern, daß ich in meiner Note[1]) auf eine kleine Lücke in Noethers Beweisführung hingewiesen habe. Seine grundlegenden Ideen haben ihn nicht nur zu Entdeckung der fruchtbarsten und schönsten Methoden der algebraisch-geometrischen Theorie geführt, sondern sie reichen auch zur exakten Begründung aller Sätze dieser Theorie hin. Das beweist auch wieder der hier dargestellte Beweis des Restsatzes, in welchem (ebenso wie in meinem ersten Beweis) im Grunde ausschließlich Noethersche Schlußweisen benutzt werden.

(Eingegangen am 29. 3. 1935.)

Ein Beitrag zur algebraischen Geometrie.

Von

Alfred Helms in Hamburg.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in drei Teile, die miteinander nur in verhältnismäßig losem Zusammenhang stehen*).

1. In § 1 wird die Grell-Webersche Normentheorie von Idealen in endlichen algebraischen Zahlenringen (und abstrakten Ringen ähnlicher Bauart) in stark vereinfachter Form aufs neue hergeleitet und ergänzt[1]). Die Ergebnisse liegen dabei in der folgenden Richtung: Grell führt in seiner grundlegenden Arbeit den Begriff des Quotientenringes ein, der zweckmäßigerweise immer dann herangezogen wird, wenn es sich um den Beweis von Sätzen handelt, bei denen nur endlich viele Primideale des gerade betrachteten Ringes herangezogen werden. Bei seinem Kompositionsreihensatze hat aber Grell diesen Gedanken nicht benutzt. Das hat zur Folge, daß der Beweis in mehrere Schritte zerlegt werden muß, die nur sehr umständlich zum Ziele führen und den Nachteil haben, daß sie die Grenzen der Gültigkeit des Kompositionsreihensatzes nicht unmittelbar zeigen. Gebraucht man dagegen auch beim Beweise des Kompositionsreihensatzes die Quotientenringe und benutzt die von Grell und Weber nicht beachtete Tatsache (Satz 1), daß in einem Ringe mit nur endlich vielen, zu einander teilerfremden Primidealen jedes umkehrbare Ideal Hauptideal ist, so wird der Kompositionsreihensatz eine einfache Folge der einfachsten Sätze über die Normen von Hauptidealen, und es ergibt sich weiter ohne besondere Schwierigkeit, daß er wenigstens in den für die algebraische Geometrie wichtigen Fällen ausnahmslos n u r für umkehrbare Ideale gilt.

Durch die Beachtung von Satz 1 wird die Grell-Webersche Normentheorie der umkehrbaren Ideale erst wirklich durchsichtig; man braucht nämlich die meisten Behauptungen nur für den einfachen Fall der Hauptideale zu beweisen. So werden die in § 3 und § 5 der Weberschen Arbeit abgeleiteten Sätze fast zu Selbstverständlichkeiten.

---

*) Diese Arbeit ist von der math.-naturw. Fakultät der Universität Erlangen als Dissertation angenommen worden. Herrn Prof. Krull möchte ich hiermit für sein der Arbeit entgegengebrachtes Interesse danken.

[1]) H. Grell, Zur Theorie der Ordnungen in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Annalen 97, S. 524—558. W. Weber, Umkehrbare Ideale, Math. Zeitschr. 36, S. 137—157.

Eine der schon bei Grell angedeuteten Möglichkeiten der Anwendung des Kompositionsreihensatzes auf die Geometrie besteht in dem unmittelbar einleuchtenden Nachweis der Gleichheit zweier verschieden lautender Definitionen der Vielfachheit eines Schnittpunktes zweier ebener algebraischer Kurven. Die Abgrenzung des Geltungsbereiches des Kompositionsreihensatzes gestattet darüber hinaus, durch Auswertung eines von Macaulay in anderem Zusammenhange angegebenen Polynomidealbeispiels [2]) zu zeigen, daß die Ideallänge für die Schnittpunktsvielfachheit zweier auf derselben Fläche gelegener algebraischer Kurven nicht immer den funktionentheoretisch richtigen Wert liefert. Dies stellt eine Ergänzung der tief eindringenden v. d. Waerdenschen Untersuchungen über die Bedeutung der Ideallänge bei Vielfachheitsdefinitionen dar [3]).

2. Bei der am Schlusse des § 1 besprochenen Untersuchung handelt es sich um die Betrachtung einer singulären Stelle eines eindimensionalen algebraischen Gebildes. Mit den Beziehungen zwischen arithmetischer und algebraischer Singularitätendefinition beschäftigt sich der zweite Teil der vorliegenden Arbeit.

Die Nullstellen eines Primideals $\mathfrak{p}$ des Polynomringes $R = \mathfrak{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ($\mathfrak{K}$ Körper der komplexen Zahlen) definieren eine irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit. In Verallgemeinerung der für eine ebene algebraische Mannigfaltigkeit bekannten Singularitätendefinition haben Macaulay und Schmeidler auch für beliebige derartige Gebilde eine algebraische Singularitätendefinition gegeben. Eine Nullstelle eines Primideals $\mathfrak{p}$ heißt singulär, wenn sie auch Nullstelle von gewissen aus partiellen Ableitungen von Polynomen aus $\mathfrak{p}$ gebildeten Determinanten ist [4]).

Für eindimensionale algebraische Gebilde (kurz: Kurven) in Räumen von beliebiger Dimension ist daneben eine andere, arithmetische, Singularitätendefinition gebräuchlich: Es sei $\mathfrak{p}$ das definierende Primideal des Gebildes $\mathfrak{G}$, $\mathsf{P} = R/\mathfrak{p}$ der zugehörige Restklassenring und K der Quotientenkörper von P. Jedem einzelnen Punkte r von $\mathfrak{G}$ entspricht dann ein bestimmter Punktring (Quotientenring von P nach dem den Punkt r definierenden Primideal π aus P) P_π, zwischen P und K. Es heißt dann r ein regulärer oder singulärer Punkt von $\mathfrak{G}$, je nachdem ob P_π in K „ganz abgeschlossen" ist oder nicht. In § 2 wird nun die Gleichwertigkeit dieser arithmetischen Singularitätendefinition mit der algebraischen Definition von Macaulay und Schmeidler auf direktem Wege nachgewiesen.

---

[2]) F. S. Macaulay, The Theory of Modular Systems, Cambridge 1916, S. 34.

[3]) B. L. v. d. Waerden, Eine Verallgemeinerung des Bézoutschen Theorems, Math. Annalen 99, S. 479—541.

[4]) Anmerkung [2]) und W. Schmeidler, Über Singularitäten algebraischer Gebilde, Math. Annalen 81, S. 223—234.

3. Die in § 2 beim Beweise der Gleichwertigkeit der beiden verschiedenartigen Singularitätendefinitionen gegebenen Entwicklungen führen auf den Gedanken, daß unter gewissen Bedingungen der Übergang von einem Ringe zum zugehörigen ganz abgeschlossenen der Auflösung einer Singularität im Sinne der algebraischen Geometrie entsprechen wird. Dies ist eine Auffassung, die schon aus der Grellschen Arbeit herausspricht und die hier in gewissem Umfange durchgeführt ist.

Dem Übergang vom Ringe P zum zugehörigen in K ganz abgeschlossenen Ringe $\overline{\mathsf{P}}$ entspricht geometrisch nicht eine birationale Transformation des durch P bestimmten Gebildes in ein anderes durch $\overline{\mathsf{P}}$ definiertes ohne Änderung der Dimensionszahl des Einbettungsraumes. Vielmehr stellt der Schritt vom Ringe P zum Ringe $\overline{\mathsf{P}}$ geometrisch den Übergang von dem durch P gegebenen niederdimensionalen zu einem durch $\overline{\mathsf{P}}$ gegebenen höherdimensionalen Raume dar. Das wichtigste Ergebnis, das in dieser Richtung durch die arithmetische Theorie geliefert wird, ist ein einfacher Beweis des Satzes, daß jedes eindimensionale algebraische Gebilde des n-dimensionalen affinen Raumes aufgefaßt werden kann als Projektion einer singularitätenfreien algebraischen Kurve des $(n+1)$-dimensionalen affinen Raumes[5]). Diese Tatsache ergibt sich nämlich als Anwendung des folgenden abstrakten Theorems, dessen Beweis den eigentlichen Hauptteil des § 3 bildet.

Satz 6: Es existiert ein Element $\overline{\mathsf{A}}$ aus $\overline{\mathsf{P}}$, so daß $\overline{\mathsf{P}} = \mathsf{P}[\overline{\mathsf{A}}]$ ist.

Der Beweisgedanke hierzu läßt sich schon in der bekannten Dedekindschen Arbeit „Über die Diskriminanten endlicher Körper" vorfinden[6]). Für die Darstellung im Texte wurde eine möglichst kurz gefaßte Ausführung bevorzugt, bei der nur die unbedingt nötigen, in § 3 angegebenen Voraussetzungen benutzt werden.

§ 1.

Der Begriff des umkehrbaren Ideals hat im folgenden die übliche Bedeutung: Ist J ein beliebiger Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper H, $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus J, so heißt $\mathfrak{a}$ umkehrbar, wenn der Modul (das gebrochene Ideal) $\mathfrak{a}^{-1}$ aller der Elemente t, für die $t \cdot s \subset J$ für jedes $s \subset \mathfrak{a}$, der Gleichung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1} = J$ genügt. Ist $\mathfrak{a}$ in J umkehrbar, und t in $\mathfrak{a}$, so gilt stets eine Gleichung $(t) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}$ mit eindeutig bestimmtem $\mathfrak{c}$[7]).

Die Grell-Webersche Theorie der Normen von Idealen aus M läßt sich mit Hilfe des folgenden Satzes auf eine durchsichtige Form bringen.

---

[5]) Pascal, Repertorium der höheren Mathematik, 2. Bd., 2. Hälfte, Geometrie des Raumes, Berlin 1922, S. 887.

[6]) R. Dedekind, Gesammelte mathematische Werke, Braunschweig 1930, 1. Bd., S. 351—396.

[7]) Siehe auch die unter [1]) zitierte Arbeit von W. Weber.

Satz 1: Ist T ein beliebiger Integritätsbereich mit nur endlich vielen, zu einander teilerfremden Primidealen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$, so ist jedes umkehrbare Ideal $\mathfrak{b}$ aus T Hauptideal.

Es gibt Elemente $a_i \subset \prod_{i \neq k} \mathfrak{p}_k$, $a_i \not\subset \mathfrak{p}_i$. Weil aber $\mathfrak{b}$ umkehrbar ist, so gilt $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{b}$ für $1 \leqq i \leqq n$; mithin gibt es Elemente $c_i \subset \mathfrak{b}$, so daß $c_i \not\subset \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{p}_i$. Daraus folgt, daß das Element $a = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot c_i \subset \mathfrak{b}$, aber $\not\subset \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{p}_i$ ist. Wegen der Umkehrbarkeit von $\mathfrak{b}$ hat man $(a) = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{r} \not\subset \mathfrak{p}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Daraus ergibt sich $\mathfrak{r} = \mathsf{T}$ und $(a) = \mathfrak{b}$.

Es sei nun M^* Multiplikationsring, also ein Ring, in dem ebenso wie in der Hauptordnung eines endlichen algebraischen Zahlkörpers jedes Ideal Produkt von endlich vielen Potenzen paarweise teilerfremder Primideale ist[8]). M sei ein Oberring von M^*, dessen Quotientenkörper Λ eine endliche separable Erweiterung des Quotientenkörpers Λ^* von M^* darstellt; außerdem soll M über M^* eine endliche Modulbasis besitzen, es soll sich also jedes Element aus M als Linearform in endlich vielen festen Elementen aus M mit Koeffizienten aus M^* darstellen lassen. In M ist dann jedes Ideal eindeutiges Produkt endlich vieler paarweise teilerfremder Primärideale.

Unter $\mathsf{M}_{\mathfrak{a}}$ ($\mathfrak{a}$ Ideal aus M) sei der Ring aller Elemente $\frac{c}{d}$ mit beliebigem $c \subset \mathsf{M}$ und zu $\mathfrak{a}$ teilerfremdem d verstanden. Entsprechend sei der Ring $\mathsf{M}^*_{\mathfrak{a}^*}$ definiert, wobei $\mathfrak{a}^*$ ein Ideal aus M^* bedeutet. Weil das Primideal $\mathfrak{p}^* \subset \mathsf{M}^*$ und somit auch $\mathfrak{p}^* \cdot \mathsf{M}^*_{\mathfrak{p}^*} \subset \mathsf{M}^*_{\mathfrak{p}^*}$ umkehrbar ist, so ist $\mathfrak{p}^*$ in $\mathsf{M}^*_{\mathfrak{p}^*}$ Hauptideal und der Ring $\mathsf{M}^*_{\mathfrak{p}^*}$ Hauptidealring.

Um zu einer geschmeidigen Definition der Norm eines Ideals $\mathfrak{a} \subset \mathsf{M}$ zu gelangen, geht man so vor: Das Verengungsideal $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a} \frown \mathsf{M}^*$ möge die Primidealteiler $\mathfrak{p}_1^*, \ldots, \mathfrak{p}_r^* \subset \mathsf{M}^*$ besitzen. Der Ring $\mathsf{M}_{\mathfrak{p}_i^*} = \mathsf{M}_{(\mathsf{M} \cdot \mathfrak{p}_i^*)}$, der aus allen Elementen $\frac{c}{d^*}$, $c \subset \mathsf{M}$, $d^* \subset \mathsf{M}^*$ mit $(d^*, \mathfrak{p}_i^*) = \mathsf{M}^*$ besteht, ist ein endlicher $\mathsf{M}^*_{\mathfrak{p}_i^*}$-Modul. Weil aber $\mathsf{M}^*_{\mathfrak{p}_i^*}$ Hauptidealring ist, so existiert zu jedem Ideal aus $\mathsf{M}_{\mathfrak{p}_i^*}$ eine endliche bis auf unimodulare Transformationen aus $\mathsf{M}^*_{\mathfrak{p}_i^*}$ eindeutig bestimmte $\mathsf{M}^*_{\mathfrak{p}_i^*}$-Basis mit einer für alle Ideale gleichen Anzahl von Basisgliedern.

Seien nun $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ zwei Ideale aus M. Die Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und $\beta_1, \ldots, \beta_n$ mögen im Ringe $\mathsf{M}_{\mathfrak{p}_i^*}$ die $\mathsf{M}^*_{\mathfrak{p}_i^*}$-Basiselemente der Ideale $\mathfrak{a} \cdot \mathsf{M}_{\mathfrak{p}_i^*}$ und $\mathfrak{b} \cdot \mathsf{M}_{\mathfrak{p}_i^*}$ sein. Es gilt dann: $\alpha_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}^* \cdot \beta_k$, $c_{ik}^* \subset \mathsf{M}^*_{\mathfrak{p}_i^*}$. Das aus der Determinante $|c_{ik}^*| \neq 0$ in $\mathsf{M}^*_{\mathfrak{p}_i^*}$ abgeleitete Ideal heißt die $\mathfrak{p}_i^*$-Partialnorm

[8]) W. Krull, Über Multiplikationsringe, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie, Math.-naturw. Klasse 1925, 5. Abhandlung.

$N_{\mathfrak{p}_i^*}(\mathfrak{b}/\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$. Wenn $\mathfrak{b} = \mathfrak{M}$ ist, so schreibt man kurz: $N_{\mathfrak{p}_i^*}(\mathfrak{M}/\mathfrak{a}) = N_{\mathfrak{p}_i^*}(\mathfrak{a})$ und nennt das Hauptideal die $\mathfrak{p}_i^*$-Partialnorm von $\mathfrak{a}$.

Der mengentheoretische Durchschnitt des Ideals $N_{\mathfrak{p}_i^*}(\mathfrak{b}/\mathfrak{a})$ mit dem Ringe $\mathfrak{M}^*$ ist ein Ideal $\mathfrak{p}_i^{*n_i}$ aus $\mathfrak{M}^*$. Das Produkt dieser Primidealpotenzen wird die gewöhnliche Norm von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$: $N(\mathfrak{b}/\mathfrak{a})$. Wenn $\mathfrak{b}$ speziell gleich $\mathfrak{M}$ ist, dann heißt das Ideal $N(\mathfrak{M}/\mathfrak{a})$ die Norm von $\mathfrak{a}$: $N(\mathfrak{M}/\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{a})$. Zum Beweise des in der algebraischen Geometrie nützlichen Grellschen Kompositionsreihensatzes [9]) muß man die folgenden, schon bei Grell angeführten Sätze beachten.

a) Für Ideale $\mathfrak{a} \supseteqq \mathfrak{b} \supseteqq \mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{M}$ gilt: $N(\mathfrak{a}/\mathfrak{b}) \cdot N(\mathfrak{b}/\mathfrak{c}) = N(\mathfrak{a}/\mathfrak{c})$.

Dies ist für Partialnormen weiter nichts als der Satz über die Multiplikation von Determinanten.

b) Wenn $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}' \supset \mathfrak{c}'$ und wenn die $\mathfrak{M}$-Moduln $\mathfrak{b}/\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}'/\mathfrak{c}'$ isomorph sind, dann ist $N(\mathfrak{b}/\mathfrak{c}) = N(\mathfrak{b}'/\mathfrak{c}')$. Dies gilt, weil jede $\mathfrak{p}^*$-Partialnorm $N_{\mathfrak{p}^*}(\mathfrak{b}/\mathfrak{c})$ gleich dem Produkte der Elementarteiler des $\mathfrak{M}^*_{\mathfrak{p}^*}$-Moduls $\mathfrak{b}/\mathfrak{c}$ ist.

c) Für $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ mit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{M}$ gilt: $N(\mathfrak{a}) \cdot N(\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$ nach a) und b), weil $\mathfrak{a}/\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a}/\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})/\mathfrak{b} = \mathfrak{M}/\mathfrak{b}$.

d) Es ist $N(\mathfrak{q}) = N(\mathfrak{p})^{\lambda}$. Dabei bedeutet λ die Länge einer Kompositionsreihe von mit dem Primärideal $\mathfrak{q}$ beginnenden Idealen aufgefaßt als $\mathfrak{M}$-Moduln, und $\mathfrak{p}$ das zu $\mathfrak{q}$ gehörige Primideal. Der Beweis ist bei Grell angeführt.

e) Eine Folge von a) bis d) ist: $N(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{p}_1)^{\lambda_1} \ldots N(\mathfrak{p}_s)^{\lambda_s}$, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_s$ und $\mathfrak{p}_i$ das zu $\mathfrak{q}_i$ gehörige Primideal und λ_i die Länge von $\mathfrak{q}_i$ bedeutet.

f) Die Norm des Primideals $\mathfrak{p}$ ist gleich der ϱ-ten Potenz des Primideals $\mathfrak{p}^*$ aus $\mathfrak{M}^*$. Dabei ist ϱ gleich dem Grade des Restklassenkörpers $\mathfrak{M}/\mathfrak{p}$ über dem Körper $\mathfrak{M}^*/\mathfrak{p}^*$. Der einfache Beweis ist ebenfalls bei Grell zu finden.

In der Weberschen Arbeit findet sich der folgende Satz bewiesen.

Satz 2: Das Ideal $N(\mathfrak{b}) \cdot N(\mathfrak{c})$ ist immer ein Teiler des Ideals $N(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})$. Es ist sicher dann $N(\mathfrak{b}) \cdot N(\mathfrak{c}) = N(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})$, wenn eines der Ideale $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ umkehrbar ist.

Hinsichtlich des Beweises des ersten Teiles sei auf die Webersche Arbeit verwiesen. Es könnte scheinen, als ob der zweite Teil dieses Satzes ein tiefliegendes Resultat in sich berge. Unter Beachtung von Satz 1 drückt aber dies Theorem weiter nichts aus als die Tatsache, daß sich die Norm eines mit einem Hauptideal multiplizierten Ideals aus dem Produkt der Normen der beiden Ideale zusammensetzt. In der Tat, das umkehrbare

[9]) Siehe S. 444 und die unter [1]) zitierte Arbeit von H. Grell, S. 554.

Ideal $\mathfrak{b}$ wird in $\mathsf{M}_{\mathfrak{p}^*}$ zu einem Hauptideale: $(\beta)\cdot\mathsf{M}_{\mathfrak{p}^*}$. Wenn $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n$ $\mathsf{M}^*_{\mathfrak{p}^*}$-Basen von $\mathfrak{c}\cdot\mathsf{M}_{\mathfrak{p}^*}$ und $\mathsf{M}_{\mathfrak{p}^*}$ sind, so hat man: $\beta\cdot\mu_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot\mu_k$, $\gamma_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\cdot\mu_k$ und somit $\beta\cdot\gamma_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\cdot\mu_l$. Daraus folgt aber sofort: $N_{\mathfrak{p}^*}(\mathfrak{b})\cdot N_{\mathfrak{p}^*}(\mathfrak{c}) = N_{\mathfrak{p}^*}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})$.

Sei der endliche M^*-Modul $\overline{\mathsf{M}} \supset \mathsf{M}$ der zu M gehörende, in seinem Quotientenkörper ganz abgeschlossene Ring. Die $\mathfrak{p}^*$-Partialnorm des Ideals $\overline{\mathfrak{a}} \subset \overline{\mathsf{M}}$ wird in der entsprechenden Weise erklärt, wie die von $\mathfrak{a} \subset \mathsf{M}$ und zwar durch Vermittlung des $\mathsf{M}^*_{\mathfrak{p}^*}$-Moduls $\overline{\mathsf{M}}_{\mathfrak{p}^*}$. $\overline{\mathsf{M}}_{\mathfrak{p}^*}$ hat eine endliche, bis auf Unimodulartransformationen aus $\mathsf{M}^*_{\mathfrak{p}^*}$ eindeutig bestimmte $\mathsf{M}^*_{\mathfrak{p}^*}$-Basis; ihre Gliederzahl stimmt mit der von $\mathsf{M}_{\mathfrak{p}^*}$ überein, denn sie ist ja gleich dem Körpergrade von Λ über Λ^*.

Man kann nun einen Satz beweisen, der in der algebraischen Geometrie bei der Definition der Schnittpunktmultiplizität in einem Schnittpunkte zweier algebraischer Kurven eine gewisse Bedeutung erhält.

G r e l l s c h e r   N o r m e n s a t z: Für jedes Ideal $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_s$ aus M ist $N(\mathsf{M}/\mathfrak{a})$ ein Teiler von $N(\overline{\mathsf{M}}/\mathfrak{a}\cdot\overline{\mathsf{M}})$. Diese beiden Ideale aus M^* stimmen sicher dann, und wenn die Restklassenringe der zu den Primäridealen $\mathfrak{q}_i$ gehörenden Primideale $\mathfrak{p}_i$ unendlich viele Elemente enthalten, auch nur dann, überein, wenn $\mathfrak{a}$ umkehrbar ist[10]).

Zu beweisen ist dieser Satz wiederum nur für die $\mathfrak{p}^*$-Partialnormen ($\mathfrak{p}^*$ Teiler des Verengungsideales $\mathfrak{a} \frown \mathsf{M}^*$). Zuerst soll gezeigt werden, daß für ein umkehrbares $\mathfrak{a}$ gilt: $N(\mathsf{M}/\mathfrak{a}\cdot\mathsf{M}) = N(\overline{\mathsf{M}}/\mathfrak{a}\cdot\overline{\mathsf{M}})$. In $\mathsf{M}_{\mathfrak{p}^*}$ ist $\mathfrak{a}$ nach Satz 1 gleich einem Hauptideale $(\alpha)\cdot\mathsf{M}_{\mathfrak{p}^*}$. Wenn $\mu_1, \ldots, \mu_n$ und $\bar\mu_1, \ldots, \bar\mu_n$ $\mathsf{M}^*_{\mathfrak{p}^*}$-Basen von $\mathsf{M}_{\mathfrak{p}^*}$ und $\overline{\mathsf{M}}_{\mathfrak{p}^*}$ sind, so hat man:

$$\mu_i = \sum_{k=1}^{n} d^*_{ik}\cdot\bar\mu_k, \quad \alpha\cdot\mu_l = \sum_{k=1}^{n} e^*_{lk}\,\mu_k, \quad \alpha\cdot\bar\mu_l = \sum_{k=1}^{n} f^*_{lk}\cdot\bar\mu_k.$$

Aus diesen Gleichungen entnimmt man:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha\cdot d^*_{lk}\cdot\bar\mu_k = \sum_{l=1}^{n} e^*_{kl}\sum_{i=1}^{n} d^*_{li}\cdot\bar\mu_i \quad \text{und} \quad \sum_{l=1}^{n} \alpha\cdot d^*_{il}\cdot\bar\mu_l = \sum_{l=1}^{n} d^*_{il}\sum_{k=1}^{n} f^*_{lk}\cdot\bar\mu_k.$$

Hieraus aber folgt wegen $|d^*_{il}| \neq 0$:

$$(|e^*_{lk}|) = N_{\mathfrak{p}}(\mathsf{M}/\mathfrak{a}) = N_{\mathfrak{p}}(\overline{\mathsf{M}}/\mathfrak{a}\cdot\overline{\mathsf{M}}) = (|f^*_{lk}|).$$

Um die weiteren Behauptungen zu verifizieren, soll gezeigt werden, daß zu jedem primären nichtumkehrbaren Ideal $\mathfrak{q} \subset \mathsf{M}$ mit dem zugehörigen Primideal $\mathfrak{p}$ ein umkehrbares Primärideal $\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}$ existiert, so daß $\mathfrak{q}'\overline{\mathsf{M}} = \mathfrak{q}\cdot\overline{\mathsf{M}}$ ist. Denn dann hat man nach dem soeben Bewiesenen $N(\mathsf{M}/\mathfrak{q}'\mathsf{M}) = N(\overline{\mathsf{M}}/\mathfrak{q}'\overline{\mathsf{M}}) = N(\overline{\mathsf{M}}/\mathfrak{q}\cdot\overline{\mathsf{M}})$. Wenn man aber den Satz e) heranzieht

[10]) Siehe die unter [1]) angegebene Arbeit von H. Grell, S. 554.

und bemerkt, daß die Länge des Ideals $\mathfrak{q}' \subset \mathsf{M}$ größer ist als die von $\mathfrak{q} \subset \mathsf{M}$, so folgt, daß $N(\mathsf{M}/\mathfrak{q})$ ein echter Teiler von $N(\overline{\mathsf{M}}/\mathfrak{q}\cdot\overline{\mathsf{M}})$ ist.

Weil $\overline{\mathsf{M}}$ ganz abgeschlossen ist, so hat man: $\mathfrak{q}\cdot\overline{\mathsf{M}} = \overline{\mathfrak{p}}_1^{\varrho_1}\ldots\overline{\mathfrak{p}}_r^{\varrho_r}$, wobei $\overline{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{p}}_r$ alle Primidealteiler von $\mathfrak{q}\cdot\overline{\mathsf{M}}$ in $\overline{\mathsf{M}}$ darstellen und die $\varrho_i > 0$ sind. Zu jedem Elemente $q_1 \subset \mathfrak{q}$, dessen Zerfällung in $\overline{\mathsf{M}}$ von der Form ist:

$$(q_1)\cdot\overline{\mathsf{M}} = \overline{\mathfrak{p}}_1^{\varrho_1}\ldots\overline{\mathfrak{p}}_s^{\varrho_s}\cdot\overline{\mathfrak{p}}_{s+1}^{\varrho_{s+1}+\tau_{s+1}}\ldots\overline{\mathfrak{p}}_r^{\varrho_r+\tau_r}\cdot\overline{\mathfrak{a}}$$

mit $(\overline{\mathfrak{a}}, \overline{\mathfrak{p}}_i) = \overline{\mathsf{M}}$, $\tau_{s+i} > 0$ $(0 \leqq i \leqq r - s)$ und $s < r$ kann man ein in $\mathfrak{q}$ gelegenes Element q_2 finden, so daß bei der Idealzerlegung des Hauptideals $(q_2)\cdot\overline{\mathsf{M}}$ in $\overline{\mathsf{M}}$ auch noch der Exponent von $\overline{\mathfrak{p}}_{s+1}$ gleich ϱ_{s+1} wird.

Es existiert sicherlich ein Element $w \subset \mathfrak{q}$, so daß $w\cdot\overline{\mathsf{M}}$ genau durch $\overline{\mathfrak{p}}_{s+1}^{\varrho_s+1}$ teilbar ist. Das Element $g_i = w + e_i'\cdot q_1$ mit einem beliebigen zu $\mathfrak{p} \subset \mathsf{M}$ teilerfremden $e_i' \subset M$ ist genau durch $\overline{\mathfrak{p}}_{s+1}^{\varrho_s+1}$ teilbar. Zu jedem $\overline{\mathfrak{p}}_i$ $(1 \leqq i \leqq s)$ gibt es aber höchstens ein mod $\mathfrak{p}\cdot\mathsf{M}$ bestimmtes Element $e \subset \mathsf{M}$, so daß schon $\overline{\mathfrak{p}}_i^{\varrho_i+1}$ in $(w + e_i q)\cdot\overline{\mathsf{M}}$ aufgeht. Denn sonst müßte auch $(w + e_i q_1) - (w + e_i'' q_1) = (e_i - e_i'')q_1 \equiv 0\,(\overline{\mathfrak{p}}_i^{\varrho_i+1})$ sein mit $(e_i - e_i'') \not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$. Daraus ergäbe sich $q_1 \equiv 0\,(\overline{\mathfrak{p}}_i^{\varrho_i+1})$.

Nach Voraussetzung sind aber unendlich viele mod $\mathfrak{p}$ inkongruente Elemente aus M vorhanden. Man kann daher ein Element $e \subset \mathsf{M}$ so finden, daß das Ideal $(w + e\cdot q_1)\overline{\mathsf{M}}$ genau durch $\overline{\mathfrak{p}}_i^{\varrho_i}$ teilbar ist für $1 \leqq i \leqq s + 1$. Es gibt mithin ein Hauptideal, für welches gilt:

$$(q')\cdot\overline{\mathsf{M}} = \mathfrak{q}\cdot\overline{\mathsf{M}}\cdot\overline{\mathfrak{a}}, \quad \text{mit} \quad (\overline{\mathfrak{a}}, \mathfrak{q}\cdot\overline{\mathsf{M}}) = \overline{\mathsf{M}}.$$

Es sei in M: $(q')\cdot\mathsf{M} = \mathfrak{q}'\cdot\mathfrak{a}$ mit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{q}') = \mathsf{M}$, wo $\mathfrak{q}'$ zu $\mathfrak{p}$ gehörendes Primärideal ist. Wegen $q' \subset \mathfrak{q}$ gilt $\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}$, und weil das Ideal $\mathfrak{q}'$ wegen $\mathsf{M} = \mathfrak{q}'\cdot(\mathfrak{q}\cdot q'^{-1})$ umkehrbar ist, so gilt sicherlich: $\mathfrak{q}' \neq \mathfrak{q}$. Nun hat man $(q')\cdot\overline{\mathsf{M}} = \mathfrak{q}'\cdot\overline{\mathsf{M}}\cdot\mathfrak{a}\cdot\overline{\mathsf{M}} = \mathfrak{q}\cdot\overline{\mathsf{M}}\cdot\overline{\mathfrak{a}}$, mit $(\mathfrak{q}\overline{\mathsf{M}}, \mathfrak{a}\overline{\mathsf{M}}) = \overline{\mathsf{M}}$. Aus der Eindeutigkeit der Idealzerlegung im Ringe M schließt man daher sofort auf: $\mathfrak{q}'\cdot\overline{\mathsf{M}} = \mathfrak{q}\cdot\overline{\mathsf{M}}$.

Eine leichte Folgerung aus dem Normensatze ist:

Grellscher Kompositionsreihensatz: Für ein Primideal $\mathfrak{q}$ aus M gilt immer:

$$\lambda_{\mathfrak{q}} \leqq \varrho_1 s_1 + \cdots + \varrho_r s_r,$$

wobei $\lambda_{\mathfrak{q}}$ die Länge von $\mathfrak{q}$ in M (die mit der Länge von $\mathfrak{q}\cdot\mathsf{M}_{\mathfrak{p}^*}$ in $\mathsf{M}_{\mathfrak{p}^*}$ übereinstimmt), die ϱ_i die bei der Primidealzerfällung von $\mathfrak{q}\cdot\overline{\mathsf{M}}$ in $\overline{\mathsf{M}}$ auftretenden Exponenten $(\mathfrak{q}\cdot\overline{\mathsf{M}} = \overline{\mathfrak{p}}_1^{\varrho_1}\ldots\overline{\mathfrak{p}}_r^{\varrho_r})$ und s_i den Grad des Körpers $\overline{\mathsf{M}}/\overline{\mathfrak{p}}_i$ über $\mathsf{M}/\mathfrak{p}$ bedeuten. Das Gleichheitszeichen steht dann, und wenn der Restklassenkörper des zu $\mathfrak{q}$ gehörenden Primideals $\mathfrak{p}$ un-

endlich viele Elemente enthält, auch nur dann, wenn das Primärideal $\mathfrak{q}$ umkehrbar ist[10]).

Wenn man die Exponenten in der nach e) möglichen Normdarstellung für $N(\mathsf{M}/\mathfrak{q}\cdot\mathsf{M})$ und $N(\overline{\mathsf{M}}/\mathfrak{q}\cdot\overline{\mathsf{M}})$ einander gleichsetzt, so bekommt man: $\lambda_{\mathfrak{q}}\cdot s = s_1'\cdot\varrho_1 + \ldots + s_r'\cdot\varrho_r$, wobei s den Grad des Restklassenkörpers $\mathsf{M}/\mathfrak{p}$ über dem Körper $\mathsf{M}^*/\mathfrak{p}^*$, und s_i' den Grad von $\overline{\mathsf{M}}/\overline{\mathfrak{p}}_i$ über $\mathsf{M}^*/\mathfrak{p}^*$ bedeutet. Weil aber $\mathsf{M}^*/\mathfrak{p}^* \subseteq \mathsf{M}/\mathfrak{p} \subseteq \overline{\mathsf{M}}/\overline{\mathfrak{p}}_i$ ist, so hat man $s_i' = s\cdot s_i$. Division der vorstehenden Gleichung mit s ergibt die im Kompositionsreihensatz ausgedrückte Beziehung.

Die im vorangehenden entwickelten Resultate können benutzt werden, um zwei in der Geometrie der ebenen algebraischen Kurven angeführte Definitionen der Schnittpunktmultiplizität eines gemeinsamen Punktes zweier ebener Kurven als gleichwertig zu erweisen.

Es seien $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ zwei irreduzible Polynome des Ringes $R = \mathfrak{K}[x, y]$ ($\mathfrak{K}$ bezeichne den Körper der komplexen Zahlen); $f_1(x, y) = 0$ und $f_2(x, y) = 0$ definieren somit irreduzible algebraische Kurven. Sei $x = \alpha$, $y = \beta$ ein gemeinsamer Punkt der beiden Kurven; das Primideal $\mathfrak{p} = (x-\alpha, y-\beta) \subset R$ ist dann Teiler des Ideals (f_1, f_2).

Um die Vielfachheit des durch $\mathfrak{p}$ gegebenen Schnittpunktes zu definieren, stellt man das Ideal (f_1, f_2) in der Form

$$(f_1, f_2) = \mathfrak{q} \frown \mathfrak{q}_2 \frown \mathfrak{q}_3 \frown \ldots \frown \mathfrak{q}_r = \mathfrak{q}\cdot\mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_r$$

dar, wobei $\mathfrak{p}$ das zu $\mathfrak{q}$ gehörende Primideal ist. Man versteht dann unter der Multiplizität des durch $\mathfrak{q}$ bestimmten Schnittpunktes die Länge $\lambda_{\mathfrak{q}}$ des Ideals $\mathfrak{q}$.

Eine andere Möglichkeit, zu einer Schnittpunktmultiplizität zu kommen, ist die folgende: Man zeichnet die eine der beiden algebraischen Kurven, etwa die durch $f_1(x, y) = 0$ gegebene aus und betrachtet den zu ihr gehörenden Restklassenring $\mathsf{P} = R/(f_1)$. Das zum Primideal $\pi = (\xi-\alpha, \eta-\beta)$ gehörende, aus $\mathfrak{q}$ bei der Restklassenbildung hervorgehende Primärideal μ spaltet sich in dem zu P gehörenden ganz abgeschlossenen Ringe $\overline{\mathsf{P}}$ so auf: $\mu\cdot\overline{\mathsf{P}} = \bar{\pi}_1^{m_1}\ldots\bar{\pi}_r^{m_r}$.

Als Multiplizität, mit der der durch $\mu \subset \mathsf{P}$ definierte Schnittpunkt zu zählen ist, führt man die Zahl $\sum\limits_{i=1}^{r} m_i$ ein. Um diese Definition in eine bekanntere Form zu bringen, geht man zum Quotientenringe P_π und zu dessen ganz abgeschlossenem Ringe $\overline{\mathsf{P}}_\pi$ über. Hier gilt:

$$\mu\cdot\overline{\mathsf{P}}_\pi = (f_2)\cdot\overline{\mathsf{P}}_\pi = \bar{\pi}_1^{m_1}\ldots\bar{\pi}_r^{m_r}\cdot\overline{\mathsf{P}}_\pi.$$

Nach Satz 1 sind aber die Ideale $\bar{\pi}_i\,\overline{\mathsf{P}}_\pi$ Hauptideale; sie entsprechen den zu $\pi = (\xi-\alpha, \eta-\beta)$ gehörenden „Divisoren“ des durch $f_1(x, y) = 0$

festgelegten algebraischen Funktionenkörpers Φ[11]), ihre Basiselemente sind Uniformisierende an den durch die Divisoren definierten Stellen von Φ. Die Zahl $\sum_{i=1}^{r} m_i$ gibt mithin an, mit welcher Vielfachheit die zu π gehörenden „Divisoren" in $f_2(x, y)$ aufgehen. Die Berechtigung dieser zweiten Definition liegt in ihrer funktionentheoretischen Brauchbarkeit, die Berechtigung der ersten Definition wird durch den Nachweis sichergestellt, daß sie mit der zweiten übereinstimmt, daß mithin $\sum_{i=1}^{r} m_i = \lambda_q$ gilt. Die Unsymmetrie in der zweiten Definition wird durch diese Beziehung als eine nur äußerliche erkannt.

Man sieht sofort, daß die drei Ringe $\mathsf{T} = \mathfrak{K}[x_1]$, P und $\overline{\mathsf{P}}$ die Voraussetzungen der Gültigkeit des Grellschen Kompositionsreihensatzes erfüllen. Weil aber $\mathsf{P}/\pi \simeq \overline{\mathsf{P}}/\overline{\pi}_i \simeq \mathfrak{K}\,(1 \leqq i \leqq r)$ ist, so ist in der Beziehung von S. 444 $s_i = 1\ (1 \leqq i \leqq r)$ und in der Tat $\sum_{i=1}^{r} m_i = \lambda_q$.

Bemerkenswert ist noch, daß dieser Beweis für die Übereinstimmung von idealtheoretischer und funktionentheoretischer Multiplizität bei ebenen Kurven sich ohne weiteres übertragen läßt auf den Fall, daß eine Kurve C des n-dimensionalen Raumes R_n die durch die Nullstellen eines irreduziblen Polynoms $f(x_1, \ldots, x_n)$ gegebene Hyperfläche schneidet; denn der die Kurve C darstellende Restklassenring hat ja dieselbe Struktur wie der Ring P, und das aus dem Hauptideal $(f(x_1, \ldots, x_n))$ im Ringe $\mathfrak{K}[x_1, \ldots, x_n]$ bei der Restklassenbildung hervorgehende Ideal ist natürlich wiederum Hauptideal.

Bei dem Versuche, die vorstehenden Definitionen der Schnittpunktmultiplizität in einem Schnittpunkte zweier ebener algebraischer Kurven auf sich schneidende algebraische Kurven in höheren linearen Räumen zu übertragen und dann deren Gleichwertigkeit nachzuweisen, müßte man nach dem Grellschen Kompositionsreihensatze zeigen, das jedes einen Schnittpunkt darstellende Primärideal in seinem Quotientenringe zu einem Hauptideale wird. Ein einfaches Beispiel zeigt aber, daß dies nicht der Fall ist[2]).

Es sei $\mathfrak{K}[x_1, x_2, x_3] = R_3$ der dem dreidimensionalen affinen Raume entsprechende Polynomring. Dann gibt es nach Macaulay auf einem geeignet gewählten Kegel l-ter Ordnung ($l \geqq 3$) mit der Gleichung

$$E(x_1, x_2, x_3) = 0$$

und dem Scheitelpunkte im Koordinatenanfangspunkte eine irreduzible algebraische Kurve, die durch l passend gewählte algebraische Flächen

[11]) Siehe hierzu etwa: Hensel-Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen ..., Leipzig 1902.

der Ordnung l mit den Gleichungen $F_i(x_1, x_2, x_3) = 0$ $(1 \leqq i \leqq l)$ auf dem Kegel ausgeschnitten wird. Dabei haben die Schnittflächen $F_i = 0$ im Ursprung einen mindestens $(l-1)$-fachen Punkt, es enthalten also die Polynome $F_i(x_1, x_2, x_3)$ nur Glieder in x_1, x_2, x_3, deren Grade $\geqq l-1$ sind. Die Punkte der algebraischen Kurve werden algebraisch definiert durch die Nullstellen des Primideals $\mathfrak{k} = (F_1, \ldots, F_l, E)$.

Diese Kurve soll nun zum Schnitt gebracht werden mit einer zweiten und zwar mit einer noch beliebig wählbaren Kegelerzeugenden. Ihre Idealdarstellung ist gegeben durch $g = (l_1, l_2)$, wo l_1 und l_2 zwei in bezug auf den Körper der komplexen Zahlen $\mathfrak{K}$ linear unabhängige Linearformen bedeuten. Die Schnittverhältnisse des im Scheitelpunkte des Kegels liegenden Kurvenpunktes sollen nach der für ebene Kurven angewandten Methode untersucht werden[12]).

Im Restklassenringe $R_3/\mathfrak{k} = \mathsf{P}$ tritt bei der Primäridealzerlegung von $\gamma = (\lambda_1, \lambda_2)$ auch ein zum Scheitelpunkte des Kegels gehörendes Primärideal μ auf. Das Ideal $\pi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ist dann das μ teilende Primideal.

Die im Kompositionsreihensatze ausgedrückte Beziehung gilt hier aber nicht, denn anderenfalls müßte das Ideal $\gamma \cdot \mathsf{P}_\pi = \mu \cdot \mathsf{P}_\pi$ im Ringe P_π zu einem Hauptideale werden: $(\lambda_1, \lambda_2) \cdot \mathsf{P}_\pi = (\alpha) \cdot \mathsf{P}_\pi$, $\alpha \subset \mathsf{P}$. Wenn das der Fall wäre, so gälte: $\beta_1 \cdot \alpha = \lambda_1 \cdot \tau_1$ und $\beta_2 \cdot \alpha = \lambda_2 \cdot \tau_2$, wobei $\beta_1, \beta_2, \tau_1, \tau_2$ Elemente aus P und τ_1, τ_2 zu π teilerfremd sind.

Im Ringe R_3 hätte man die identisch in x_1, x_2, x_3 geltenden Beziehungen

$$b_1 \cdot a = l_1 \cdot t_1 + G_1 \cdot F_1 + \ldots + G_l \cdot F_l + G_{l+1} \cdot E$$

und

$$b_2 \cdot a = l_2 \cdot t_2 + H_1 \cdot F_1 + \ldots + H_l \cdot F_l + H_{l+1} \cdot E.$$

Weil aber t_1 und t_2 von Null verschiedene Anfangsglieder haben, und weil in den Polynomen F_i, E nur Glieder mit einem Grade $\geqq l - 1 \geqq 2$ vorkommen, so müßten l_1 und l_2 derselben aus a stammenden Linearform in x_1, x_2, x_3 proportional sein; dies ist aber wegen der linearen Unabhängigkeit von l_1 und l_2 unmöglich. Das Ideal $\mu \cdot \mathsf{P}_\pi$ ist darum kein Hauptideal.

Dagegen ist es leicht zu sehen, daß im Restklassenringe R/g das aus $\mathfrak{k}$ hervorgehende Ideal $\varkappa$ einen zum Scheitelpunkte des Kegels gehörenden Primäridealteiler μ' besitzt, der im zu μ' gehörigen Punktringe zu einem Hauptideale wird.

Darum kann jetzt gesagt werden: Die in der Ebene symmetrische funktionentheoretische Definition der Schnittpunktmultiplizität in einem

[12]) Es soll fortan die folgende Bezeichnung verwendet werden: Lateinische Buchstaben bedeuten transzendente Elemente über dem Körper $\mathfrak{K}$ der komplexen Zahlen. Die entsprechenden griechischen Buchstaben stellen die aus lateinischen Buchstabenelementen hervorgehenden Restklassenelemente dar.

Schnittpunkte zweier algebraischer Kurven ist im Raume nicht durchweg symmetrisch, und daher kann sie mit der idealtheoretischen Definition nicht immer übereinstimmen[13]). Diese aber befriedigt auch nicht. Denn nach Study kann keine eine ganze Zahl als Schnittpunktmultiplizität liefernde Definition für Kurven auf einem quadratischen Kegel das „Prinzip von der Erhaltung der Anzahl“ erfüllen[14]).

§ 2.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, sollen in diesem Paragraphen zwei äußerlich sehr verschiedenartige Definitionen des singulären Punktes einer algebraischen Kurve in einem Raume von beliebiger Dimension als gleich erwiesen werden. Um zu den Definitionen selbst zu gelangen, müssen ein paar einleitende Vorbemerkungen gemacht werden.

Es sei $\mathfrak{K}$ der Körper der komplexen Zahlen. Der Ring $R = \mathfrak{K}[x_1, \ldots x_n]$, wobei x_i Unbestimmte über $\mathfrak{K}$ bedeuten, kann als arithmetisches Äquivalent des n-dimensionalen Raumes angesehen werden.

Unter der durch das Ideal $\mathfrak{r} \subset R$ definierten Mannigfaltigkeit versteht man die Menge aller Nullstellen $(a_1, \ldots, a_n)$ des Ideals $\mathfrak{r}$. Im für diese Mannigfaltigkeit charakteristischen Restklassenringe $R/\mathfrak{r}$ liegen nur solche Ideale, deren Mannigfaltigkeit in der von $\mathfrak{r}$ enthalten ist.

Als Dimension des Primideals $\mathfrak{p}$ bezeichnet man den Transzendenzgrad des zum Integritätsbereiche $R/\mathfrak{p}$ gehörenden Quotientenkörpers in bezug auf $\mathfrak{K}$. In den folgenden Zeilen sollen vornehmlich eindimensionale irreduzible algebraische Gebilde und ihre singulären Stellen betrachtet werden. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal der Dimension 1. Im Restklassenringe $R/\mathfrak{p} = \mathsf{P}$, dessen Quotientenkörper mit K bezeichnet werden möge, gilt der Doppelkettensatz mod jedem vom Nullideal verschiedenen Ideal. In P läßt sich mithin jedes Ideal eindeutig als Produkt von Primäridealen schreiben[15]).

[13]) Herr Prof. v. d. Waerden machte mich auf das folgende einfachere Beispiel, bei dessen Darstellung jedoch die Linie der allgemeinen Entwicklungen im Texte verlassen wird, aufmerksam: Auf einem quadratischen Kegel sei $\mathfrak{l}$ das Ideal einer Erzeugenden, $\mathfrak{k}$ das der Schnittkurve C des Kegels mit einer Fläche 2. Ordnung durch den Scheitelpunkt A des Kegels, die aber die Erzeugende in A nicht berührt. Die funktionentheoretische Schnittpunktmultiplizität in A ist bei Betrachtung der Kurve 4. Ordnung C als Grundkurve mindestens gleich 2, weil ja durch A 2 verschiedene Zweige von C hindurchlaufen. Die idealtheoretische Multiplizität ist aber gleich 1, weil sie höchstens gleich der gewöhnlichen Schnittpunktmultiplizität der Erzeugenden mit der Fläche 2. Ordnung ist. Denn wegen $(F, \mathfrak{l}) \subset (\mathfrak{k}, \mathfrak{l})$ gilt eine entsprechende Ungleichung auch für die zu A gehörenden Primärkomponenten von $(F, \mathfrak{l})$ und $(\mathfrak{k}, \mathfrak{l})$.

[14]) E. Study, Das Prinzip der Erhaltung der Anzahl, Leipziger Berichte 68 (1916), S. 65—92.

[15]) E. Noether, Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Annalen 83, S. 23—67.

Um einen geometrischen Zusammenhang des Ringes P mit dem zu ihm gehörenden, in seinem Quotientenkörper ganz abgeschlossenen Ringe $\overline{\mathsf{P}}$ herzustellen, soll der folgende, später sehr nützliche Hilfssatz bewiesen werden.

Hilfssatz 1: Es existieren zu den Elementen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ n in bezug auf $\mathfrak{K}$ linear äquivalente Elemente $\omega_1, \ldots, \omega_n$, so daß

a) für ω_1 Linearformen $\omega_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} d_{1i}\xi_i$ gewählt werden können, bei denen jedes der Elemente d_{1i} noch unendlich viele verschiedene Werte annehmen kann;

b) die Elemente $\omega_j = \sum\limits_{k=2}^{n} d_{jk}\xi_k$ $(2 \leqq j \leqq n)$ ganz abhängig von $\mathfrak{K}[\omega_1]$ gewählt werden können, so daß für jedes $2 \leqq j \leqq n$ gilt:

$$\mathsf{K} = \mathfrak{K}(\omega_1, \omega_j).$$

Wenn ξ_n nicht ganz abhängt von $\mathfrak{K}[\xi_{n-1}]$, so aber von

$$\mathfrak{K}[\xi'_{n-1}] = \mathfrak{K}[\xi_{n-1} - b_n\xi_n],$$

wobei b_n nur endlich vielen Elementen aus $\mathfrak{K}$ ausweichen muß. Genau so zeigt man, daß ξ'_{n-1} sicher ganz abhängt von $\mathfrak{K}[\xi_{n-2} - b_{n-1}\cdot\xi'_{n-1}]$, wo wiederum b_{n-1} von endlich vielen Elementen aus $\mathfrak{K}$ verschieden sein muß. So erhält man ein Element $\xi'_1 = \omega_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} d_{1i}\xi_i$, so daß $\xi_2, \ldots, \xi_n$ ganz abhängen von $\mathfrak{K}[\omega_1]$. Dabei kann man wirklich jedes Element d_{1i} noch auf unendlich viele Weisen wählen.

Nach dem Abelschen Satze der Körpertheorie existiert ein Element $\omega_2 = \sum\limits_{\nu=2}^{n} d_{2\nu}\xi_\nu$, so daß $\mathsf{K} = \mathfrak{K}(\omega_1, \omega_2)$ ist. Die d_{2i} $(2 \leqq i \leqq n)$ sind nur der Beschränkung unterworfen, daß eine bestimmte, mit Unbestimmten $u_{22}, \ldots, u_{2n}$ gebildete Diskriminante $F(u_{22}, \ldots, u_{2n})$ für $u_{2i} = d_{2i}$ von Null verschieden ist.

Seien in Variablenreihen u_{ik}, $\left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\}$ $2, \ldots, n$, die $(n-1)$ Polynome $F(u_{22}, \ldots, u_{2n}), \ldots, F(u_{n2}, \ldots, u_{nn})$ und die aus u_{ik} gebildete Determinante $D(u_{ik})$ aufgeschrieben, sei ferner

$$g(u_{ik}) = F(u_{2i}) \ldots F(u_{ni}) \cdot D(u_{ik}) \cdot h(u_{ik}),$$

wobei $h(u_{ik})$ ein später festzulegendes, nicht identisch verschwindendes Polynom bedeutet. Man kann aus $\mathfrak{K}$ $(n-1)^2$ Elemente d_{ik}, $\left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\}$ $2, \ldots, n$, sogar auf unendlichfache Art so wählen, daß $g(d_{ik}) \neq 0$ ist. Das heißt aber, daß die $(n-1)$ über den Ring $\mathfrak{K}[\omega_1]$ ganzen Elemente $\omega_i = \sum\limits_{k=2}^{n} d_{ik}\xi_k$ erzeugende Elemente von K über $\mathfrak{K}[\omega_1]$ sind.

Für die Struktur des Ringes $\overline{\mathsf{P}}$ ergibt sich aus Hilfssatz 1 sofort, daß jedes Ideal aus $\overline{\mathsf{P}}$ einem Produkte von Primidealpotenzen gleich ist. Es existiert außerdem ein vom Nullideal verschiedenes Führerideal $\varphi = \mathsf{P} : \overline{\mathsf{P}}$ aus P.

Seien $\pi_1, \ldots, \pi_r$ die in φ aufgehenden Primideale aus P. Es liegt nahe, die durch die Primideale π_i gegebenen Punkte der durch $\mathfrak{p}$ definierten algebraischen Kurve als singuläre Punkte zu bezeichnen. Diese Primideale haben die sie charakterisierende Eigenschaft, daß die Quotientenringe P_{π_i} nicht ganz abgeschlossen sind, weil zu π_i echte, von Primidealpotenzen verschiedene Primärideale existieren.

Eine mehr an das Anschaulich-Geometrische anknüpfende Definition der singulären Punkte einer algebraischen Raumkurve ist die folgende, bei Schmeidler und Macaulay zu findende[3])[4]). Seien

$$F^{(1)}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F^{(n-1)}(x_1, \ldots, x_n)$$

$(n-1)$ beliebige Polynome aus dem Primideal $\mathfrak{p} \subset R$. Man bilde aus den partiellen Ableitungen $F^{(k)}_{x_i}(x_1, \ldots, x_n)$ die Determinante

$$\Delta = |F^{(k)}_{x_{\nu_i}}(x_1, \ldots, x_n)|, \quad \left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} 1, \ldots, (n-1).$$

Als singuläre Punkte der durch $\mathfrak{p}$ gegebenen algebraischen Kurve bezeichnet man alle Nullstellen des Ideals $\mathfrak{a} = (\mathfrak{p}, \Delta_1, \Delta_2 \ldots)$, das aus $\mathfrak{p}$ durch Hinzufügen jeder bildbaren Determinante der Form Δ entsteht. Im Ringe P läßt sich das aus $\mathfrak{a}$ hervorgehende Ideal α als Produkt von endlich vielen Primidealen darstellen.

Über den Zusammenhang dieser beiden verschiedenen Singularitätendefinitionen läßt sich nun das einfache Resultat aussprechen:

Satz 3: Die im Schmeidlerschen Sinne singulären Punkte stimmen mit den durch die Teiler des Führers $\varphi = \mathsf{P} : \overline{\mathsf{P}}$ definierten überein.

Der Beweis soll in zwei Schritten geführt werden. Man beweist zuerst den

Hilfssatz 2: Wenn das Primideal $\pi \subset \mathsf{P}$ Teiler des Führers φ ist, so sind alle aus $(n-1)$ beliebigen im Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ gelegenen Polynomen $F^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)$ bildbaren Determinanten der Form

$$\Delta = |F^{(k)}_{x_{\nu_i}}(x_1, \ldots, x_n)|, \quad \left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} 1, \ldots, (n-1)$$

im Restklassenringe P durch π teilbar.

Durch eine Koordinatenverschiebung kann man immer erreichen, daß für das Primideal $\pi \subset \mathsf{P}$ die Darstellung gilt:

$$\pi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\omega_1, \ldots, \omega_n).$$

Wenn nun das Gegenteil der Behauptung wahr wäre, so gäbe es mindestens eine Determinante der Form $\Delta = |F^{(k)}_{w_i}|, \left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} 1, \ldots, (n-1)$, deren Restklasse im Ringe P nicht durch π teilbar wäre. Es sei:

$$(1) \quad F^{(i)} = k_{i1} \cdot w_1 + \ldots + k_{i(n-1)} \cdot w_{n-1} + k_{in} \cdot w_n + \Phi_2^{(i)}(w_1, \ldots, w_n),$$
$$i = 1, \ldots, (n-1),$$

wobei $\Phi_2^{(i)}(w_1, \ldots, w_n)$ Polynome ohne in $w_1, \ldots, w_n$ lineare Glieder sind. Es würden dann die $(n-1)$ Linearformen

$$(2) \quad t_i = k_{i1} \cdot w_1 + \ldots + k_{i(n-1)} \cdot w_{n-1}, \; i = 1, \ldots, (n-1),$$

linear unabhängig sein.

Weil nun das Primideal $\pi = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ Teiler des Führerideals φ ist, so gibt es ein zu π gehörendes echtes Primärideal $\varkappa$ mit $\pi^2 \subset \varkappa \subset \pi$ und ein Polynom $q(w_1, \ldots, w_n)$, das in $\varkappa$, aber nicht in π^2 gelegen ist. Im Ringe P könnte man aber aus (1) schließen $\tau_i \equiv -k_{in}\,\omega_n\,(\pi^2 \cdot \mathsf{P})$ für $1 \leqq i \leqq (n-1)$, um so mehr also

$$(3) \quad \tau_i \equiv -k_{in}\,\omega_n\,(\varkappa \cdot \mathsf{P}).$$

Wenn man aus den Gleichungen (2) die Elemente $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ in $q(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$ einführt und dann die Kongruenzen (3) beachtet, so hätte man:

$$q(\omega_1, \ldots, \omega_n) \equiv \bar{q}(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}, \omega_n) \equiv \bar{q}(-k_{1n}\,\omega_n, \ldots, -k_{n-1,n} \cdot \omega_n, \omega_n)$$
$$= q'(\omega_n) \equiv 0\,(\varkappa \cdot \mathsf{P}).$$

Das Polynom $q'(w_n)$ verschwindet nicht identisch in w_n, weil sonst $q(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ schon in $\pi^2 \cdot \mathsf{P}$ gelegen wäre. Wegen $q(\omega_1, \ldots, \omega_n) \subset \pi\,\mathsf{P} \not\subset \pi^2\,\mathsf{P}$ hätte man also: $q'(\omega_n) = \omega_n \cdot q_1(\omega_n)$ mit $q_1(\omega_n) \not\subset \pi \cdot \mathsf{P}$.

Es gälte darum $\omega_n \subset \varkappa$. Zusammen mit (3) ergäbe sich $\tau_i \equiv 0\,(\varkappa)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Darum wäre schon $\pi = \varkappa$.

Sei nun π' ein zum Führer $\varphi = \mathsf{P} : \bar{\mathsf{P}}$ teilerfremdes Ideal. Durch eine Koordinatenverschiebung kann man wieder erreichen, daß $\pi' = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ist. Um den noch fehlenden Teil zum Beweise des Satzes 3 auszuführen, müssen die durch Hilfssatz 1 noch in weitem Maße willkürlich wählbaren Elemente $\omega_1, \ldots, \omega_n$ noch genauer ausgesucht werden.

Hilfssatz 3: Es existieren zu den Elementen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ äquivalente Elemente $\omega_1, \ldots, \omega_n$, so daß a) und b) aus Hilfssatz 1 gelten, und weiter

c) das Element ω_1 nicht durch π'^2 teilbar ist,

d) die Elemente $\omega_2, \ldots, \omega_n$ nicht durch diejenigen Primideale $\pi^{(2)}, \ldots, \pi^{(s)}$ teilbar sind, die außer π' noch in ω_1 aufgehen.

Wegen a) von Hilfssatz 1 kann das Element ω_1 leicht so gewählt werden, daß es nicht von π'^2 geteilt wird.

Die Linearformen $u_{i2}\xi_2 + \ldots + u_{in}\xi_n$ $(2 \leqq i \leqq n)$ sind mod jedem Primideale $\pi^{(k)}$ $(2 \leqq k \leqq s)$ Linearformen L_{ik} in den Unbestimmten u_{it} gleich

mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$. Dabei ist keine Form L_{ik} identisch Null, weil sonst die Elemente $\omega_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ noch etwa durch das Primideal $\pi^{(r)} \neq \pi'$ teilbar wären, was wegen $\pi' = (\omega_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ nicht richtig ist. Man setze das Produkt aller L_{ik} gleich dem beim Beweise des Hilfssatzes 1 eingeführten Polynome $h(u_{ik})$. Dann haben die Elemente $\omega_2, \ldots, \omega_n$ die unter d) im Hilfssatz 3 angegebenen Eigenschaften. Nun kann man den folgenden Satz beweisen:

Hilfssatz 4: Wenn das Primideal $\pi' = (\omega_1, \ldots, \omega_n) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ zum Führer $\varphi = \mathsf{P} : \overline{\mathsf{P}}$ teilerfremd ist, dann existiert eine Determinante von der $(n-1)$-ten Ordnung aus partiellen Ableitungen von Polynomen $G^{(i)}(w_1, \ldots, w_n) \subset \mathfrak{p}$ derart, daß

$$D_{n-1} = |G^{(i)}_{w_{\mu_k}}(w_1, \ldots, w_n)|, \quad \begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\Big\} 1, \ldots, (n-1)$$

als Restklasse im Ringe P nicht durch das Primideal π' teilbar ist.

Der Beweis soll auf den Fall der im zweidimensionalen Raume liegenden algebraischen Kurve zurückgeführt werden.

Es sei $\mathfrak{K}[w_1, w_i]$ der Ring aller Polynome in den zwei Transzendenten w_1, w_i, und es sei $\mathfrak{p}^{(i)} \subset \mathfrak{p}$ das Ideal aller derjenigen Polynome aus $\mathfrak{p} \subset R$, die für $w_1 = \omega_1$ und $w_i = \omega_i$ Null werden. Das Ideal $\mathfrak{p}^{(i)}$ ist ein Primideal von der Dimension 1, weil ja $\mathfrak{K}[w_1, w_i]/\mathfrak{p}^{(i)} = \mathfrak{K}[\omega_1, \omega_i] = \mathsf{P}^{(i)}$ ist. Im Ringe $\mathfrak{K}[w_1, w_i]$ ist daher das Primideal $\mathfrak{p}^{(i)}$ Hauptideal: $\mathfrak{p}^{(i)} = (f^{(i)}(w_1, w_i))$. Wegen der Feststellung b) des Hilfssatzes 1 existiert ein vom Nullideal verschiedenes Führerideal $\varphi_i = \mathsf{P}^{(i)} : \overline{\mathsf{P}}$ von $\mathsf{P}^{(i)}$ zu seinem im Quotientenkörper K ganz abgeschlossenen Ringe $\overline{\mathsf{P}}$. Es soll gezeigt werden, daß das Verengungsideal von π' im Ringe $\mathsf{P}^{(i)}$, nämlich das Primideal $\pi_i = (\omega_1, \omega_i)$, teilerfremd zu φ_i ist. Dazu hat man nachzuweisen, daß der Ring $\mathsf{P}^{(i)}_{\pi_i}$ ganz abgeschlossen ist.

Zu $\mathsf{P}^{(i)}_{\pi_i}$ gehört der ganz abgeschlossene Ring $\overline{\mathsf{P}}_{\pi_i}$. In $\overline{\mathsf{P}}_{\pi_i}$ existiert aber nur ein einziges Primideal. Denn das Erweiterungsideal $\pi_i \cdot \mathsf{P}$ ist primär, weil ein von π' verschiedener Primidealteiler von $\pi_i \mathsf{P}$ insbesondere ω_1 und ω_i teilen müßte, entgegen der Feststellung aus Hilfssatz 3. Da nun $\pi' \cdot \overline{\mathsf{P}}$ wegen $(\pi', \varphi) = \mathsf{P}$ im Ringe $\overline{\mathsf{P}}$ wiederum Primideal ist, so ist auch $\pi_i \cdot \overline{\mathsf{P}}$ Primärideal aus $\overline{\mathsf{P}}$.

Zu den beiden Ringen $\mathsf{P}^{(i)}_{\pi_i}$ und $\overline{\mathsf{P}}_{\pi_i}$ ist $\varphi_i \cdot \mathsf{P}^{(i)}_{\pi_i} \neq 0$ das Führerideal. Es ist $\overline{\mathsf{P}}_{\pi_i} \subseteq \overline{\mathsf{P}}_{\pi'}$, und im ganz abgeschlossenen Ringe $\overline{\mathsf{P}}_{\pi'}$ ist $(\omega_1) \cdot \overline{\mathsf{P}}_{\pi'}$ nach Hilfssatz 3 das Primideal. Darum stellt $(\omega_1) \cdot \overline{\mathsf{P}}_{\pi_i}$ im Ringe $\overline{\mathsf{P}}_{\pi_i}$ ebenfalls das prime Hauptideal dar. Außerdem sind die Restklassenkörper $\overline{\mathsf{P}}_{\pi_i}/(\omega_1) \cdot \overline{\mathsf{P}}_{\pi_i}$ und $\mathsf{P}^{(i)}_{\pi_i}/\pi_i \cdot \mathsf{P}^{(i)}_{\pi_i}$ gleich dem Konstantenkörper $\mathfrak{K}$. Nach einem beim Beweis von Hilfssatz 7 ausgeführten Schluß stimmen

darum die Ringe $\mathsf{P}^{(i)}_{\pi_i}$ und $\overline{\mathsf{P}}_{\pi_i}$ überein. Das Ideal π_i ist daher wirklich teilerfremd zu φ_i.

Man kann nun zeigen, daß das Element $f^{(i)}_{w_i}(\omega_1, \omega_i)$ durch das Ideal $\pi_i \cdot \mathsf{P}$ unteilbar ist. Wenn das nämlich nicht der Fall wäre, so müßte

$$f^{(i)}(w_1, w_i) = w_1 \cdot f^{(i)}_{w_1}(0,0) + \varphi_r(w_1, w_i) + \ldots + \varphi_t(w_1, w_i)$$

sein, wobei $\varphi_r(w_1, w_i), \ldots, \varphi_t(w_1, w_i)$ homogene Polynome in w_1, w_i von den Dimensionen $2 \leqq r < \ldots < t$ bedeuten, und man hätte im Ringe $\mathsf{P}^{(i)}$ entweder $\omega_1 \equiv 0\,(\pi_i^2 \cdot \mathsf{P}^{(i)})$ und somit im Ringe P: $\omega_1 \equiv 0\,(\pi'^2 \cdot \mathsf{P})$ (falls $f^{(i)}_{w_1}(0,0) \neq 0$), was entgegen Konstruktion von ω_1 ist, oder aber $\varphi_r(\omega_1, \omega_i) \equiv 0\,(\pi_i^{r+1})$ (falls $f^{(i)}_{w_1}(0,0) = 0$). $\varphi_r(\omega_1, \omega_i) \equiv 0\,(\pi_i^{r+1})$ zöge nach sich: $g_1\omega_1 + g_2\omega_2 \equiv 0\,(\pi_i^2)$ für mindestens eine in $\varphi_r(\omega_1, \omega_i)$ aufgehende Linearform (g_1, g_2 Elemente aus $\mathfrak{K}$). Im Ringe $\mathfrak{K}[w_1, w_i]$ gälte alsdann: $g_1 w_1 + g_i w_i = P_2(w_1, w_i) + (\varphi_r + \ldots + \varphi_t)\cdot h$, wobei $P_2(w_1, w_i)$ ein Polynom in w_1, w_i darstellt, in dem jedes Glied einen Grad $\geqq 2$ hat. Diese Gleichung ist aber wegen $2 \leqq r < \ldots < t$ unmöglich.

Es gilt also für $i = 2, \ldots, n$ jeweils ein Polynom

$$G^{(i)}(w_1, \ldots, w_n) = f^{(i)}(w_1, w_i),$$

für das $f^{(i)} \subset \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}$, $f^{(i)}_{w_i} \not\subset \mathfrak{p}$ ist, und die Determinante

$$D_{n-1} = \left|G^{(i)}_{w_k}(w_1, \ldots, w_n)\right|_{\substack{i \\ k}\big\} 2, \ldots, n} = \begin{vmatrix} f^{(2)}_{w_2}(w_1, w_2), & 0, & \ldots \\ 0, & f^{(3)}_{w_3}(w_1, w_3), & \ldots \\ \vdots & & \ddots \\ \vdots & \ldots & f^{(n)}_{w_n}(w_1, w_n) \end{vmatrix}$$
$$= f^{(2)}_{w_2}(w_1, w_2) \ldots f^{(n)}_{w_n}(w_1, w_n)$$

ist im Ringe P nicht durch das Primideal $\pi = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ teilbar.

Damit ist die Äquivalenz der auf den Begriff der algebraischen Abgeschlossenheit gegründeten Singularitätendefinition mit derjenigen, die sich auf das Macaulay-Schmeidlersche Singularitätenideal stützt, für eindimensionale Gebilde vollständig bewiesen. Eine unmittelbare Folge des Satzes 3 ist die Bemerkung, daß eine algebraische Kurve dann und nur dann nach den beiden angeführten Definitionen singularitätenfrei ist, wenn der zugehörige Restklassenring in seinem Quotientenkörper ganz abgeschlossen ist.

§ 3.

Sei $\mathfrak{K}[w_1, \ldots, w_n]$ der für den n-dimensionalen affinen Raum charakteristische Ring, $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus ihm von der Dimension 1. Sei $\mathsf{P} = \mathfrak{K}[w_1, \ldots, w_n]/\mathfrak{p}$ der Restklassenring der durch die Nullstellen von $\mathfrak{p}$ definierten algebraischen Kurve, $\overline{\mathsf{P}}$ sein zu ihm gehörender ganz abgeschlossener Ring.

Es soll im folgenden unter allgemeinen abstrakten Voraussetzungen gezeigt werden, daß $\overline{\mathsf{P}}$ einfache Erweiterung von P ist: $\overline{\mathsf{P}} = \mathsf{P}[\overline{\omega}_{n+1}]$. Welche Bedeutung hat nun dieser Satz für die Auflösung der Singularitäten der durch $\mathfrak{p}$ definierten Mannigfaltigkeit?

Wenn man im Ringe $\mathfrak{K}[w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}]$ alle diejenigen Polynome betrachtet, die für $w_i = \omega_i$, $1 \leqq i \leqq n$, $w_{i+1} = \overline{\omega}_{i+1}$ Null werden, so bilden sie ein Primideal $\mathfrak{p}'$ von der Dimension 1, weil $\overline{\mathsf{P}} = \mathfrak{K}[w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}]/\mathfrak{p}'$ ist. Die zum Primideal $\mathfrak{p}'$ gehörende algebraische Kurve im $(n+1)$-dimensionalen Raume besitzt keine singulären Punkte.

Um einen Zusammenhang herzustellen zwischen den Punkten der im n-dimensionalen Raume gelegenen Kurve und denen der im $(n+1)$-dimensionalen Raume durch die Nullstellen von $\mathfrak{p}'$ gegebenen, bedenke man das Folgende: Wenn $\pi = (w_1 - c_1, \ldots, \omega_n - c_n)$ ein zum Führer $\varphi = \mathsf{P} : \overline{\mathsf{P}}$ teilerfremdes Primideal aus P ist, so ist ja $\pi \overline{\mathsf{P}}$ in $\overline{\mathsf{P}}$ ebenfalls Primideal. Weil aber $\mathsf{P}/\pi = \overline{\mathsf{P}}/\pi\overline{\mathsf{P}} = \mathfrak{K}$ ist, so gilt: $\overline{\omega}_{n+1} \equiv c_{n+1}(\pi\overline{\mathsf{P}})$, $c_{n+1} \subset \mathfrak{K}$. Durch die Zuordnung der beiden Primideale $\pi \cdot \mathsf{P}$ und $\pi \cdot \overline{\mathsf{P}}$ kann man jedem regulären Punkte der Ausgangskurve einen regulären Punkt der im $(n+1)$-dimensionalen Raume gelegenen Kurve zuordnen.

Wenn aber das Primideal $\pi = (\omega_1 - d_1, \ldots, \pi_n - d_n)$ den Führer φ teilt, so seien die Primideale $\overline{\pi}_1, \ldots, \overline{\pi}_t$ $(t \geqq 1)$ die Primidealteiler von $\pi\overline{\mathsf{P}}$ in $\overline{\mathsf{P}}$. Weil die Restklassenkörper P/π und $\overline{\mathsf{P}}/\overline{\pi}_i$ gleich $\mathfrak{K}$ sind, so hat man wie vorhin:

$$\overline{\omega}_{n+1} \equiv d^{(i)}_{n+1}(\overline{\pi}_i\overline{\mathsf{P}}),\ d^{(i)}_{n+1} \subset \mathfrak{K}.$$

Das Ideal $(\omega_1 - d_1, \ldots, \omega_n - d_n, \overline{\omega}_{n+1} - d^{(i)}_{n+1})$ ist Primideal und in $\overline{\pi}_i$ enthalten. Mithin gilt:

$$\overline{\pi}_i = (\omega_1 - d_1, \ldots, \omega_n - d_n, \overline{\omega}_{n+1} - d^{(i)}_{n+1}).$$

Da aber die Primideale $\overline{\pi}_i$ im Ringe $\overline{\mathsf{P}}$ zueinander teilerfremd sind, so ist für $i \neq k$: $d^{(i)}_{n+1} \neq d^{(k)}_{n+1}$. Jedem singulären Punkte der Ausgangskurve entsprechen daher mehrere verschiedene reguläre Punkte der im $(n+1)$-dimensionalen Raume gelegenen Kurve. Man kann diesem Tatbestand der Auflösung der Singularitäten noch durch die folgende Formulierung eine bekannte Form geben.

Satz 4: Es existiert im $(n+1)$-dimensionalen affinen Raume eine algebraische Kurve ohne Singularitäten, deren Projektion in den gegebenen linearen n-dimensionalen affinen Unterraum mit der vorgelegten Kurve übereinstimmt[5]).

Aus dem Satze 6 ergibt sich noch, daß man schon in einem 3-dimensionalen affinen Raume eine singularitätenfreie Kurve angeben kann, deren Projektion in einen passend gewählten 2-dimensionalen linearen

Unterraum übereinstimmt mit der Projektion der im n-dimensionalen Raume liegenden Kurve in diesen Unterraum.

Satz 5: Eine im n-dimensionalen affinen Raume gelegene algebraische Kurve ist birational äquivalent mit einer im 3-dimensionalen affinen Raume liegenden singularitätenfreien Kurve.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die Gleichung $\overline{\mathsf{P}} = \mathsf{P}[\overline{\omega}_{n+1}]$ wirklich zu beweisen. Es soll dabei mit den folgenden abstrakten Voraussetzungen gearbeitet werden:

Es sei T ein Ring mit einem Einheitselement und ohne Nullteiler, in dem sich jedes Ideal $\mathfrak{a}$ eindeutig als Produkt von endlich vielen Primäridealen darstellen läßt. Der zu T gehörige ganz abgeschlossene Ring, also der Ring aller T-ganzen Elemente aus dem Quotientenkörper von T werde mit $\overline{\mathsf{T}}$ bezeichnet. In $\overline{\mathsf{T}}$ lasse sich jedes Ideal eindeutig als Produkt endlich vieler Primidealpotenzen schreiben. Das Führerideal $\mathfrak{f} = \mathsf{T} : \overline{\mathsf{T}}$, das aus allen Elementen $a \subset \mathsf{T}$ mit $a \cdot \overline{\mathsf{T}} \subset \mathsf{T}$ besteht, sei ein vom Nullideal verschiedenes Ideal aus T. Man weiß, daß nur zu den Primidealteilern $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t$ des Führers $\mathfrak{f}$ in T echte Primärideale gehören. Der Restklassenkörper $\overline{\mathsf{T}}/\overline{\mathfrak{p}}$, $\overline{\mathfrak{p}}$ Primideal aus $\overline{\mathsf{T}}$, sei eine endliche, separable Erweiterung des Körpers $\mathsf{T}/\mathfrak{p}$, wobei $\mathfrak{p} = \mathsf{T} \frown \overline{\mathfrak{p}}$ gesetzt ist. $\mathsf{T}/\mathfrak{p}$ enthalte für $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{f}$ unendlich viele Elemente. — Es soll dann der Satz bewiesen werden:

Satz 6: Es existiert ein Element $\overline{\mathsf{A}}$ in $\overline{\mathsf{T}}$, so daß $\overline{\mathsf{T}} = \mathsf{T}[\overline{\mathsf{A}}]$ ist.

Zum Beweise dieses Satzes sollen einige Vorbemerkungen und Hilfssätze vorausgeschickt werden.

Es sei $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{f}$ ein Primideal aus T, für das in $\overline{\mathsf{T}}$ die Zerlegung $\mathfrak{p} \cdot \overline{\mathsf{T}} = \overline{\mathfrak{p}}_1^{\varrho_1} \ldots \overline{\mathfrak{p}}_r^{\varrho_r}$ gilt. Wie aus der Voraussetzung folgt, existieren r Elemente $\overline{\omega}_1', \ldots, \overline{\omega}'$ und r Polynome $Q_1(x), \ldots, Q_r(x)$ niedrigsten Grades mit Koeffizienten aus T, so daß durch die Adjunktion der durch das Element $\overline{\omega}_i'$ mod $\overline{\mathfrak{p}}_i$ in $\overline{\mathsf{T}}$ gegebenen Restklasse zum Restklassenkörper $\mathsf{T}/\mathfrak{p}$ gerade der Körper $\overline{\mathsf{T}}/\overline{\mathfrak{p}}_i$ entsteht und daß $Q_i(\overline{\omega}_i') \equiv 0(\overline{\mathfrak{p}}_i) \not\equiv 0(\overline{\mathfrak{p}}_i^2)$ für $1 \leqq i \leqq r$ ist. Die letzte Beziehung ergibt sich aus einer geläufigen Schlußweise.

Hilfssatz 5: Es existieren r Elemente $\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_r$ als Repräsentanten für die erzeugenden Elemente der Restklassenkörper $\overline{\mathsf{T}}/\overline{\mathfrak{p}}_i$ $(1 \leqq i \leqq r)$ über dem Körper $\mathsf{T}/\mathfrak{p}$ und r dazugehörige Polynome $P_i(x)$ niedrigsten Grades mit Koeffizienten aus T, so daß gilt:

$$P_i(\overline{\omega}_i) \equiv 0(\overline{\mathfrak{p}}_i) \not\equiv 0(\overline{\mathfrak{p}}_i^2), \quad P_i(\overline{\omega}_r) \not\equiv 0(\overline{\mathfrak{p}}_k) \quad \text{für alle} \quad k \neq i.$$

Zum Beweise dieses Hilfssatzes bedenke man, daß mit $\overline{\omega}_l'$ auch $\overline{\omega}_l' + \varepsilon$, ε beliebig aus dem Ringe T, erzeugendes Element des Restklassenkörpers $\overline{\mathsf{T}}/\overline{\mathfrak{p}}_i$ über dem Körper $\mathsf{T}/\mathfrak{p}$ ist.

Weil nach Voraussetzung unendlich viele mod $\mathfrak{p}$ inkongruente Elemente aus T existieren, so gibt es unendlich viele ε_i, $i = 1, 2, \ldots$, mit $Q_2(\bar{\omega}_1' + \varepsilon_i) \not\equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_1)$. Die Elemente $Q_1(\bar{\omega}_2' - \varepsilon_\mu)$, $\mu = 1, 2, \ldots$. können nicht für alle μ durch $\bar{\mathfrak{p}}_2$ teilbar sein. Es gibt daher ein ε_m, so daß $Q_1(\bar{\omega}_2' - \varepsilon_m) \not\equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_2)$ ist.

Die Elemente $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_1'$ und $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_2' - \varepsilon_m$ sind Repräsentanten für erzeugende Elemente der Körper $\bar{\mathsf{T}}/\bar{\mathfrak{p}}_1$ und $\bar{\mathsf{T}}/\bar{\mathfrak{p}}_2$ über $\mathsf{T}/\mathfrak{p}$ mit den zugehörigen Polynomen $P_1(x) = Q_1(x)$ und $P_2(x) = Q_2(x + \varepsilon_m)$, für welche gilt:

$$P_1(\bar{\omega}_1) \equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_1) \not\equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_1^2), \quad P_1(\bar{\omega}_2) \not\equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_2),$$
$$P_2(\bar{\omega}_2) \equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_2) \not\equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_2^2), \quad P_2(\bar{\omega}_1) \not\equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_1).$$

Der Beweis gelingt nun durch einen Induktionsschluß: Sei nämlich bis zum Index $s < r$ nachgewiesen, daß $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_s$ erzeugende Elemente der Körper $\bar{\mathsf{T}}/\bar{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \bar{\mathsf{T}}/\bar{\mathfrak{p}}_s$ über dem Körper $\mathsf{T}/\mathfrak{p}$ sind mit den zugehörigen Polynomen $P_1(x), \ldots, P_s(x)$, so daß:

$$P_i(\bar{\omega}_i) \equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_i) \not\equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_i^2); \quad P_i(\bar{\omega}_k) \not\equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_k) \quad (i \neq k,\ i, k \leqq s).$$

Seien $Q_{s+1}(x)$ und $\bar{\omega}_{s+1}'$ Polynom und erzeugendes Element für den Index $s + 1$. Wie vorhin schließt man auf unendlich viele mod $\mathfrak{p}$ inkongruente Elemente $\varepsilon \subset \mathsf{T}$, so daß für jedes $1 \leqq i \leqq s$ gilt:

$$Q_{s+1}(\bar{\omega}_i + \varepsilon) \not\equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_i).$$

Aber nur für endlich viele solche ε können die Kongruenzen

$$P_l(\bar{\omega}_{s+1}' - \varepsilon) \equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_{s+1}) \qquad (1 \leqq l \leqq s)$$

erfüllt sein. Es gibt daher sicher ein ε_{s+1}, für das die Elemente $P_l(\bar{\omega}_{s+1}' - \varepsilon_{s+1})$ $(1 \leqq l \leqq s)$ nicht durch $\bar{\mathfrak{p}}_{s+1}$ teilbar sind. Es ist $\bar{\omega}_{s+1} = \bar{\omega}_{s+1}' - \varepsilon_{s+1}$ erzeugendes Element des Körpers $\bar{\mathsf{T}}/\bar{\mathfrak{p}}_{s+1}$ über $\mathsf{T}/\mathfrak{p}$ mit $P_{s+1}(x) = Q_{s+1}(x + \varepsilon_{s+1})$ als zugehörigem Polynom, für das gilt:

$$P_{s+1}(\bar{\omega}_{s+1}) \equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_{s+1}) \not\equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_{s+1}^2),$$
$$P_{s+1}(\bar{\omega}_i) \not\equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_i) \quad \text{für } 1 \leqq i \leqq s,$$
$$P_l(\bar{\omega}_{s+1}) \not\equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_{s+1}) \quad \text{für } 1 \leqq l \leqq s.$$

Damit ist der vorstehende Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 6: Es existiert ein $\bar{\Omega} \subset \bar{\mathsf{T}}$, so daß gilt:

$$P_i(\bar{\Omega}) \equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_i) \not\equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_i^2) \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

$$P_i(\bar{\Omega}) \not\equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_k),\ 1 \leqq {i \atop k} \leqq n, \quad i \neq k$$

und daß

$$\bar{\mathsf{T}}/\bar{\mathfrak{p}}_i = \mathsf{T}/\mathfrak{p}(\bar{\Omega})$$

ist für alle i mit $1 \leqq i \leqq n$.

Da die Ideale $\bar{a}_i = \bar{p}_1^2 \ldots \bar{p}_{i-1}^2 \cdot \bar{p}_{i+1}^2 \ldots \bar{p}_n^2$ $(1 \leqq i \leqq n)$ zueinander teilerfremd sind, so gibt es Elemente $\bar{c}_i \subset \bar{T}$ mit $\bar{c}_1 + \ldots + \bar{c}_n = 1$. Das Element $\bar{\Omega} = \bar{c}_1 \bar{\omega}_1 + \ldots + \bar{c}_n \bar{\omega}_n$ ist dann das gesuchte.

Es ist nämlich $\bar{\Omega} \equiv \bar{\omega}_i (\bar{p}_i^2)$ und somit $P_i(\bar{\Omega}) \equiv P_i(\bar{\omega}_i) \equiv 0(\bar{p}_i)$ und $\neq 0(\bar{p}_i^2)$. Aus $P_i(\bar{\Omega}) \equiv 0(\bar{p}_k)$ $(i \neq k)$ folgte aber $P_i(\bar{\omega}_k) \equiv 0(\bar{p}_k)$, entgegen dem Hilfssatz 5.

Hilfssatz 7: Der Ring $T'_p = T_p[\bar{\Omega}]$ ist der zu T_p gehörende ganz abgeschlossene Ring.

Der Durchschnitt der t Primideale $\bar{p}_1 \cdot \bar{T}_p, \ldots, \bar{p}_t \cdot \bar{T}_p$ im zu T_p gehörigen ganz abgeschlossenen Ringe $\bar{T}_p$ mit dem Ringe $T'_p \subset \bar{T}_p$ liefert t voneinander verschiedene Primideale $p'_1, \ldots, p'_t$ in T'_p. Wenn nämlich für $l \neq k$ $p'_l = p'_k$ wäre, dann müßte wegen

$$P_l(\bar{\Omega}) \equiv 0(p'_l T'_p) \quad \text{auch} \quad P_l(\bar{\Omega}) \equiv 0(p'_k T'_p)$$

sein. Das ergäbe

$$P_l(\bar{\Omega}) \equiv 0(\bar{p}_k \bar{T}_p)$$

und die falsche Kongruenz

$$P_l(\bar{\Omega}) \equiv 0(\bar{p}_k \bar{T}).$$

Wenn nun der Ring T'_p nicht ganz abgeschlossen wäre, mithin eines der Primideale p'_l nicht umkehrbar wäre, so betrachte man die dann voneinander verschiedenen Quotientenringe $(T'_p)_{p'_l}$ und $(\bar{T}_p)_{p'_l}$.

Nach Voraussetzung ist $f = T : \bar{T}$ das Führerideal von T nach $\bar{T}$ und somit $f \cdot T_p \neq 0$ das Führerideal von T_p nach $\bar{T}_p$. In dem zu $(T'_p)_{p'_l}$ gehörenden ganz abgeschlossenen Ringe $(\bar{T}_p)_{p'_l}$ existiert aber nur ein einziges Primideal, das nach Satz 1 Hauptideal und zwar gleich $(P_l(\bar{\Omega}))$ ist. Der Führer $g \cdot (T'_p)_{p'_l} = (T'_p)_{p'_l} : (\bar{T}_p)_{p'_l}$ ist aber wegen $g \cdot (T'_p)_{p'_l} \supseteqq f \cdot (T'_p)_{p'_l}$ vom Nullideal verschieden.

Aus dem Hilfssatz 6 ergibt sich aber, daß sich jedes Element $\bar{a} \subset (\bar{T}_p)_{p'_l}$ so darstellen läßt:

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon}_\nu \cdot (P_l(\bar{\Omega}))^\nu = H_\nu(\bar{\Omega}) \cdot (P_l(\bar{\Omega}))^\nu + \bar{\varepsilon}_{\nu+1} \cdot (P_l(\bar{\Omega}))^{\nu+1},$$

wobei $\bar{\varepsilon}_\nu, \bar{\varepsilon}_{\nu+1}$ Elemente aus $(\bar{T}_p)_{p'_l}$ bedeuten und $H_\nu(\bar{\Omega})$ ein Polynom in $\bar{\Omega}$ mit Koeffizienten aus T ist, für welches gilt:

$$H_\nu(\bar{\Omega}) \equiv \bar{\varepsilon}_{\nu+1}(P_l(\bar{\Omega}) \cdot (\bar{T}_p)_{p'_l}).$$

Wenn man diesen Entwicklungsprozeß fortsetzt, so bekommt man:

$$\bar{a} = \sum_{t=\nu}^{N} H_t(\bar{\Omega}) \cdot P_t(\bar{\Omega}) + \bar{\varepsilon}_{N+1} \cdot P_l(\bar{\Omega})^{N+1},$$

wobei $N > \nu$ noch beliebig gewählt werden kann und $H_t(\bar{\Omega}) \subset (T'_p)_{p'_l}$ und $\bar{\varepsilon}_{N+1} \subset (\bar{T}_p)_{p'_l}$. Der erste Term ist ein Element aus dem Ringe $(T'_p)_{p'_l}$,

der zweite liegt für genügend großes N im Führerideal $\mathfrak{g}\cdot(T'_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}'_i}$. Mithin gilt: $\bar{a} \subset (T'_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}'_i}$ und $(T'_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}'_i} = (\overline{T}_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}'_i}$ und der Ring $(T'_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}'_i}$ ist ganz abgeschlossen. Das Ideal $\mathfrak{p}'_i$ ist daher umkehrbar, $T'_{\mathfrak{p}}$ also nach Satz 1 Hauptidealring und somit ganz abgeschlossen.

Für jedes der im Führer $\mathfrak{f} = T : \overline{T}$ aufgehenden Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t \subset T$ existieren T-ganze Elemente $\overline{\Omega}_1, \ldots, \overline{\Omega}_t$, die die zugehörigen Quotientenringe $T_{\mathfrak{p}_1}, \ldots, T_{\mathfrak{p}_t}$ ganz abschließen. Da die Ideale $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{p}_1^s \ldots \mathfrak{p}_{i-1}^s \cdot \mathfrak{p}_{i+1}^s \ldots \mathfrak{p}_t^s$ $(1 \leqq i \leqq t)$ in T zueinander teilerfremd sind, so gibt es $d_i \subset \mathfrak{a}_i$ mit $d_1 + \ldots + d_t = 1$. Man bilde das Element $\overline{A} = d_1 \cdot \overline{\Omega}_1 + \ldots + d_t \cdot \overline{\Omega}_t$.

Satz 6: Der Ring $T[\overline{A}]$ ist gleich dem Ringe $\overline{T}$.

Wegen $\overline{A} \equiv \overline{\Omega}_l(\mathfrak{p}_l^s \overline{T}_{\mathfrak{p}_l})$ hat $\overline{A}$ alle die in dem Hilfssatz 6 ausgesprochenen Eigenschaften, die $T_{\mathfrak{p}}[\overline{A}]$ für $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{f}$ als ganz abgeschlossen erkennen lassen. Die Ringe $T_{\mathfrak{p}}$ für $(\mathfrak{p}, \mathfrak{f}) = T$ sind aber schon ganz abgeschlossen, um so mehr also die Ringe $T_{\mathfrak{p}}[\overline{A}] = T_{\mathfrak{p}}$.

Der Durchschnitt der Ringe $T_{\mathfrak{p}}[\overline{A}]$ ist nun der Ring $T[\overline{A}]$. Denn für ein Element φ im Durchschnitt gibt es ein zu $\mathfrak{p} \subset T$ teilerfremdes $a \subset T$, so daß $a \cdot \varphi \subset T[\overline{A}]$ ist. $\mathfrak{p}_{\mu_1}, \ldots, \mathfrak{p}_{\mu_m}$ seien die Primidealteiler von $(a)\cdot T$. Für ein zu $\mathfrak{p}_{\mu_i}$ teilerfremdes b_i gilt aber auch: $b_i \cdot \varphi \subset T[\overline{A}]$. Daraus folgt $T\cdot(a, b_1, \ldots, b_m)\cdot \varphi \subset T[\overline{A}]$ oder aber $T \cdot \varphi \subset T[\overline{A}]$ und $\varphi \subset T[\overline{A}]$. Da aber der Durchschnitt von in demselben Quotientenkörper ganz abgeschlossenen Ringen wieder ganz abgeschlossen ist, so gilt wegen $T \subset T[\overline{A}] \subseteqq \overline{T}$ sogar $T[\overline{A}] = \overline{T}$.

(Eingegangen am 30. 10. 1934.)

Separable systems in classical and wave mechanics.

Von

B. S. Madhava Rao in Bangalore (Indien).

1. Introduction.

The problem of integration of the classical Hamilton-Jacobi equation has been solved by the researches of Stäckel[1]), Levi-Civita[2]), Burgatti[3]) and Dall'Acqua[4]). Of the types where such separation is possible, the two most important are Stäckel's case and Levi-Civita's "essentially geodetic" case. Coming now to the question of solution of Schrödinger's wave equation which corresponds to the classical H-J [4a]) equation, it is well-known, as pointed out by Brillouin[5]), that separability of the latter does not necessarily imply that of the former. Some general separable types of the wave equation including a large number of cases met with in physical problems have also been given by Brillouin[6]). In the case where the H-J equation is separable under Stäckel's theorem, it has further been shown by Robertson[7]) that the separability of the corresponding wave equation involves an additional condition in the form of a functional identity.

I propose in this paper to give an alternative derivation of Robertson's condition by making use of the methods of Burgatti and Dall'Acqua and show that all the types given by Brillouin come under Stäckel's case and satisfy Robertson's condition. It is also shown that this condition is identically satisfied in the case of two degrees of freedom. An example is then constructed of a wave equation which is separable under Robertson's condition but does not come under Brillouin's types. I further prove that when the H-J equation is separable under Levi-Civita's geodetic case, the corresponding wave equation cannot be solved, except in trivial special cases, by separation of variables.

---

1) P. Stäckel, Math. Annalen 42 (1893), S. 537.

2) T. Levi-Civita, Math. Annalen 59 (1904), S. 383.

3) P. Burgatti, Rom. Acc. Linc. Rend. (5) 20 (1911), p. 108.

4) F. A. Dall'Acqua, Math. Annalen 66 (1909), S. 398 and also Rend. Circ. Mat. Pal. 33 (1912), p. 341.

4a) H-J = Hamilton-Jacobi.

5) L. Brillouin, C. R. 183 (1926), p. 24.

6) Le Journ. d. Phys. et le Radium 7 (1926), p. 353.

7) H. P. Robertson, Math. Annalen 98 (1928), S. 749.

2. Robertson's condition for the Stäckel type.

Let us consider a mechanical system whose Hamiltonian is describable in terms of canonical co-ordinates and momenta and does not contain the time explicitly. Since there is no loss of generality, we might well consider the case of a single particle and put its mass equal to unity. Let the line element in the generalised q-co-ordinate space be given by

$$d s^2 = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} g_{rs}\, d q_r\, d q_s, \qquad (g_{rs} = g_{sr})$$

and let g denote the determinant formed by the g_{rs} and let $D = \sqrt{|g|}$. The elements of the determinant reciprocal to g are represented by the coefficients of inertia g^{rs} in the usual notation. The kinetic energy can be represented by

$$2\,T = \Sigma\, \Sigma\, g_{rs}\, \dot{q}_r\, \dot{q}_s$$

or, in the reciprocal form,

$$2\,K = \Sigma\, \Sigma\, g^{rs}\, p_r\, p_s$$

and the classical H-J equation can be written as

$$H = \tfrac{1}{2}\, \Sigma\, \Sigma\, g^{rs}\, p_r\, p_s + V = E \tag{1}$$

where V is a function of the co-ordinates only. In the case where (1) is separable under Stäckel's theorem we have $g^{rs} = 0\,(r \neq s)$ i. e. $g_{rs} = 0$ $(r \neq s)$ and it is possible to find a set of n^2 functions $\varphi_{ij}(q_i)$ and another set of n functions $\chi_i(q_i)$ such that

$$g^{rr} = \varphi^{r1}$$

and,

$$V = \sum_r \varphi^{r1}\, \chi_r(q_r)$$

where φ^{ij} is the general element of the determinant reciprocal to the determinant $\varphi = |\varphi_{ij}|$. The solution by separation of equation (1) then consists, according to Burgatti and Dall'Acqua[8]), of the system of equations

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\, p_r^2 &= \alpha_1\, \varphi_{r1} + \alpha_2\, \varphi_{r2} + \dots + \alpha_{n-1}\, \varphi_{r,n-1} + E\, \varphi_{rn} - \chi_r \\ &= \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j\, \varphi_{rj}) - \chi_r; \quad (r = 1, 2, \dots, n;\ E = \alpha_n) \end{aligned} \tag{2}$$

such that the elimination of the arbitrary constants $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ between the equations (2) leads to a separable H-J equation.

Considered from the point of view of wave mechanics, equations (2) are to be treated as equations in operators operating on a wave function ψ and it is evident that when the Schrödinger equation corresponding to (1) is separable by writing $\psi = \psi_1\, \psi_2 \cdots \psi_n$, the results of these operations will be ordinary differential equations for the different ψ_r's.

---

[8]) F. A. Dall'Acqua, Reference [4]); see § 17 of the Pal. Rend. paper cited.

By finding the correct form for the operator p_r^2, I proceed to show that the separation of the wave equation involves the additional condition due to Robertson.

By writing Schrödinger's wave equation in the form

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi + 2k^2(E - V)\psi = 0 \qquad (k = 1/\hbar)$$

and working out the vectorial operators, divergence and gradient in the curved space, we obtain

$$\sum\sum \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial q_r}\left(D g^{rs}\frac{\partial\psi}{\partial q_s}\right) + 2k^2(E - V)\psi = 0 \tag{3}$$

and the density function is given by

$$P = D\psi\psi^*.$$

An operator F is Hermitian when

$$\int D\,\psi^*(F\psi)\,dq = \int D(F\psi)^*\,\psi\,dq$$

and the momentum-operator p_r is to be Hermitian in this sense and should satisfy the commutation condition

$$p_r q_r - q_r p_r = \frac{\hbar}{i}.$$

We can therefore write [9])

$$p_r\psi = \frac{\hbar}{i}\frac{1}{\sqrt{D}}\frac{\partial}{\partial q_r}(\sqrt{D}\,\psi). \tag{4}$$

It is to be observed that equation (3) can also be immediately obtained from (1) if we write the latter in the correct form from the point of view of quantum mechanics. Such a form is well-known [10]) to be

$$H = \frac{1}{2}\sum\sum \frac{1}{\sqrt{D}}\,p_r D g^{rs} p_s \frac{1}{\sqrt{D}} + V = E. \tag{5}$$

If we now substitute in (5) the values for the operators p_r and p_s as given by (4) we get the wave equation in the form (3). We can now deduce from (5) the correct form for the operator p_r^2. Since

$$g^{rs}p_r p_s \text{ is to be replaced by } \frac{1}{\sqrt{D}}\,p_r D g^{rs} p_s \frac{1}{\sqrt{D}},$$

it follows that $p_r p_s = (g^{rs})^{-1} g^{rs} p_r p_s$ is to be replaced by

$$-\frac{1}{k^2}(g^{rs})^{-1}\frac{1}{\sqrt{D}}\frac{1}{\sqrt{D}}\frac{\partial}{\partial q_r}\sqrt{D}\,D g^{rs}\frac{1}{\sqrt{D}}\frac{\partial}{\partial q_s}\sqrt{D}\frac{1}{\sqrt{D}}$$
$$= -\frac{1}{k^2}(g^{rs})^{-1}\frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial q_r}D g^{rs}\frac{\partial}{\partial q_s}.$$

---

[9]) See W. Pauli, Handbuch der Phys. (Geiger-Scheel), 2te Aufl. (1933) **24** [1], Kap. 2, Ziff. 5, S. 120.

[10]) See B. Podolsky, Phys. Rev. **32** (1928), p. 812.

Hence,

$$p_r^2 = -\frac{1}{k^2}\frac{1}{g^{rr}}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_r}\sqrt{g}\,g^{rr}\frac{\partial}{\partial q_r}$$

and equations (2) can be written as

$$-\frac{1}{2k^2}\frac{1}{\sqrt{g}\,g^{rr}}\frac{\partial}{\partial q_r}\left(\sqrt{g}\,g^{rr}\frac{\partial}{\partial q_r}\right) = \sum_{j=1}^{n}(\alpha_j\varphi_{rj}) - \chi_r \quad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

If equation (3) is to be separable by putting

$$\psi = \psi_1\psi_2\cdots\psi_n$$

we should be able to operate, with both sides of the equation obtained above, on the wave function ψ_r. Hence

$$\text{(6)} \qquad \frac{1}{\sqrt{g}\,g^{rr}}\frac{\partial}{\partial q_r}\left(\sqrt{g}\,g^{rr}\frac{\partial\psi_r}{\partial q_r}\right) + 2k^2\left[\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j\varphi_{rj}) - \chi_r\right]\psi_r = 0.$$

Further in order that these be ordinary differential equations enabling the solution of the wave equation by separation, we should have

$$\frac{1}{\sqrt{g}\,g^{rr}}\frac{\partial}{\partial q_r}(\sqrt{g}\,g^{rr}) = \text{function of } q_r \text{ alone,}$$

i. e.,

$$\frac{\partial}{\partial q_r}\{\log(\sqrt{g}\,g^{rr})\} = \text{function of } q_r \text{ alone.}$$

Assuming that the coefficients of inertia satisfy Stäckel's condition[11]), we can write $g^{rr} = \varphi^{r1}$ and the above condition reduces to

$$\varphi^{r1} = \frac{1}{\sqrt{g}}a_r F_r(q_r) \text{ where } a_r \text{ is independent of } q_r$$

i. e.,

$$\varphi\varphi^{r1} = \frac{1}{\sqrt{g}}\varphi a_r F_r.$$

But $\varphi\varphi^{r1}$ is the minor of φ_{r1} in the determinant φ and hence independent of q_r. Thus

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\varphi = \frac{b_r}{a_r}\frac{1}{F_r}, \quad b_r \text{ having the same significance as } a_r.$$

Since this condition must be true for all the co-ordinates $q_1\ldots q_n$, we should have

$$\text{(7)} \qquad \frac{1}{\sqrt{g}}\varphi = \prod_r\left(\frac{1}{F_r}\right)$$

which is exactly the condition obtained by Robertson.

---

[11]) This is equivalent to assuming that when the wave equation is separable the same is true of the H-J equation, a statement which can easily be justified on general grounds.

Equations (6) now reduce to

$$F_r \frac{d\,\psi_r}{d\,q_r} + \frac{d^2\,\psi_r}{d\,q_r^2} + 2\,k^2\Big[\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j\,\varphi_{r\,j}) - \chi_r\Big]\psi_r = 0$$

or

(8) $$\frac{1}{f_r}\frac{d}{d\,q_r}\Big(f_r \frac{d\,\psi_r}{d\,q_r}\Big) + 2\,k^2\Big[\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j\,\varphi_{r\,j}) - \chi_r\Big]\psi_r = 0$$

and these are equations (9) of Robertson's article referred to under foot-note [7]).

3. Particular Cases.

Brillouin has considered three general types where the coefficients of inertia are given as the product of several functions, each function depending on only one co-ordinate.

Case 1:

$$g^{rr} = \mu_1(q_1)\,\mu_2(q_2)\ldots\mu_r(q_r); \qquad g^{rs} = 0 \quad (r \neq s)$$

and

$$V = \sum_r \mu_1(q_1)\,\mu_2(q_2)\ldots\mu_{r-1}(q_{r-1})\,\chi_r(q_r).$$

That this comes under Stäckel's type from the classical point of view is shown immediately by writing the determinant φ in the form

$$\varphi = \begin{vmatrix} \frac{1}{\mu_1}, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ -1, & \frac{1}{\mu_2}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & \frac{1}{\mu_3}, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & -1, & \frac{1}{\mu_n} \end{vmatrix}$$

The value of φ is $\mu_1\,\mu_2\ldots\mu_n$ and $g = \sqrt{g^{11}\ldots g^{nn}}$ and hence

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\,\varphi = \prod_r(\mu_r/\sqrt{g^{rr}}) = \Pi(1/F_r)$$

and thus condition (7) is satisfied ensuring the separability of the wave equation.

Case 2:

$$g^{rr} = \mu_1(q_1)\,\mu_2(q_2)\ldots\mu_{r-1}(q_{r-1})\,\lambda_r(q_r),$$

$$V = \sum_r \mu_1(q_1)\,\mu_2(q_2)\ldots\mu_{r-1}(q_{r-1})\,\chi_r(q_r).$$

This can be at once reduced to the previous case by the change of variables

$$q_r' = \int\sqrt{(\lambda_r/\mu_r)}\,d\,q_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Case 3:

$$g^{rr} = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r \qquad (r \leqq l),$$

$$g_j^{l+\alpha,\, l+\alpha} = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_l \mu_{j,\, l+1} \ldots \mu_{j,\, l+\alpha},$$

$$V = \sum_{r=1}^{l} g^{r-1,\, r-1} \chi_r + \sum_{j=0}^{p} \sum_{\alpha=1}^{s_j} g_j^{l+\alpha-1,\, l+\alpha-1} \chi_{j,\, l+\alpha}.$$

This is the case of divergent branching and similar expressions can be written for the case of convergent branching. In the former case, the variables are denoted after the l^{th} by two indices and it comes under the generalisation of Stäckel's case given by Stäckel[12]) himself and obtained by replacing the system of variables

$$q_1, q_2, \ldots, q_n \quad \text{by } q_{k\varrho_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \varrho_k = 1, 2, \ldots, h_k).$$

From the forms of g^{rr} $(r \leqq l)$ and $g_j^{l+\alpha,\, l+\alpha}$ as the product of functions, each of one variable, it is evident that condition (7) is satisfied.

Case 4: $n = 2$.

In the case of two degrees of freedom,

$$g^{11} = \varphi^{11}; \quad g^{22} = \varphi^{21}$$

and,

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\, \varphi = \sqrt{g^{11} g^{22}}\, \varphi = \sqrt{\varphi\, \varphi^{11}} \cdot \sqrt{\varphi\, \varphi^{21}};$$

but $\varphi\, \varphi^{11}$ and $\varphi\, \varphi^{21}$ are the minors of φ_{11} and φ_{21} in the determinant φ and are therefore functions of q_2 and q_1 respectively. Hence Robertson's condition is identically satisfied and we can state the theorem that it is only the case of two degrees of freedom in which the separability of the H-J equation under Stäckel's condition implies the separability of the corresponding wave equation[13]).

Case 5: *Case* of *Stankewitch.*

In the first three cases considered above condition (7) is satisfied in virtue of the coefficients of inertia being products of functions each of one variable and the potential energy being a sum of such functions. I have been able to find an example which does not come under these three types but satisfies condition (7). Such an example is afforded by the mechanical system considered by Stankewitch[14]) where

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \frac{K_r}{F_r(q_r)} \dot{q}_r^2,$$

$$V = \sum_{r=1}^{n} \chi_r(q_r)/K_r$$

---

[12]) P. Stäckel, C. R. **121** (1895), p. 489.

[13]) Cf. also, K. F. Herzfeld, Zeitschr. f. Phys. **68** (1931), S. 325, where this theorem is proved by direct verification.

[14]) J. Stankewitch, Mosk. Phys. Section **12** (1904), Lief. 1, p. 1—3. I have not been able to see the original article. For a summary, however, see F. d. M. **35** (1904), S. 719.

and further

$$K_r = (L_r - L_1)(L_r - L_2)\ldots(L_r - L_{r-1})(L_r - L_{r+1})\ldots(L_r - L_n)$$

where

$$L_r = L_r(q_r).$$

To show that this comes under Stäckel's type consider the determinant φ given by

$$\varphi = \begin{vmatrix} L_1^{n-1}/F_1, & \ldots, & L_r^{n-1}/F_r, & \ldots, & L_n^{n-1}/F_n \\ 1/F_1, & \ldots, & 1/F_r, & \ldots, & 1/F_n \\ L_1/F_1, & \ldots, & L_r/F_r, & \ldots, & L_n/F_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_1^{n-2}/F_1, & \ldots, & L_r^{n-2}/F_r, & \ldots, & L_n^{n-2}/F_n \end{vmatrix}$$

which gives

$$\varphi = \frac{\pm 1}{F_1 F_2 \ldots F_n} \prod_{i,j=1}^{n} (L_i - L_j) \qquad (i < j).$$

Also $\varphi\,\varphi^{r1}$ = minor of φ_{r1} in φ

$$= \begin{vmatrix} 1/F_1, \ldots, 1/F_{r-1}, 1/F_{r+1}, \ldots, 1/F_n \\ \cdots \\ \cdots \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\pm 1}{F_1 F_2 \ldots F_{r-1} F_{r+1} \ldots F_n} \prod_{h,k}^{n} (L_h - L_k) \qquad \begin{pmatrix} h, k \neq r \\ h < k \end{pmatrix}$$

and,

$$\varphi^{r1} = \frac{F_r \Pi (L_h - L_k)}{\Pi (L_i - L_j)} = \frac{F_r}{K_r} = \frac{1}{g_{rr}} = g^{rr}.$$

Thus

$$g^{rr} = \varphi^{r1}$$

and

$$V = \Sigma\, \varphi^{r1} \chi_r$$

which show that the present case belongs to Stäckel's type and from the form of K_r it is evident that it is not of Brillouin's type. Again the value of $1/\sqrt{g}$ is given by

$$\frac{1}{\sqrt{g}} = \frac{1}{\sqrt{g_{11} \ldots g_{nn}}} = \sqrt{\frac{F_1 F_2 \ldots F_n}{K_1 K_2 \ldots K_n}}.$$

Substituting the values for $K_1, \ldots, K_n$ in terms of L and multiplying, we easily find that

$$K_1 K_2 \ldots K_n = \Big(\prod_{i,j=1}^{n} (L_i - L_j)\Big)^2 \qquad (i < j)$$

and hence

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{F_1 F_2 \ldots F_n}},$$

proving that condition (7) is satisfied. We can thus state the theorem that the wave equation which corresponds to the system considered by Stankewitch can be solved by separation. I have not so far been able to find in current physical literature a wave equation of this type.

4. Levi-Civita's geodetic case.

In this case the classical H-J equation is given by

$$H = \tfrac{1}{2} \Sigma \Sigma g^{rs} p_r p_s = E \tag{9}$$

since it is not possible to associate a potential function with the equation, $H = E$. The solution by separation of equation (9) is given, according to Burgatti and Dall' Acqua, by

$$p_r = \alpha_1 \varphi_{r1} + \alpha_2 \varphi_{r2} + \cdots + \alpha_{n-1} \varphi_{r,n-1} + \varphi_{rn} \sqrt{2E - \tau} \tag{10}$$

where τ is a quadratic in $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ and φ_{ij} is a function of q_i alone. If the wave equation which can be set up from (9) can be solved by separation of variables, the solution must consist of the differential equations obtained from (10) by operating on the separate wave functions $\psi_1, \ldots, \psi_n$. Using for the momentum-operator p_r the expression (4) given by Pauli and operating on ψ_r we have

$$\frac{h}{i} \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{\partial}{\partial q_r} (\sqrt{D} \psi_r) = \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_j \varphi_{rj}) + \varphi_{rn} \sqrt{2E - \tau}.$$

In order that this be an ordinary differential equation enabling the solution by separation, we should have

$$\frac{1}{\sqrt{D}} \frac{\partial}{\partial q_r} (\sqrt{D}) = \text{function of } q_r \text{ alone},$$

and this, being true for all the co-ordinates, is satisfied only if

$$g = \prod_{r=1}^{n} f_r(q_r). \tag{11}$$

We can consider the determinant g as obtained by bordering the minor of g_{11} by the elements of the first row and first column and expand the determinant in terms of products of these elements. Such an expansion would give

$$g = g_{11} \frac{\partial g}{\partial g_{11}} - \Sigma \Sigma g_{1r} g_{s1} \frac{\partial^2 g}{\partial g_{11} \partial g_{sr}} \qquad (r, s \neq i).$$

Since by an interchange of rows and columns any g_{ii} can be made the leading diagonal element we should similarly have

$$g = g_{ii} \frac{\partial g}{\partial g_{ii}} - \Sigma \Sigma g_{ir} g_{si} \frac{\partial^2 g}{\partial g_{ii} \partial g_{sr}} \qquad (r, s \neq i). \tag{12}$$

In the essentially geodetic case it is well-known[15]) that any element g_{rs} is a function only of q_r and q_s and of the form $g_{rs} = \sum_{j=1}^{n} a_r^{(j)} a_s^{(j)}$ where a_r and a_s are functions respectively of q_r and q_s such that

$$\sum_j a_r^{(j)2} = \sum_j a_s^{(j)2} = 1.$$

It follows therefore that the partial derivatives appearing in (12) are independent of q_i and equation (11) can be satisfied only if either (a) $g_{ir} = 0$ $(i \neq r)$ or (b) $g_{ir} g_{si}$ contains g_{ii} as a factor. In the latter case it follows from the form of g_{ir} that all the functions $a_i^{(j)}$ must be of the form $A_j \sqrt{g_{ii}}$ where A_j is a constant, and similarly g_{ir} must also contain $\sqrt{g_{rr}}$ as a factor. From the equation $\sum a_i^{(j)2} = 1$ we can therefore conclude that g_{ii} must be a constant. The same is true for g_{rr} and g_{ss} which means that g_{ir} and g_{si} are constants. Thus all the coefficients of inertia are constants and the Hamiltonian is such that all the q's are cyclic co-ordinates and we no longer have the geodetic case. The other alternative (a) that $g_{ir} = 0$ $(i \neq r)$ reduces g to $g_{11} \cdots g_{nn}$ and condition (11) is no doubt satisfied, but the Hamiltonian comes under the completely separable case. Hence, neglecting the trivial cases of all co-ordinates being cyclic and of complete separability, we can state the theorem that the wave equation cannot be solved by separation in the essentially geodetic case.

The non-separability of the wave equation in this case can also be understood by means of the geometrical significance of separation variables[16]). The essence of the possibility of separation consists in this that, when one considers all eigenvibrations, the nodal surfaces split up into n groups such that the totality of surfaces of a group do not cut each other and lie everywhere dense. These groups then define the separation variables of Schrödinger's wave equation. In the present geodetic case the co-ordinate n-surfaces are *surfaces of translation* and the same is true of the groups of nodal surfaces. From the method of generation of an n-surface of translation by imposing on a $(n-1)$-surface translations congruent with a set of other similar surfaces, it can be seen that, in general, surfaces of the same group intersect one another. Thus nodal surfaces of different solutions intersect in an irregular way so that the construction of the set of separation variables is not possible in this case.

This can be illustrated clearly in the case of two degrees of freedom by writing the linear element as

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

---

[15]) See F. A. Dall'Acqua. Math. Annalen 66 (1909), S. 404—405, § 5.

[16]) See K. F. Herzfeld, Reference [13]) § II.

In the geodetic case E is a function of u only and G a function of v only, and the line element can be reduced to

$$ds^2 = du^2 + 2\cos(U + V)\,du\,dv + dv^2,$$

U and V being functions respectively of u and v. But it is well-known [17]) that these are exactly the conditions for the parametric curves to form a *Tchebychef system* on a surface. From the well-known property that the tangent to either family of a Tchebychef system undergoes a parallel displacement along each curve of the other family, it can be seen that members of the same family intersect one another in general.

[Added in the proofs February 1935.] After this paper had been sent for publication, my attention was kindly drawn by Professor O. Blumenthal to a paper by L. P. Eisenhart on "*Separable systems of Stäckel*" in Annals of Math. **35**, 2 (1934), p. 284. In this paper Eisenhart derives the very interesting result that Robertson's condition is equivalent to the vanishing of the Ricci tensor for the space considered and hence satisfied for an Euclidean space or for a space of constant Riemannian curvature. He also derives the canonical forms, for the equations which are reducible in the case $n = 3$. It will be readily seen that Brillouin's types are included in the forms given by Eisenhart. Again, his general canonical form leading to a system of confocal quadrics affording separation of variables is identical with the case of Stankewitch (see § 3 above) which I have constructed as an example satisfying Robertson's condition.

In view of what I have proved in § 4 of my paper, Eisenhart's geometrical interpretation of Robertson's condition leads to an interesting observation. It is well-known that for separability of the H-J equation under Levi-Civita's type it is a *necessary* condition that the space be of the Euclidean variety (Cf. Levi-Civita, Math. Annalen **59**, S. 383). This is however not necessary for the Stäckel type and it now appears according to Eisenhart, that imposing this as an additional condition makes the wave equation also separable. This affords a sort of justification for my result that the wave equation corresponding to Levi-Civita's case cannot be solved by separation, for otherwise, it would mean a still further specialisation of a space already Euclidean.

---

[17]) L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale. 3. Aufl. (1920), I, S. 153—162.

(Eingegangen am 23. 12. 1934.)

Nachruf auf Emmy Noether.

Von

B. L. van der Waerden in Leipzig.

Ein tragisches Geschick hat unserer Wissenschaft eine höchst bedeutsame, völlig einzigartige Persönlichkeit entrissen. Unsere treue Annalen-Mitarbeiterin Emmy Noether ist am 14. April 1935 an den Folgen einer Operation gestorben. Geboren war sie in Erlangen am 23. März 1882 als Tochter des bekannten Mathematikers Max Noether.

Ihre absolute, sich jedem Vergleich entziehende Einzigartigkeit ist nicht in der Art ihres Auftretens nach außen hin zu erfassen, so charakteristisch dieses zweifellos war. Ihre Eigenart erschöpft sich auch keineswegs darin, daß es sich hier um eine Frau handelt, die zugleich eine hochbegabte Mathematikerin war, sondern liegt in der ganzen Struktur dieser schöpferischen Persönlichkeit, in dem Stil ihres Denkens und dem Ziel ihres Wollens. Da nun dieses Denken in erster Linie ein mathematisches Denken und das Wollen in erster Linie auf wissenschaftliche Erkenntnis gerichtet war, so müssen wir zuerst ihr mathematisches Schaffen analysieren, wenn wir ihre Persönlichkeit einigermaßen erfassen wollen.

Die Maxime, von der sich Emmy Noether immer hat leiten lassen, könnte man folgendermaßen formulieren: *Alle Beziehungen zwischen Zahlen, Funktionen und Operationen werden erst dann durchsichtig, verallgemeinerungsfähig und wirklich fruchtbar, wenn sie von ihren besonderen Objekten losgelöst und auf allgemeine begriffliche Zusammenhänge zurückgeführt sind.* Dieser Leitsatz war für sie nicht etwa ein Ergebnis ihrer Erfahrung über die Tragweite wissenschaftlicher Methoden, sondern ein apriorisches Grundprinzip ihres Denkens. Sie konnte keinen Satz, keinen Beweis in ihren Geist aufnehmen und verarbeiten, ehe er nicht abstrakt gefaßt und dadurch für ihr Geistesauge durchsichtig gemacht war. Sie konnte nur in Begriffen, nicht in Formeln denken, und darin lag gerade ihre Stärke. Sie wurde so durch ihre eigene Wesensart dazu gezwungen, diejenigen Begriffsbildungen ausfindig zu machen, die geeignet waren, als Träger mathematischer Theorien aufzutreten.

Als Material für diese Denkmethode boten sich ihr die Algebra und die Arithmetik dar. Als grundlegend erkannte sie die Begriffe Körper, Ring, Ideal, Modul, Restklasse und Isomorphismus. Das Vorbild aber für ihre begrifflichen Entwicklungen fand sie in erster Linie in der

Dedekindschen Modultheorie, aus der sie immer neue Ideen und Methoden zu schöpfen wußte und deren Anwendungsgebiet sie nach jeder Richtung hin erstaunlich erweitert hat.

Von der Gordanschen Invariantentheorie ist sie ausgegangen. Ihre Dissertation [1][1]), mit der sie 1907 in Erlangen promovierte, behandelt das Problem, die von Gordan für das binäre und ternäre Gebiet ausgebildeten Methoden auf das n-äre Gebiet zu übertragen. Von den n-ären Reihenentwicklungen der Invariantentheorie hat sie später noch schöne Anwendungen gegeben [4], [12].

Sehr bald jedoch kommt sie in den Bann der Hilbertschen Methoden und Fragestellungen. Dem Hilbertschen Problemkreise gehören ihre Endlichkeitsbeweise für Invarianten endlicher Gruppen [3] und für ganzzahlige Invarianten binärer Formen an. Ihre wichtigste Arbeit aus dieser Periode ist die über Körper und Systeme rationaler Funktionen [2], in welcher sie durch Kombination der Methoden der Hilbertschen Endlichkeitsbeweise mit denen der Steinitzschen Körpertheorie die Existenz einer endlichen Rationalbasis für jedes System von rationalen Funktionen von n Veränderlichen beweist. Auf Grund davon löst sie einen Teil des Hilbertschen Problems der relativganzen Funktionen. Mit den Methoden derselben Arbeit [2] liefert sie dann auch einen wesentlichen Beitrag — den wichtigsten, der bisher überhaupt erzielt wurde — zum Problem der Konstruktion von Gleichungen mit vorgegebener Gruppe [7].

Während des Krieges kam Emmy Noether nach Göttingen, wo sie sich 1919 habilitierte und bald darauf einen Lehrauftrag erhielt. Unter dem Einfluß von Klein und Hilbert, die sich in dieser Zeit beide sehr mit der allgemeinen Relativitätstheorie beschäftigten, kamen ihre Arbeiten über Differentialinvarianten [8], [9] zustande, welche für dieses Gebiet von großer Wichtigkeit geworden sind. Sie zeigt in ihnen zum ersten Male die allgemeinen Methoden auf, die zur Erzeugung sämtlicher Differentialinvarianten geeignet sind. In der ersten Arbeit wird der fundamentale Begriff des Reduktionssystems geprägt: eines Systems von Differentialinvarianten, von denen alle übrigen algebraische Invarianten sind. In der zweiten werden die Methoden der formalen Variationsrechnung zur Bildung von Differentialinvarianten herangezogen.

Das Studium der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen [10] machte sie näher mit der Dedekindschen Modul- und Idealtheorie bekannt, welche Bekanntschaft für ihr weiteres Schaffen richtunggebend werden sollte. In der gemeinsamen Arbeit mit Schmeidler [13] werden die modultheoretischen Begriffe: Direkte Summen- und Durchschnittsdarstellung, Restklassenmoduln und Modulisomorphie entwickelt und erprobt, welche

[1]) Die Nummern beziehen sich auf das Schriftenverzeichnis am Schluß.

sich wie rote Fäden durch ihr späteres Werk ziehen. Hier werden auch zum ersten Male Eindeutigkeitsbeweise mit Hilfe der Austauschmethode geführt und Durchschnittsdarstellungen auf Grund einer Endlichkeitsbedingung gewonnen.

Der erste große Erfolg dieser Methode wurde in der jetzt schon klassischen Arbeit von 1921 „Idealtheorie in Ringbereichen“ [15] erzielt. In ihr wird zunächst, nachdem die Begriffe Ring und Ideal definiert sind, aus dem Hilbertschen Satz von der endlichen Idealbasis eine äquivalente Endlichkeitsbedingung, der Teilerkettensatz, hergeleitet. Die Darstellung beliebiger Ideale als Durchschnitte von Primäridealen, die E. Lasker für den Fall des Polynombereichs mit den Hilfsmitteln der Idealtheorie erhalten hatte, wird als Folge des Teilerkettensatzes allein erkannt. Neben dem Begriff des Primärideals (einer abstrakten Fassung des Laskerschen Begriffs, zugleich Verallgemeinerung des Dedekindschen Begriffs des einartigen Ideals) wird der des irreduziblen Ideals geprägt, und mit den schon erwähnten Modulmethoden werden vier Eindeutigkeitssätze bewiesen.

Diese Arbeit bildet die unverrückbare Grundlage der heutigen „allgemeinen Idealtheorie“. Ihre Ergebnisse bedurften eines Ausbaus nach zwei verschiedenen Richtungen hin. Einmal galt es, die Eliminationstheorie der allgemeinen Idealtheorie unterzuordnen und die Nullstellentheorie der Polynomideale von diesem Standpunkte aus neu zu begründen. In ihrer Bearbeitung der Hentzeltschen Eliminationstheorie [17] und in zwei weiteren Arbeiten, [19] und [20], hat Emmy Noether mit diesem Problem gerungen; aber erst in ihren Vorlesungen 1923/24 gab sie der Lösung die endgültige Form. Es zeugt von ihrer Großzügigkeit, daß sie, als ich ein Jahr später im Anschluß an ihre Arbeiten dieselbe Begründung der Nullstellentheorie fand, mir die Publikation überlassen hat.

Das zweite Notwendige war die Herstellung der Beziehung der allgemeinen Idealtheorie zur klassischen Dedekindschen Idealtheorie der Hauptordnungen in Zahl- und Funktionenkörpern. Es galt die Bedingungen aufzustellen, die ein Ring erfüllen muß, damit jedes Ideal nicht nur Durchschnitt von Primäridealen, sondern Produkt von Primidealpotenzen wird. Auch diese Aufgabe wird vollständig gelöst [25]. Als wesentlich stellt sich dabei neben den Endlichkeitsbedingungen (Teiler- und Vielfachenkettensatz) die Bedingung der „ganzen Abgeschlossenheit“ heraus. Durch Übertragung der Endlichkeitsbedingungen auf endliche Erweiterungen eines Ringes kam sie gleichzeitig mit Hilfe ihrer älteren invariantentheoretischen Methode zu einem Endlichkeitssatz für modulare Invarianten [24].

Die großen idealtheoretischen Arbeiten [15] und [25] bilden den Ausgangspunkt einer langen Reihe ergebnisreicher Arbeiten, meistens von

Emmy Noethers Schülern, über welche W. Krull in seinem Bericht „Idealtheorie" (Ergebn. Math. 4, 3, 1935) zusammenfassend berichtet hat.

Inzwischen war Emmy Noether selbst schon mit einem weiteren Problemkreis beschäftigt. Dieselben Modulbegriffe, aus denen heraus sie die kommutative Idealtheorie entwickelt hatte, sollten ihre Kraft auch im Nichtkommutativen zeigen. Zunächst gelang es, die Darstellungstheorie der Gruppen und hyperkomplexen Systeme der Modultheorie unterzuordnen. Es entspricht nämlich jeder Darstellung eines Systems $\mathfrak{R}$ durch lineare Transformationen eindeutig ein $\mathfrak{R}$-Modul, der *Darstellungsmodul*. Der Äquivalenzbegriff der Darstellungstheorie ordnet sich nunmehr dem Modul-Isomorphiebegriff unter; ebenso erweisen sich die Begriffe reduzibel, irreduzibel und vollständig reduzibel als modultheoretische Begriffe. Als zentrales Theorem der Darstellungstheorie kristallisiert sich nun folgender Satz heraus: Jeder irreduzible $\mathfrak{R}$-Modul ist äquivalent einem Ideal des Ringes $\mathfrak{R}$.

Diese enge Verknüpfung von Darstellungstheorie, Modultheorie und Idealtheorie hat Emmy Noether schon ab 1924 in ihren Vorlesungen entwickelt (vgl. die Note [23]); sie liegt auch ihrer Diskriminantenarbeit [26] zugrunde. In voller Klarheit und Allgemeinheit wurde dieser Zusammenhang aber erst in der Göttinger Vorlesung von 1927/28 und in der daraus entstandenen Arbeit [29] erklärt. Diese enthält außerdem eine systematische Idealtheorie der hyperkomplexen Systeme, gipfelnd in dem Satz: Die halbeinfachen hyperkomplexen Systeme im Sinne von J. H. Maclagan-Wedderburn sind direkte Summen von einfachen Rechtsidealen; ihre Darstellungen sind ebenfalls vollständig reduzibel. Aus diesen Sätzen wird nun die ganze Frobeniussche Darstellungstheorie entwickelt und sogar verallgemeinert. Während nämlich die Frobeniussche Darstellungstheorie vom Körper der komplexen Zahlen ausging, gestattet die Noethersche Theorie, Darstellungen in beliebigen Körpern direkt zu behandeln. Es entstand nun die Frage nach den Beziehungen zwischen den Darstellungen in verschiedenen Körpern (die sogenannte arithmetische Theorie der Gruppen linearer Substitutionen), insbesondere die Frage nach den *Zerfällungskörpern*, in denen eine gegebene Darstellung in absolut-irreduzible zerfällt. In der Noetherschen Theorie ordnen sich diese Fragen der allgemeineren Frage nach der Struktur des Produktes von zwei einfachen hyperkomplexen Systemen unter, welche Frage sich wieder mit modultheoretischen Methoden erschöpfend beantworten ließ [35]. Dabei ergab sich insbesondere eine Charakterisierung der Zerfällungskörper einer Divisionsalgebra als maximale kommutative Unterkörper der Algebra selbst oder eines vollen Matrixringes über dieser Algebra [27]. Diese Einbettung der Zerfällungskörper gibt gleichzeitig einen tiefen Einblick in die Struktur der Algebra

selbst: Diese läßt sich darstellen als „verschränktes Produkt" des Zerfällungskörpers mit dessen Galoisscher Gruppe [3]).

Der einfachste Fall des verschränkten Produktes ist die „zyklische Algebra", die entsteht, wenn der Zerfällungskörper zyklisch und in der Algebra selbst eingebettet ist. Die Struktur einer solchen zyklischen Algebra hängt davon ab, ob gewisse Elemente des Grundkörpers Normen von Elementen des Zerfällungskörpers sind. Ist nun insbesondere der Grundkörper ein algebraischer Zahlkörper, so ist die Normentheorie der zyklischen Erweiterungen ein Gegenstand der Klassenkörpertheorie, welche in dieser Weise als eng mit der Algebrentheorie verknüpft erscheint [34]. Die weitere Auswertung dieser Verknüpfung durch Noether, H. Hasse, R. Brauer und C. Chevalley in ständiger Wechselwirkung führte einerseits zu einer Neubegründung gewisser Teile der Klassenkörpertheorie mit hyperkomplexen Methoden, andererseits auch zum Beweis eines lange vermuteten „Hauptsatzes der Algebrentheorie", der besagt, daß jede Divisionsalgebra über einem algebraischen Zahlkörper zyklisch ist [33].

Die Betrachtung beliebiger verschränkter Produkte an Stelle der zyklischen Algebren ermöglichte schließlich die Übertragung von Sätzen der Klassenkörpertheorie, insbesondere des „Hauptgeschlechtssatzes", auf nichtabelsche Körper [36].

Mit der begrifflichen Durchdringung der Klassenkörpertheorie war ein Ziel erreicht, das Emmy Noether schon seit vielen Jahren, unbeirrt durch die Skepsis der Zahlentheoretiker, beharrlich anstrebte. Die Erreichung dieses Zieles war aber keineswegs ein Endpunkt ihrer Forschungen. Unermüdlich und über alle äußeren Umstände erhaben, schritt sie auf dem ihr durch ihre Begriffsbildungen gezeigten Wege fort. Auch als sie 1933 in Göttingen die Lehrberechtigung verlor und an die Frauenhochschule in Bryn Mawr (Pennsylvania) berufen wurde, wußte sie dort und in dem nahen Princeton in kurzer Zeit wieder eine Schule um sich zu sammeln. Ihre Forschung, die die kommutative Algebra, die kommutative Arithmetik und die nichtkommutative Algebra durchlaufen hatte, wandte sich jetzt der nichtkommutativen Arithmetik zu [37], wurde dann aber durch ihren Tod jäh abgebrochen.

Als charakteristische Wesenszüge haben wir gefunden: Ein unerhört energisches und konsequentes Streben nach begrifflicher Durchdringung des Stoffes bis zur restlosen methodischen Klarheit; ein hartnäckiges Festhalten an einmal als richtig erkannten Methoden und Begriffsbildungen, auch wenn diese den Zeitgenossen noch so abstrakt und un-

[3]) Die Noethersche Theorie der verschränkten Produkte ist dargestellt bei H. Hasse, Theory of cyclic algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 34, S. 180—200, sowie in dem Bericht von M. Deuring, Algebren, Ergebn. Math. 4, 1, S. 52—56.

fruchtbar vorkamen; ein Streben nach Einordnung aller speziellen Zusammenhänge unter bestimmte allgemeine begriffliche Schemata.

Ihr Denken weicht in der Tat in einigen Hinsichten von dem der meisten anderen Mathematiker ab. Wir stützen uns doch alle so gern auf Figuren und Formeln. Für sie waren diese Hilfsmittel wertlos, eher störend. Es war ihr ausschließlich um Begriffe zu tun, nicht um Anschauung oder Rechnung. Die deutschen Buchstaben, die sie in typisch-vereinfachter Form hastig an die Tafel oder auf das Papier warf, waren für sie Repräsentanten von Begriffen, nicht Objekte einer mehr oder weniger mechanischen Rechnung.

Diese völlig unanschauliche und unrechnerische Einstellung war wohl auch eine der Hauptursachen der Schwierigkeit ihrer Vorlesungen. Sie hatte keine didaktische Begabung, und die rührende Mühe, die sie sich gab, ihre Aussprüche, noch bevor sie ganz zu Ende gesprochen waren, durch schnell gesprochene Zusätze zu verdeutlichen, hatte eher den umgekehrten Effekt. Und doch: Wie unerhört groß war trotz allem die Wirkung ihres Vortrags! Die kleine, treue Hörerschar, meistens bestehend aus einigen fortgeschrittenen Studenten und häufig ebensovielen Dozenten und auswärtigen Gästen, mußte sich ungeheuer anstrengen, um mitzukommen. War das aber gelungen, so hatte man weit mehr gelernt als aus dem tadellosesten Kolleg. Es wurden fast nie fertige Theorien vorgetragen, sondern meistens solche, die erst im Werden begriffen waren. Jede ihrer Vorlesungen war ein Programm. Und keiner freute sich mehr als sie selbst, wenn ein solches Programm von ihren Schülern ausgeführt wurde. Völlig unegoistisch und frei von Eitelkeit, beanspruchte sie niemals etwas für sich selbst, sondern förderte in erster Linie die Arbeiten ihrer Schüler. Sie schrieb für uns alle immer die Einleitungen, in denen die Leitgedanken unserer Arbeiten erklärt wurden, die wir selbst anfangs niemals in solcher Klarheit bewußt machen und aussprechen konnten. Sie war uns eine treue Freundin und gleichzeitig eine strenge, unbestechliche Richterin. Als solche war sie auch für die Mathematische Annalen von unschätzbarem Wert.

Wie schon erwähnt, fanden ihre abstrakten, unanschaulichen Begriffsbildungen anfangs wenig Anerkennung. In dem Maße, wie die Erfolge ihrer Methoden auch den anders eingestellten klar wurden, änderte sich das, und seit etwa acht Jahren kamen prominente Mathematiker des In- und Auslandes nach Göttingen, um ihren Rat zu holen und ihre Vorlesungen zu hören. 1932 erhielt sie mit E. Artin zusammen den Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis für Arithmetik und Algebra. Und heute scheint der Siegeszug der von ihren Gedanken getragenen modernen Algebra in der ganzen Welt unaufhaltsam zu sein.

Verzeichnis der Veröffentlichungen Emmy Noethers.

1. Zur Invariantentheorie der Formen von n Variablen. Jour. f. d. reine u. angew. Math. 139 (1911), S. 118—154; vgl. auch Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 19 (1910), S. 101—104.
2. Körper und Systeme rationaler Funktionen. Math. Annalen 76 (1915), S. 161—191; vgl. auch Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 22 (1913), S. 316—319.
3. Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen. Math. Annalen 77 (1915), S. 89—92.
4. Über ganzrationale Darstellung der Invarianten eines Systems von beliebig vielen Grundformen. Math. Annalen 77 (1915), S. 93—102.
5. Die allgemeinsten Bereiche aus ganzen transzendenten Zahlen. Math. Annalen 77 (1915), S. 103—128. Berichtigung dazu: Math. Annalen 81, S. 30.
6. Die Funktionalgleichungen der isomorphen Abbildung. Math. Annalen 77 (1916), S. 536—545.
7. Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe. Math. Annalen 78 (1917), S. 221—229. Berichtigung dazu: Math. Annalen 81, S. 30.
8. Invarianten beliebiger Differentialausdrücke. Nachr. d. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen (1918), S. 37—44.
9. Invariante Variationsprobleme. Nachr. d. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen (1918), S. 235—257.
10. Die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen in ihrer Beziehung zu den übrigen Theorien und zu der Zahlkörpertheorie. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 28 (1919), S. 182—203.
11. Die Endlichkeit des Systems der ganzzahligen Invarianten binärer Formen. Nachr. d. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen (1919), S. 133—156.
12. Zur Reihenentwicklung in der Formentheorie. Math. Annalen 81 (1920), S. 25—30.
13. Gemeinsam mit W. Schmeidler: Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzenausdrücken. Math. Zeitschr. 8 (1920), S. 1—35.
14. Über eine Arbeit des im Kriege gefallenen K. Hentzelt zur Eliminationstheorie. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 30 (1921), S. *101*.
15. Idealtheorie in Ringbereichen. Math. Annalen 83 (1921), S. 24—66.
16. Ein algebraisches Kriterium für absolute Irreduzibilität. Math. Annalen 85 (1922), S. 26—33.
17. Bearbeitung von K. Hentzelt†: Zur Theorie der Polynomideale und Resultanten. Math. Annalen 88 (1923), S. 53—79.
18. Algebraische und Differentialinvarianten. Jahresber. Deutch. Math.-Verein. 32 (1923), S. 177—184.
19. Eliminationstheorie und allgemeine Idealtheorie. Jahresber. Deutch. Math.-Verein. 33 (1924), S. 116—120.
20. Eliminationstheorie und allgemeine Idealtheorie. Math. Annalen 90 (1923), S. 229—261.
21. Abstrakter Aufbau der Idealtheorie im algebraischen Zahlkörper. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 33 (1924), S. *102*.
22. Hilbertsche Anzahlen in der Idealtheorie. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 34 (1925), S. *101*.
23. Gruppencharaktere und Idealtheorie. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 34 (1925), S. *144*.

24. Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher linearer Gruppen der Charakteristik p. Nachr. d. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen (1926), S. 28—35.

25. Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionskörpern. Math. Ann. **96** (1926), S. 26—61.

26. Der Diskriminantensatz für die Ordnungen eines algebraischen Zahl- oder Funktionenkörpers. Jour. f. d. reine u. angew. Math. **157** (1927), S. 82—104.

27. Gemeinsam mit R. Brauer: Über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. (1927), S. 221—228.

28. Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie in arithmetischer Auffassung. Atti Congresso Bologna **2** (1928), S. 71—73.

29. Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie. Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 641—692.

30. Über Maximalbereiche von ganzzahligen Funktionen. Rec. Soc. Math. Moscou **36** (1929), S. 65—72.

31. Idealdifferentiation und Differente. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **39** (1929), S. *17*.

32. Normalbasis bei Körpern ohne höhere Verzweigung. Jour. f. d. reine u. angew. Math. **167** (1932), S. 147—152.

33. Gemeinsam mit R. Brauer und H. Hasse: Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren. Jour. f. d. reine u. angew. Math. **167** (1932), S. 399—404.

34. Hyperkomplexe Systeme in ihren Beziehungen zur kommutativen Algebra und Zahlentheorie. Verhandl. Internat. Math.-Kongreß Zürich 1 (1932), S. 189—194.

35. Nichtkommutative Algebra. Math. Zeitschr. **37** (1933), S. 514—541.

36. Der Hauptgeschlechtssatz für relativ-galoissche Zahlkörper. Math. Annalen **108** (1933), S. 411—419.

37. Zerfallende verschränkte Produkte und ihre Maximalordnungen. Exposés mathématiques publiés à la mémoire de J. Herbrand IV (Actualités scient. et industr. **148**) (1935).

(Eingegangen am 21. 6. 1935.)

Der singuläre Fall der Reduktion hyperelliptischer Integrale erster Ordnung auf elliptische durch eine Transformation dritten Grades.

Von

Oskar Bolza in Freiburg i. B.

Einleitung.

Nachdem bereits Hermite[1]) im Jahre 1876 die ersten Beispiele von hyperelliptischen Integralen erster Ordnung und erster Gattung angegeben hatte, die sich durch rationale Transformationen dritten Grades auf elliptische Integrale reduzieren lassen, hat zuerst Goursat[2]) im Jahre 1885 den allgemeinsten Ausdruck eines derartigen Integrals gefunden, indem er zeigte, daß jedes[3]) solche Integral durch eine lineare Transformation der Integrationsvariablen auf die Form gebracht werden kann

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \tag{1}$$

wo

$$R(x) = (x^3 + 3ax + b)(x^3 + 3px^2 + q) \tag{2}$$

und

$$q = 4b + 12ap. \tag{3}$$

Das Integral (1) ist dann durch die Transformation

$$y = \frac{x^3 + 3ax + b}{3x - 3p}$$

auf ein elliptisches reduzierbar.

---

[1]) Ch. Hermite, Sur un exemple de réduction d'intégrales abéliennes aux fonctions elliptiques, Annales de la Société scientifique de Bruxelles (Mémoires), 1. Année, p. 1—16.

[2]) E. Goursat, Sur la réduction des Integrales hyperelliptiques, Bulletin de la Société Mathématique de France 13 (1884/85), S. 155—157. Wir schreiben $3a$, $3p$ statt Goursats a, p.

[3]) Dies ist nur dann ausnahmlos richtig, wenn man den Grenzfall mit einbegreift, den man erhält, wenn man in den Goursatschen Formeln $p = p'/\varepsilon$, $q = q'/\varepsilon$ setzt und dann ε gegen 0 konvergieren läßt. Man wird so auf das erste Hermitesche Integral geführt, das sich schreiben läßt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^3 + 3ax + b)(x^2 + 4a)}}.$$

Wir werden am Schluß unserer Untersuchung auf diesen Grenzfall näher eingehen.

Goursat hat dann durch einen eleganten Kunstgriff daraus das weitere Resultat abgeleitet, daß unter der Voraussetzung (3) allemal noch ein zweites zu derselben Irrationalität gehöriges Integral erster Gattung existiert, das ebenfalls durch eine Transformation dritten Grades auf ein elliptisches reduzierbar ist, nämlich das Integral

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}}. \tag{4}$$

Die dazu gehörige, von Goursat angegebene reduzierende Transformation läßt sich durch eine lineare Transformation der Variablen des elliptischen Integrals auf folgende, für unsere Zwecke bequemere Form bringen:

$$z = \frac{x^3 + 3\,p\,x^2 + q}{3\,x^2 + 12\,a}. \tag{5}$$

Bei der Goursatschen Methode, das zweite reduzierbare Integral aus dem ersten abzuleiten, bleibt die Frage ganz unberührt, *ob es außer den beiden Integralen* (1) *und* (4) *noch weitere zu derselben Irrationalität* $\sqrt{R(x)}$ *und zu derselben Zerlegung von* $R(x)$ *in zwei kubische Faktoren gehörige Integrale erster Gattung gibt, die ebenfalls durch rationale Transformationen dritten Grades auf je ein elliptisches Integral reduzierbar sind.* Die Beantwortung dieser Frage, die auch in der späteren Literatur über das Reduktionsproblem — mit einer einzigen, gleich zu erwähnenden Ausnahme — nicht behandelt worden zu sein scheint, bildet den Gegenstand der folgenden Untersuchung.

Die eben erwähnte Ausnahme findet sich in einer Arbeit von Dolbnia [4]), in welcher sich der Verfasser für den speziellen Hermiteschen Fall gerade diese Aufgabe stellt, nämlich alle Werte von δ zu bestimmen, für welche das Integral

$$\int \frac{(x-\delta)\,dx}{\sqrt{(x^2+4\,a)(x^3+3\,a\,x+b)}}$$

durch eine rationale Transformation dritten Grades von der Form

$$y = \frac{x^2+4\,a}{x^3+3\,\alpha\,x^2+3\,\beta\,x+\gamma}$$

auf ein elliptisches zurückführbar ist. Er hat jedoch die Untersuchung nicht zu Ende geführt, sondern sich damit begnügt, zu zeigen, daß die von ihm für δ aufgestellten Bedingungen durch den Wert $\delta = 0$ erfüllt werden, der auf die von vornherein von Hermite her bekannte Lösung führt.

[4]) J. Dolbnia, Sur la liaison entre la théorie de la transformation des fonctions elliptiques et la théorie de la réduction des intégrales abéliennes, Bulletin des sciences mathématiques (2) 28, première partie (1904), S. 228—231.

§ 1.

Bedingung für das Eintreten des „singulären Falles“.

Wir nehmen an, die Werte der Koeffizienten a, b, p, q seien gegeben und genügten der Goursatschen Relation

$$q = 4b + 12ap; \tag{3}$$

außerdem seien für dieses Wertsystem die Wurzeln der durch (2) definierten Funktion $R(x)$ voneinander verschieden, was unter anderem zur Folge hat, daß

$$q(4p^3 + q)(4a^3 + b^2) \neq 0. \tag{6}$$

Wir setzen weiter voraus, daß

$$\left\{\begin{aligned} \int \frac{(x-\delta)\,dx}{\sqrt{R(x)}} &= C \int \frac{dz}{\sqrt{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3)(z-\lambda_4)}}, \\ z &= \frac{U(x)}{V(x)}, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

wo U, V zwei teilerfremde ganze Funktionen von nicht höherem als dem dritten Grade sind, von denen mindestens eine diesen Grad erreicht. Überdies seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ voneinander verschieden. Dabei dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß die Koeffizienten von x^3 in U und V bzw. die Werte 1 und 0 haben, da wir dies stets durch eine vorausgegangene lineare Transformation von z erreichen können.

Dann folgt bekanntlich nach der schon von Jacobi[5]) für die Transformation der elliptischen Integrale entwickelten Schlußweise, daß sich $R(x)$ in zwei Faktoren dritten Grades $R_0(x)$ und $R_1(x)$ zerlegen läßt, derart daß identisch in x die Gleichungen bestehen:

$$\left\{\begin{aligned} U - \lambda_1 V &= (x-c_1)(x-\xi_1)^2, \\ U - \lambda_2 V &= (x-c_2)(x-\xi_2)^2, \\ U - \lambda_3 V &= (x-c_3)(x-\xi_3)^2, \\ U - \lambda_4 V &= R_0(x), \end{aligned}\right. \tag{8}$$

wo

$$R_1(x) = (x-c_1)(x-c_2)(x-c_3) \tag{9}$$

und die Größen ξ_i noch zu bestimmende Konstanten sind.

Wir fügen unseren Voraussetzungen noch die weitere hinzu, daß diese Zerlegung von $R(x)$ gerade mit der gegebenen Zerlegung (2) identisch ist, und zwar so, daß:

$$R_0(x) = x^3 + 3px^2 + q, \quad R_1(x) = x^3 + 3ax + b,$$

[5]) C. G. J. Jacobi, Werke Bd. I, S. 39—41, 57—60.

so daß also

(10) $$c_i^3 + 3ac_i + b = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ferner dürfen wir, aus demselben Grunde wie oben, ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\lambda_4 = 0$, so daß also nunmehr

$$U = x^3 + 3px^2 + q, \quad V = 3\alpha x^2 + 3\beta x + \gamma.$$

Aus den Gleichungen (8) folgen dann die drei Gleichungstripel

(11) $$\begin{cases} 3(p - \lambda_i\alpha) = -(c_i + 2\xi_i), \\ -3\lambda_i\beta = \xi_i^2 + 2c_i\xi_i, \\ q - \lambda_i\gamma = -c_i\xi_i^2, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß stets $\alpha \neq 0$ sein muß. Denn bei der Annahme $\alpha = 0$ führen die Gleichungen (11) zusammen mit (3) und (10), da c_1, c_2, c_3 verschieden sind, auf: $a = -p^2$, $b = 2p^3$, $q = -4p^3$, was mit der Voraussetzung (6) im Widerspruch wäre. Daher dürfen wir weiter ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha = 1$ setzen.

Die neun Gleichungen (11) zwischen den acht Unbekannten: β, γ; ξ_1, ξ_2, ξ_3; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ stellen dann die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines zur Irrationalität $\sqrt{R(x)}$ gehörigen hyperelliptischen Integrals erster Gattung dar, das durch eine Transformation dritten Grades von der Form

(12) $$z = \frac{x^3 + 3px^2 + q}{3x^2 + 3\beta x + \gamma}$$

auf ein elliptisches Integral reduzierbar ist.

Ferner erhält man zu jedem den Gleichungen (11) genügenden Wertsystem der obigen acht Unbekannten *einen* zugehörigen Wert von δ aus der bekannten, nach der Jacobischen Schlußweise (l. c) zu beweisenden Gleichung

(13) $$V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx} = 3(x - \xi_1)(x - \xi_2)(x - \xi_3)(x - \delta),$$

aus der sich zugleich für den in (7) vorkommenden Faktor C der Wert $C = \frac{1}{3}$ ergibt.

Eliminiert man jetzt aus den drei Gleichungen (11_i), nachdem man darin $\alpha = 1$ gesetzt hat, λ_i, so erhält man

(14_i) $$\begin{aligned} \xi_i^2 + 2(\beta + c_i)\xi_i + \beta(3p + c_i) &= 0, \\ 3c_i\xi_i^2 - 2\gamma\xi_i + (3q - 3\gamma p - \gamma c_i) &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus eliminieren wir ξ_i, ordnen die Resultante nach Potenzen von c_i und reduzieren ihren Grad mittels der Gleichung (10) auf den zweiten. So erhalten wir drei Gleichungen von der Form: $Lc_i^2 + Mc_i + N = 0$, $i = 1, 2, 3$, aus denen, da c_1, c_2, c_3 voneinander verschieden sind, folgt: $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$. Ersetzt man schließlich noch die beiden letzten

Gleichungen durch die Kombinationen: $M - 2pL = 0$, $N + pM + p^2 L = 0$, so erhält man das Resultat:

$$(15)\quad \begin{cases} -\gamma^2 + 12a\gamma + 9[(3p^2 - a)\beta^2 + 2\beta q] = 0, \\ \gamma[(6p^2 + 2a)\beta + q] \\ \qquad + 3\left[\left(-6p^3 - 3ap + \frac{5}{4}q\right)\beta^2 - 6pq\beta - 4aq\right] = 0, \\ (4p^3 + q)\beta\left(\gamma + \frac{3\beta p}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

Diese drei Gleichungen sind die notwendige und hinreichende Bedingung für das gleichzeitige Bestehen der drei Gleichungspaare (14_1) und daher auch der neun Gleichungen (11).

Nun ist nach Voraussetzung (6): $4p^3 + q \neq 0$; daher sind nunmehr zwei Fälle zu unterscheiden.

Fall I: $\beta = 0$. Dann gehen die beiden ersten der Gleichungen (15) über in

$$\gamma(\gamma - 12a) = 0, \quad q(\gamma - 12a) = 0.$$

Da nach (6) auch $q \neq 0$, so folgt aus der zweiten Gleichung: $\gamma = 12a$, womit auch die erste befriedigt ist. *Die Größen a, b, p, q erfahren also in diesem Falle keine weitere Beschränkung über die Bedingung* (3) *hinaus* und wir erhalten die reduzierende Transformation (5) für das zweite Goursatsche Integral. Überdies ergibt die Gleichung (13) den Wert $\delta = 0$. Der Fall I führt also auf das bekannte *Goursatsche Resultat* und braucht uns weiter nicht zu beschäftigen.

Fall II: $\beta \neq 0$. Dann folgt

$$(16)\quad \gamma = -\frac{3p\beta}{2}.$$

Diesen Wert setzen wir in die beiden ersten der Gleichungen (15) ein und erhalten

$$(17)\quad \begin{aligned} \left(\frac{11}{4}p^2 - a\right)\beta + 2(q - ap) &= 0, \\ \left(9p^3 + 4ap - \frac{5}{4}q\right)\beta^2 + \frac{13}{2}pq\beta + 4aq &= 0. \end{aligned}$$

Hier sind nun nochmals zwei Fälle zu unterscheiden:

Unterfall II_A: $\frac{11}{4}p^2 - a \neq 0$. Dann folgt aus ($17_1$) und (16)

$$(18)\quad \beta = \frac{2(ap - q)}{\frac{11}{4}p^2 - a}, \qquad \gamma = -\frac{3p(ap - q)}{\frac{11}{4}p^2 - a}.$$

Setzt man jetzt in (17_2) den Wert von β aus (18) ein, so erhält man die folgende *notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen der drei Gleichungen* (15):

$$(19)\quad F(p, q, a) \equiv 4(ap - q)^2\left(9p^3 + 4ap - \frac{5}{4}q\right) + 13pq(ap - q)\left(\frac{11}{4}p^2 - a\right) + 4aq\left(\frac{11}{4}p^2 - a\right)^2 = 0.$$

Für spätere Anwendungen erwähnen wir noch die aus (18) und (3) folgenden Gleichungen

$$(20)\qquad a = \frac{\frac{11}{4}p^2\beta + 2q}{\beta + 2p}, \qquad b = \frac{(q - 33p^3)\beta - 22pq}{4(\beta + 2p)}$$

und die aus (20) und (19) folgende Gleichung für β:

$$(21)\qquad 5\left(4p^3 - \frac{1}{4}q\right)\beta^3 + 6p(3p^3 + 2q)\beta^2 + 24p^2q\beta + 8q^2 = 0.$$

Unterfall $\mathrm{II_B}$: $a = \frac{11}{4}p^2$. Dann ist nach (17_1) $q = \frac{11}{4}p^3$, woraus nach (6) folgt: $p \neq 0$ und weiter aus (3):

$$(22)\qquad b = -\frac{11^2}{16}p^3.$$

Endlich liefert die Gleichung (17_2) für β die quadratische Gleichung

$$(23)\qquad 5\cdot 53\beta^2 + 2\cdot 11\cdot 13p\beta + 4\cdot 11^2p^2 = 0,$$

ihre beiden Wurzeln bezeichnen wir mit β_1, β_2, mit γ_1, γ_2 die denselben mittels (16) zugeordneten Werte von γ.

Da jetzt aus (17) folgt: $q - ap = 0$, so ist auch im Fall $\mathrm{II_B}$ die Gleichung (19) erfüllt. Wir werden den Fall II, der somit durch die Gleichung (19) charakterisiert ist, den „*singulären Fall der Reduktion*" nennen und die dazu gehörigen reduzierbaren Integrale „*singuläre Integrale*".

Wie wir übrigens später sehen werden, läßt sich der Fall $\mathrm{II_B}$ als Grenzfall von $\mathrm{II_A}$ auffassen.

Die drei Gleichungen (15) waren die notwendige und hinreichende Bedingung für das gleichzeitige Bestehen der drei Gleichungspaare (14_i) für $i = 1, 2, 3$. Sind sie erfüllt, so ist die gemeinsame Lösung ξ_i von (14_i) gegeben durch

$$(24_i)\qquad \xi_i = -\frac{3(p\gamma - q) + (\gamma + 9p\beta)c_i + 3\beta c_i^3}{2(\gamma + 3\beta c_i + 3c_i^2)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dabei ist der Nenner stets von Null verschieden; denn wäre derselbe $= 0$, so wäre stets auch der Zähler $= 0$; es müßte also die Resultante dieser

beiden in c_i quadratischen Gleichungen verschwinden. Dieselbe hat aber in den drei Fällen I, II_A, II_B, abgesehen von Zahlenfaktoren, beziehungsweise die Werte

$$4a^3 + b^2, \quad (4p^3 + q)\beta^3, \quad q\beta^3,$$

welche wegen (6) alle drei von Null verschieden sind. Dieselbe Überlegung zeigt, daß stets $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \neq 0$, wovon wir später Gebrauch zu machen haben werden.

Nachdem so ξ_i gefunden ist, ergibt sich λ_i aus (11_1):

$$\lambda_i = \frac{2p\xi_i + \xi_i^2}{\beta + 2\xi_i}, \tag{25}$$

womit das Gleichungssystem (11) vollständig gelöst ist.

Ohne schon jetzt auf die Bestimmung von δ einzugehen, können wir doch bereits so viel sagen, daß im singulären Falle jedenfalls $\delta \neq 0$ ist und bei Vertauschung von ξ_1, ξ_2, ξ_3 ungeändert bleibt, wie aus der Gleichung (13) folgt. Das gestattet uns nunmehr den folgenden Satz auszusprechen, immer unter den im Eingang dieses Paragraphen gemachten Voraussetzungen:

Satz I. 1. *Wenn*

$$F(p, q, a) \neq 0,$$

so ist das Goursatsche Integral (4) *das* ***einzige*** *zur Irrationalität* $\sqrt{R(x)}$ *gehörige Integral erster Gattung, welches durch eine Transformation von der Form*

$$z = \frac{x^3 + 3px^2 + q}{\varepsilon x^3 + 3\alpha x^2 + 3\beta x + \gamma}$$

auf ein elliptisches reduzierbar ist.

2. *Wenn*

$$F(p, q, a) = 0, \quad a \neq \frac{11}{4}p^2,$$

so gibt es außer dem Goursatschen Integral noch ***ein weiteres*** *derartiges Integral.*

3. *Wenn*

$$F(p, q, a) = 0, \quad a = \frac{11}{4}p^2,$$

so gibt es außer dem Goursatschen Integral noch ***zwei weitere*** *derartige Integrale*[6]).

---

[6]) Daß diese den beiden Werten β_1, β_2 zugeordneten Integrale nicht etwa zusammenfallen, wird die spätere Bestimmung von δ ergeben (§ 3).

§ 2.

Auflösung und geometrische Deutung der Bedingungsgleichung: $F(p, q, a) = 0$.

Für die weitere Fortführung unserer Untersuchung ist es nun von entscheidender Wichtigkeit, daß sich die Bedingungsgleichung (19) in der Weise auflösen läßt, daß man a und q rational durch p und einen Hilfsparameter r ausdrückt.

Zum Beweis gehen wir von der wegen (20) mit (19) äquivalenten, in q quadratischen Gleichung (21) aus und lösen dieselbe nach q auf; das Resultat ist

$$q = \frac{\beta}{64}\left[(5\beta^2 - 48p\beta - 96p^2) \pm (5\beta - 8p)\sqrt{\beta(\beta - 16p)}\right].$$

Hierin setzen wir

$$\beta = \frac{16p}{1 - \zeta^2},$$

so wird bei passender Wahl des Vorzeichens von ζ

$$\sqrt{\beta(\beta - 16p)} = \frac{16p\zeta}{1 - \zeta^2}$$

und daraus

$$q = \frac{8p^3(3\zeta - 13)}{(\zeta - 1)^3}.$$

Die Formeln vereinfachen sich, wenn wir statt ζ einen neuen Parameter r einführen durch die Gleichung

$$r = \frac{p}{\zeta - 1}.$$

Dann erhalten wir als Auflösung der Gleichung (21)

$$\beta = -\frac{16r^2}{p + 2r}, \quad q = 8r^2(3p - 10r).$$

Daraus ergibt sich nach (20) die gesuchte Auflösung der Gleichung (19) und wir erhalten den

Satz II: *Die den singulären Fall der Reduktion charakterisierende Gleichung*

$$F(p, q, a) = 0$$

läßt sich in der Weise auflösen, daß man a und q durch p und einen Hilfsparameter r rational ausdrückt, und zwar ist

$$a = \frac{2r^2(p - 20r)}{p - 2r}, \quad q = 8r^2(3p - 10r). \tag{26}$$

Aus (3) und (16) ergibt sich daraus der

Zusatz: Durch p und denselben Parameter r lassen sich dann auch der Koeffizient b und die Koeffizienten β, γ der reduzierenden Transformation rational ausdrücken, und zwar ist

$$b = \frac{8 r^3 (11 p + 5 r)}{p - 2 r}, \tag{27}$$

$$\beta = -\frac{16 r^3}{p + 2 r}, \qquad \gamma = \frac{24 p r^2}{p + 2 r}. \tag{28}$$

Deuten wir a, q bei festgehaltenem p als Koordinaten eines Punktes in einer Ebene, so stellt die Gleichung (19) eine *ebene Kurve vierter Ordnung*, C_4, dar, und die Gleichungen (26) geben dann eine Parameterdarstellung dieser Kurve, welche zeigt, daß C_4 eine *rationale Kurve* ist.

Jedem Wert von r entspricht ein Punkt von C_4, und umgekehrt entspricht jedem Punkt a, q von C_4 ein und im allgemeinen auch nur ein Wert von r. Derselbe wird aus den beiden Gleichungen (26) nach dem Verfahren des größten gemeinsamen Teilers gefunden und lautet

$$r = \frac{p^3 q - (4 q + 12 p^3) a + 8 p a^2}{4 (5 p q - 16 p^2 a + 4 a^2)}. \tag{29}$$

Die Kurve C_4 hat *zwei Doppelpunkte und eine Spitze*. Der erste Doppelpunkt hat die Koordinaten

$$a = \frac{11}{4} p^2, \qquad q = \frac{11}{4} p^3$$

und entspricht den beiden Wurzeln r_1, r_2 der Gleichung

$$80 r^2 - 44 p r + 11 p^2 = 0. \tag{30}$$

Der zweite Doppelpunkt hat die Koordinaten

$$a = -p^2, \qquad q = -4 p^3$$

und entspricht den beiden Wurzeln $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ der Gleichung

$$10 r^2 + 2 p r + p^2 = 0. \tag{31}$$

Die Spitze hat die Koordinaten

$$a = 0, \qquad q = 0$$

und entspricht dem Wert $r = 0$.

Der Nenner des Ausdrucks (29), und dann allemal auch der Zähler, verschwindet in diesen drei Punkten der Kurve C_4 und nur in ihnen.

Für unser Reduktionsproblem sind alle diejenigen Punkte a, q von C_4 mit den zugehörigen Werten von r auszuschließen, für welche $R(x)$ zusammenfallende Wurzeln hat oder für welche U und V einen gemeinsamen Teiler haben. Das sind außer dem zweiten Doppelpunkt und der

Spitze noch die den Werten: $r = \frac{3p}{10}$, $r = \frac{p}{2}$ entsprechenden Punkte, wozu noch $r = -\frac{p}{2}$ als auszuschließender Wert hinzukommt, weil β und γ endlich sein müssen. Der Ausschluß der eben aufgezählten Wertsysteme (p, r) läßt sich in die Ungleichung zusammenfassen[7]):

$$r(p^2 - 4r^2)(3p - 10r)(p^2 + 2pr + 10r^2) \neq 0. \tag{32}$$

Wir können nunmehr auch die oben ausgesprochene, für unsere weitere Untersuchung wichtige Behauptung beweisen, daß der Fall II_B sich als Grenzfall von II_A betrachten läßt. Der Fall II_B ist nämlich durch die Werte: $a = \frac{11}{4}p^2$, $q = \frac{11}{4}p^3$ charakterisiert, die die Koordinaten des ersten Doppelpunktes der Kurve C_4 sind, dem die beiden Werte r_1, r_2 entsprechen. In der Umgebung dieses Doppelpunktes läßt sich nun aber die Kurve C_4 durch zwei Reihen nach Potenzen von $\left(a - \frac{11}{4}p^2\right)$ darstellen mit den Anfangsgliedern

$$q - \frac{11}{4}p^3 = \varkappa_i p\left(a - \frac{11}{4}p^2\right) + \ldots, \quad i = 1, 2,$$

wo $\varkappa_1, \varkappa_2$ die Wurzeln der Gleichung

$$5 \cdot 53\varkappa^2 - 9 \cdot 43\varkappa + 3 \cdot 81 = 0$$

sind.

Jetzt können wir die Grenzwerte bestimmen, denen sich die Größen r, β, γ nähern, wenn sich der Punkt a, q der Kurve C_4 dem ersten Doppelpunkt einmal auf dem ersten, das andere Mal auf dem zweiten der beiden durch den Doppelpunkt gehenden Kurvenzweige nähert. Es stellt sich heraus, daß diese Grenzwerte[8]) mit den früher mit r_1, β_1, γ_1 bzw. r_2, β_2, γ_2 bezeichneten Größen identisch sind, die zu den beiden im Falle II_B vorhandenen singulären Integralen gehören. Damit ist aber gezeigt, daß in der Tat *der Fall* II_B *als Grenzfall von* II_A *betrachtet werden kann.*

§ 3.

Bestimmung von δ.

Die zur Bestimmung von δ dienende Gleichung (13) lautet ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} x^4 + 2\beta x^3 + (\gamma + 3p\beta)x^2 + 2(p\gamma - q)x - q\beta \\ = (x - \xi_1)(x - \xi_2)(x - \xi_3)(x - \delta). \end{aligned} \tag{33}$$

[7]) Die Bedingung (6) drückt aus, daß die Diskriminanten von R_0 und R_1 nicht verschwinden. Die Bedingung, daß auch die Resultante von R_0 und R_1, sowie die Resultante von U und V nicht verschwinden, führt im Falle II zu keinen über (6) hinausgehenden Einschränkungen.

[8]) Bei geeigneter Wahl des Vorzeichens der in r_1 und r_2 vorkommenden Quadratwurzel.

Die linke Seite, die wir mit $\Theta(x)$ bezeichnen, ist die nicht-homogen geschriebene Funktionaldeterminante der beiden homogen geschriebenen Funktionen U, V in der Clebschschen Normierung. Für $x = 0$ folgt aus (33)

$$\delta = -\frac{q\beta}{\xi_1\xi_2\xi_3},$$

worin der Nenner stets $\neq 0$ ist (§ 1 gegen Ende). Aus (24_1) ergibt sich nun: Bezeichnet man mit G und H die Resultanten der Funktion: $x^3 + 3ax + b$ mit der Funktion: $3x^2 + 3\beta x + \gamma$, bzw. mit: $3\beta x^2 + (\gamma + 9p\beta)x + 3(p\gamma - q)$, so ist

$$\xi_1\xi_2\xi_3 = -\frac{H}{8G}.$$

Ersetzt man jetzt in G und H die Größen a, b, q, β, γ mittels (26) bis (28) durch ihre Ausdrücke in p und r, so erhält man

$$\xi_1\xi_2\xi_3 = -\frac{32r^3(3p-10r)}{p+2r}.$$

Andererseits ist

$$-q\beta = \frac{128r^4(3p-10r)}{p+2r}.$$

Also erhält man das einfache *Resultat*:

$$\delta = -4r. \tag{34}$$

Da diese Methode zur Bestimmung von δ etwas langwierige Rechnungen erfordert, so füge ich noch eine einfache nachträgliche Bestätigung für die Richtigkeit des Resultates (34) bei: Ersetzt man in den Koeffizienten der Gleichung $\Theta(x) = 0$ die Größen q, β, γ durch ihre Ausdrücke (26) und (28) in r, so erhält man

$$\begin{aligned}\Theta(x) \equiv (p+2r)x^4 - 32r^2x^3 - 24pr^2x^2 \\ + 64r^3(p+5r)x + 128r^4(3p-10r) = 0.\end{aligned}$$

Man verifiziert zunächst, daß diese Gleichung durch den Wert $x = -4r$ identisch in p und r befriedigt wird; eine der vier Größen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \delta$ muß also gleich $-4r$ sein. Wäre nun etwa $\xi_1 = -4r$, so würde sich aus der aus (14_1) folgenden Gleichung

$$c_1 = -\frac{3p\beta + 2\beta\xi_1 + \xi_1^2}{\beta + 2\xi_1}$$

ergeben

$$c_1 = \frac{4r(5r-p)}{4r+p}.$$

Setzt man diesen Wert von c_1 aber in die Gleichung (10_1) ein und ersetzt a und b durch ihre Ausdrücke in r, so erhält man

$$r^4(p-2r)(p^2+2pr+10r^2) = 0,$$

was der Ungleichung (32) widerspricht. Es kann also ξ_1 (und ebenso ξ_2, ξ_3) nicht $= -4r$ sein, somit muß $\delta = -4r$ sein, was zu beweisen war.

Wir haben also jetzt den Satz bewiesen:

Satz III: *Das allgemeinste, durch eine Transformation von der Form* (12) *reduzierbare singuläre Integral lautet*

$$\int \frac{(x+4r)\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \tag{34_a}$$

dabei hat man sich die Größen a, b, q, β, γ mittels der Gleichungen (26) *bis* (28) *durch die beiden willkürlich bleibenden Parameter p, r ausgedrückt zu denken.*

Zusatz: In dem Grenzfall II_B, in welchem

$$a = \frac{11}{4}p^2, \quad b = -\frac{11^2}{16}p^3, \quad q = \frac{11}{4}p^3,$$

lauten die alsdann vorhandenen zwei singulären Integrale

$$\int \frac{(x+4r_1)\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \int \frac{(x+4r_2)\,dx}{\sqrt{R(x)}};$$

dabei sind die zugehörigen Werte r_1, β_1, γ_1 und r_2, β_2, γ_2 durch die Gleichungen (30) und (28) gegeben.

Die elliptischen Integrale, auf welche diese singulären Integrale reduzierbar sind, sind durch die Formeln (24) und (25) bestimmt. Freilich wird dabei die Gleichung $x^3 + 3ax + b = 0$ als gelöst vorausgesetzt, und es ist wünschenswert, sich von dieser Voraussetzung unabhängig zu machen. Den einfachsten Weg dazu werden wir in § 6 kennenlernen.

§ 4.

Singuläre Integrale zweiter Art.

Wir könnten nun eine analoge Untersuchung mit genau analogen Resultaten unter der Voraussetzung durchführen, daß die beiden Faktoren $R_0(x)$, $R_1(x)$ von $R(x)$ ihre Rolle vertauschen, daß also die reduzierende Transformation jetzt von der Form wäre:

$$y = \frac{x^3 + 3ax + b}{\varepsilon' x^3 + 3\alpha' x^2 + 3\beta' x + \gamma'}.$$

Wir würden dann zu jedem der gefundenen reduzierbaren Integrale erster Gattung ein zweites, zu derselben Irrationalität $\sqrt{R(x)}$ gehöriges, ebenfalls durch eine Transformation dritten Grades reduzierbares Integral erhalten.

Dieser Mühe werden wir aber durch eine wichtige Bemerkung von Goursat überhoben. Schreibt man nämlich

$$(x^3 + 3ax + b)(x^3 + 3px^2 + q) = R(x; a, b, p, q)$$

und wendet auf das Integral

(1) $$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x; a, b, p, q)}}$$

die folgende Transformation der Variabeln und Koeffizienten an:

(35) $$x = \frac{1}{x'},$$
$$a = \frac{p'}{q'},\quad b = \frac{1}{q'},\quad p = \frac{a'}{b'},\quad q = \frac{1}{b'},$$

so geht das Integral über in

$$-\sqrt{b'q'}\int \frac{x'\,dx'}{\sqrt{R(x'; a', b', p', q')}},$$

und überdies bleibt die Relation (3) invariant:

$$q' = 4b' + 12a'p'.$$

Daher ist das Integral (4′) durch die Transformation (5′):

$$z = \frac{x'^3 + 3p'x'^2 + q'}{3x'^2 + 12a'}$$

auf ein elliptisches Integral reduzierbar, und indem man nun schließlich durch die zu (35) inverse Transformation, welche lautet

(36) $$x' = \frac{1}{x},$$
$$a' = \frac{p}{q},\quad b' = \frac{1}{q},\quad p' = \frac{a}{b},\quad q' = \frac{1}{b},$$

wieder zur Variabeln x und zu den Konstanten a, b, p, q zurückkehrt, erhält man die Reduktionsformel für das Integral (1). —

Die Goursatsche Transformation (35) führt nun aber *auch im singulären Fall* zum Ziel; denn es stellt sich heraus, daß dabei nicht nur die Relation (3), sondern *auch die für den singulären Fall charakteristische Relation* (19) *invariant* bleibt. Die Rechnung ergibt nämlich

$$F(p, q, a) = b^3 q^3 F(p', q', a').$$

Also folgt aus (19), wenn $b \neq 0$,

(19′) $$F(p', q', a') = 0.$$

Daraus folgt nun aber genau wie früher, daß auch die Gleichung (19′) in der Weise aufgelöst werden kann, daß a', q' durch einen Parameter r' rational ausgedrückt werden können durch Formeln (26′), die sich von (26) nur dadurch unterscheiden, daß alle Buchstaben akzentuiert sind; desgleichen gelten Gleichungen (27′), (28′) und (29′).

Drückt man jetzt in (29′) die Größen p', q', a' mittels (36) durch p, q, a, b aus und ersetzt dann a, b, q mittels (26) und (27) durch ihre Ausdrücke in r, so ergibt eine einfache Rechnung

(37) $$r' = -\frac{1}{20r}$$

und weiter aus (36), (26) und (27)

$$p' = \frac{p - 20\,r}{4\,r\,(11\,p + 5\,r)}. \tag{38}$$

Man erhält so der Goursatschen Transformation (35) entsprechend eine Transformation zwischen p, r und p', r', die sich ebenfalls als ein-eindeutig und von der Periode 2 erweist. —

Wir wenden jetzt auf das Integral

$$\int \frac{(x - 5\,r)\,d\,x}{\sqrt{R\,(x;\,a,b,p,q)}}$$

die Transformation (35) an, wobei gleichzeitig r die Transformation

$$r = -\frac{1}{20\,r'}$$

erfährt. Dann geht das Integral über in

$$\frac{5\,r}{\sqrt{b}\,q}\int \frac{(x' + 4\,r')\,d\,x'}{\sqrt{R\,(x';\,a',b',p',q')}}.$$

Das letztere Integral ist aber auf ein elliptisches reduzierbar durch die Transformation

$$z = \frac{x'^3 + 3\,p'\,x'^2 + q'}{3\,x'^2 + 3\,\beta'\,x' + \gamma'},$$

und indem man nun hierin durch die Transformationen (36) und (37) wieder zu den Größen x, p, r zurückkehrt, erhält man den

Satz IV: *Das Integral*

$$\int \frac{(x - 5\,r)\,d\,x}{\sqrt{R\,(x)}}$$

ist durch eine Transformation dritten Grades von der Form

$$y = \frac{x^3 + 3\,a\,x + b}{\varepsilon'\,x^3 + 3\,\alpha'\,x^2 + 3\,\beta'\,x + \gamma'}$$

auf ein elliptisches Integral reduzierbar; desgleichen im Grenzfall $\mathrm{II_B}$ *die beiden Integrale*

$$\int \frac{(x - 5\,r_1)\,d\,x}{\sqrt{R\,(x)}}, \quad \int \frac{(x - 5\,r_2)\,d\,x}{\sqrt{R\,(x)}}.$$

Wir wollen diese singulären Integrale „*singuläre Integrale zweiter Art*" nennen.

Wir bemerken noch, daß die Goursatsche Transformation (35) in dem speziellen Fall $b = 0$ versagt; trotzdem bleiben, wie wir später sehen werden, die daraus resultierenden Reduktionsformeln richtig.

§ 5.

Konjugierte reduzierbare Integrale.

Wir ziehen nun einen bekannten Satz aus der transzendenten Theorie der Reduktion hyperelliptischer Integrale heran: Ist u_1 ein hyperelliptisches

Integral erster Ordnung und erster Gattung, das durch eine rationale Transformation n-ten Grades auf ein elliptisches Integral reduziert werden kann, so gibt es nach dem Weierstraß-Picardschen Satz[9]) stets ein kanonisches Querschnittsystem A_1, A_2, B_1, B_2 der zugehörigen Riemannschen Fläche und eine Konstante C_1, derart daß das Integral $v_1 = C_1 u_1$ an diesen Querschnitten der Reihe nach die folgenden Periodizitätsmoduln besitzt:

$$1 \quad 0 \quad \tau_{11} \quad \frac{1}{n},$$

und umgekehrt.

Es gibt dann stets ein zweites, eindeutig bestimmtes Integral erster Gattung v_2, welches an denselben Querschnitten die Periodizitätsmoduln

$$0 \quad 1 \quad \frac{1}{n} \quad \tau_{22}$$

besitzt. Dieses Integral ist dann stets ebenfalls durch eine rationale Transformation n-ten Grades auf ein elliptisches Integral reduzierbar[10]).

Wir wollen zwei solche Integrale v_1, v_2 ein *Paar konjugierter reduzierbarer Integrale* nennen, dieselbe Bezeichnung aber auch auf irgend zwei Integrale u_1, u_2 ausdehnen, welche sich von zwei Integralen v_1, v_2 nur um konstante Faktoren unterscheiden.

Nun hat McDonald den folgenden Fundamentalsatz über solche konjugierten Integrale bewiesen[11]):

Es seien, in homogener Schreibweise,

$$u_1 = \int \frac{(x\,\delta)\,(d\,x,\,x)}{\sqrt{Q\,(x_1,\,x_2)}}, \qquad u_2 = \int \frac{(x\,\delta')\,(d\,x,\,x)}{\sqrt{Q\,(x_1,\,x_2)}}$$

zwei konjugierte hyperelliptische Integrale erster Ordnung, die durch Transformationen n-ten Grades auf je ein elliptisches Integral reduzierbar sind, und es sei

$$z = \frac{U}{V}$$

die reduzierende Transformation für u_1; alsdann ist $(x\,\delta)^{n-1}(x\,\delta')$ *apolar sowohl zu U als zu V.*

---

[9]) Vgl. darüber A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen, Leipzig 1903, S. 468—493.

[10]) Diese Folgerung aus dem Weierstraß-Picardschen Satz scheint zuerst Picard ausgesprochen zu haben, vgl. Bulletin de la Société Mathématique de France 11 (1882/83), S. 47 und Krazer, loc. cit., S. 487.

[11]) J. H. McDonald, A Problem in the Reduction of Hyperelliptic Integrals, Transactions of the American Mathematical Society 7 (1906), S. 578—587.

Wir wollen zunächst diesem Resultat eine für die Anwendung bequemere Form geben. Dazu schreiben wir symbolisch

$$U = a_x^n, \quad V = b_x^n, \quad (x\delta)^{n-1}(x\delta') = c_x^n.$$

Dann lautet die obige Apolaritätsbedingung symbolisch: $(ca)^n = 0$, $(cb)^n = 0$; aber: $(ca)^n = a_\delta^{n-1} a_{\delta'}$, $(cb)^n = b_\delta^{n-1} b_{\delta'}$; δ'_1, δ'_2 genügen also den beiden linearen Gleichungen

$$a_\delta^{n-1} a_1 \delta'_1 + a_\delta^{n-1} a_2 \delta'_2 = 0, \quad b_\delta^{n-1} b_1 \delta'_1 + b_\delta^{n-1} b_2 \delta'_2 = 0.$$

Beide Gleichungen sind verträglich, weil nach § 3 ihre Determinante

$$(ab)\, a_\delta^{n-1} b_\delta^{n-1} = 0,$$

da ja die linke Seite nichts anderes ist als die Funktionaldeterminante von U, V für den Wert $x = \delta$. Je nachdem man die erste oder die zweite Gleichung zur Bestimmung von $\delta'_1 : \delta'_2$ benutzt, erhält man:

$$(x\delta') = \varrho\, a_\delta^{n-1} a_x \quad \text{bzw.} \quad (x\delta') = \sigma\, b_\delta^{n-1} b_x,$$

wo ϱ, σ konstante Faktoren sind. *Eine* der beiden Bestimmungen kann illusorisch werden, dann aber sicher nicht die zweite, weil U und V teilerfremd sind. Wir erhalten also den folgenden *Zusatz zu McDonalds Satz*:

$(x\delta')$ ist bis auf einen konstanten Faktor gleich der $(n-1)$-ten Polare von U in Beziehung auf δ, und gleichzeitig bis auf einen konstanten Faktor gleich der $(n-1)$-ten Polare von V in Beziehung auf δ.

Wenden wir dieses Resultat zunächst auf das Goursatsche Integral (4) an, so ist

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_2 = 1, \quad U = x_1^3 + 3p x_1^2 x_2 + q x_2^3,$$

woraus sich ergibt: $(x\delta') = \varrho q x_2 = \varrho' x_2$.

Dagegen ist für das erste singuläre Integral (34_a)

$$\delta_1 = -4r, \quad \delta_2 = 1, \quad U = x_1^3 + 3p x_1^2 x_2 + 8r^3(3p - 10r) x_2^3.$$

Daraus ergibt sich:

$$(x\delta') = -8\varrho r(p - 2r)(x_1 - 5r x_2) = \varrho'(x_1 - 5r x_2).$$

Somit haben wir den Satz bewiesen:

Satz V: *Die beiden Goursatschen Integrale, und ebenso die beiden singulären Integrale*

$$\int \frac{(x + 4r)\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \int \frac{(x - 5r)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \tag{39}$$

sind konjugierte Integrale im Sinn der transzendenten Theorie.

Zusatz: Dasselbe gilt für die beiden Paare singulärer Integrale im Grenzfall $\mathrm{II_B}$, wo r das eine Mal durch r_1, das andere Mal durch r_2 zu ersetzen ist.

§ 6.

Reduktion der beiden singulären Integrale auf die Goursatsche Normalform.

Um nun schließlich für unsere singulären Integrale auch die elliptischen Integrale, auf die sie reduzierbar sind, in möglichst einfacher Form zu erhalten, stellen wir uns jetzt die Aufgabe, die beiden singulären Integrale (39) durch eine lineare Transformation der Integrationsvariabeln auf die Goursatsche Normalform zu bringen, wobei wir uns wieder der homogenen Schreibweise bedienen werden. Nach einem allgemeinen Satz von McDonald[12]) über konjugierte Integrale können wir die lineare Substitution, die das bewerkstelligt, unmittelbar hinschreiben; sie lautet einfach

$$x_1' = \varrho_1 (x_1 - 5 r x_2), \quad x_2' = \varrho_2 (x_1 + 4 r x_2), \tag{40}$$

wobei ϱ_1, ϱ_2 zwei willkürlich bleibende konstante Faktoren sind.

Durch die zu dieser Substitution inverse Substitution werden die beiden singulären Integrale

$$\int \frac{(x_1 + 4 r x_2)\,(d\,x, x)}{\sqrt{R(x_1, x_2;\, a, b, p, q)}}, \quad \int \frac{(x_1 - 5 r x_2)\,(d\,x, x)}{\sqrt{R(x_1, x_2;\, a, b, p, q)}}$$

in zwei Integrale von der Form[13])

$$C_1 \int \frac{x_2'\,(d\,x', x')}{\sqrt{R(x_1', x_2';\, a', b', p', q')}}, \quad C_2 \int \frac{x_1'\,(d\,x', x')}{\sqrt{R(x_1', x_2';\, a', b', p', q')}}$$

übergeführt. Dabei ist

$$R(x_1, x_2;\, a, b, p, q) = (x_1^3 + 3 a x_1 x_2^2 + b x_2^3)(x_1^3 + 3 p x_1^2 x_2 + q x_2^3);$$

a', b', p', q' sind gewisse Funktionen von a, b, p, q, r, ϱ_1, ϱ_2 und es ist

$$q' = 4 b' + 12 a' p'.$$

Darüber hinaus ergibt sich nun aber das wichtige Resultat, daß die beiden konstanten Faktoren ϱ_1, ϱ_2 sich so wählen lassen, daß

$$a' = a, \; b' = b, \; p' = p, \; q' = q.$$

Und zwar sind die speziellen Werte derselben, für welche dies stattfindet: $\varrho_1 = \frac{2}{3}$, $\varrho_2 = -\frac{1}{6r}$, so daß die Substitution (40) nunmehr lautet

$$x_1' = \frac{2}{3}(x_1 - 5 r x_2), \quad x_2' = -\frac{1}{6r}(x_1 + 4 r x_2). \tag{41}$$

---

[12]) J. H. McDonald, loc. cit. S. 585.

[13]) Die Bezeichnung hat nichts mit der von § 4 zu tun.

Ihre Determinante ist -1 und sie ist identisch mit ihrer inversen Substitution, also von der Periode 2:

$$(42)\qquad x_1 = \frac{2}{3}(x_1' - 5r\,x_2'),\quad x_2 = -\frac{1}{6r}(x_1' + 4r\,x_2').$$

In der Tat liefert die Anwendung der Substitution (42) nach den bekannten Regeln der Invariantentheorie, immer unter Benutzung der Gleichungen (26) und (27),

$$(43)\qquad \begin{aligned} x_1^3 + 3a\,x_1 x_2^2 + b\,x_2^3 &= -\frac{3r}{p-2r}(x_1'^3 + 3p\,x_1'^2 x_2' + q\,x_2'^3),\\ x_1^3 + 3p\,x_1^2 x_2 + q\,x_2^3 &= -\frac{p-2r}{3r}(x_1'^3 + 3a\,x_1' x_2'^2 + b\,x_2'^3),\end{aligned}$$

so daß wir also zunächst den Satz erhalten:

Satz VI: *Im singulären Fall bleibt die Funktion*

$$R(x_1, x_2) = (x_1^3 + 3a\,x_1 x_2^2 + b\,x_2^3)(x_1^3 + 3p\,x_1^2 x_2 + q\,x_2^3)$$

unter Vertauschung ihrer beiden kubischen Faktoren **invariant** *bei der linearen Substitution*

$$x_1 = \frac{2}{3}(x_1' - 5r\,x_2'),\quad x_2 = -\frac{1}{6r}(x_1' + 4r\,x_2'),$$

d. h. es ist

$$(44)\qquad R(x_1, x_2) = R(x_1', x_2').$$

Hieraus folgt nun weiter

$$(45)\qquad \begin{aligned} \int \frac{(x_1 + 4r\,x_2)(d\,x, x)}{\sqrt{R(x_1, x_2)}} &= 6r \int \frac{x_2'(d\,x', x')}{\sqrt{R(x_1', x_2')}},\\ \int \frac{(x_1 - 5r\,x_2)(d\,x, x)}{\sqrt{R(x_1, x_2)}} &= -\frac{3}{2}\int \frac{x_1'(d\,x', x')}{\sqrt{R(x_1', x_2')}}.\end{aligned}$$

Nun sind aber die Reduktionsformeln für die beiden Integrale auf der rechten Seite von Goursat[14]) her bekannt, und indem man schließlich noch in den zugehörigen reduzierenden Transformationen von den Variablen x_1', x_2' durch die Substitution (41) zu den Variablen x_1, x_2 zurückkehrt, erhält man die folgenden *Reduktionsformeln*[15]) *für die singulären Integrale:*

---

[14]) Bei Goursat, loc. cit., ist in Gleichung (17) der konstante Faktor $\sqrt{3\,q}$ zu ergänzen.

[15]) Will man die reduzierenden Transformationen in der in § 1 und § 4 gewählten einfacheren Form haben, so hat man noch lineare Transformationen der elliptischen Integrale vorzunehmen, wobei jedoch die letzteren wesentlich komplizierter werden.

Satz VII: *Es ist*

$$(46)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{(x+4r)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = 2r \int \frac{dy}{\sqrt{y[4(y-a)^3-(3py+b)^2]}} \\ \displaystyle y = -\frac{216\,r^4(x^3+3px^2+q)}{(p-2r)\,(x+4r)^2\,[(p+4r)\,x+4r\,(p-5r)]}, \\ \displaystyle\int \frac{(x-5r)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{\sqrt{q}}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z[4(bz+p)^3+q(3az-1)^2]}} \\ \displaystyle z = -\frac{(p-2r)^2\,(x^3+3ax+b)}{16r^3(x-5r)^3\,[(4p-5r)\,x+r(13p+40r)]}. \end{cases}$$

Darin ist $R(x)$ durch (2) definiert und die Koeffizienten a, b, p, q genügen den Gleichungen (3) und (19), während r durch (29) definiert ist; statt dessen kann man auch a, b, q mittels (26) und (27) durch die beiden unabhängig bleibenden Parameter p, r ausdrücken. —

Wir haben bereits in § 4 darauf aufmerksam gemacht, daß die Goursatsche Methode zur Herleitung des zweiten reduzierbaren Integrals aus dem ersten in dem speziellen *Fall* $b = 0$ versagt. Wir sind nunmehr in der Lage, die hier vorliegende Lücke auszufüllen. Da nämlich die Reduktionsformel (46_2) für $b = 0$ nicht illusorisch wird, so schließt man durch einen einfachen Grenzübergang, daß sie auch für $b = 0$ gültig bleibt. Für $b = 0$ liefert aber die Gleichung (27)

$$r = -\frac{11}{5}\,p,$$

woraus nunmehr nach (26) folgt

$$a = \frac{2\cdot 11^2}{3}\,p^2,\quad q = 8\cdot 11^2\,p^3.$$

Wir erhalten so den

Satz VIII: *In dem speziellen Fall* $b = 0$ *lauten die beiden singulären Integrale*

$$(47)\qquad \int \frac{\left(x-\frac{4\cdot 11}{5}\,p\right)dx}{\sqrt{R(x)}},\quad \int \frac{(x+11\,p)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

wo

$$R(x) = (x^3+2\cdot 11^2 p^2 x)(x^3+3px^2+8\cdot 11^2 p^3).$$

§ 7.

Weitere Folgerungen aus der Invarianz von $R(x_1, x_2)$.

Aus der Invarianz von $R(x_1, x_2)$ unter der Substitution (42) ergeben sich nun aber noch weitere Eigenschaften der singulären Integrale.

A. Für den Fall II_A:

Die Gleichungen (43) zeigen, daß die Wurzeln c_1, c_2, c_3 von

$$x^3 + 3ax + b$$

durch die nichthomogene Substitution

$$x' = -\frac{4r(x-5r)}{x+4r} \tag{48}$$

in die Wurzeln von $x^3 + 3px^2 + q$, die wir mit d_1, d_2, d_3 bezeichnen wollen, übergehen, so daß bei passender Wahl der Indizes die drei Gleichungen gelten

$$d_i = -\frac{4r(c_i - 5r)}{c_i + 4r}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Die Substitution (48) ist aber von der Periode 2 und hat die Fixpunkte $2r$, $-10r$. Also gehören die drei Wurzelpaare

$$(c_1, d_1), (c_2, d_2), (c_3, d_3)$$

derselben *quadratischen Involution* an. Daraus folgt[16]) aber der

Satz IX: *Im singulären Fall gibt es stets auch zwei zur Irrationalität* $\sqrt{R(x)}$ *gehörige Integrale erster Gattung, die durch quadratische Transformationen auf je ein elliptisches Integral reduzierbar sind, nämlich die beiden Integrale*

$$\int \frac{(x-2r)\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \int \frac{(x+10r)\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \tag{49}$$

und zwar beziehungweise durch die beiden Transformationen

$$v = \left(\frac{x-2r}{x+10r}\right)^2, \quad w = \left(\frac{x+10r}{x-2r}\right)^2. \tag{50}$$

In der Tat ergibt die Anwendung der zur Substitution

$$y_1 = x_1 - 2rx_2, \quad y_2 = x_1 + 10rx_2$$

inversen Substitution auf die Form $R(x_1, x_2)$ das Resultat

$$\begin{aligned} R(x_1, x_2) = \varkappa \{ & y_2^2 [(7p + 10r) y_1^2 + (p - 2r) y_2^2]^2 \\ & - y_1^2 [3(3p - 10r) y_1^2 - (p + 10r) y_2^2]^2 \}, \end{aligned} \tag{51}$$

wo

$$\varkappa = \frac{1}{3 \cdot 256 (p - 2r) r}.$$

Daraus ergeben sich unmittelbar die zugehörigen elliptischen Integrale.

---

[16]) Vgl. z. B. J. I. Hutchinson, On the Reduction of Hyperelliptic Functions ($p = 2$) by a Transformation of the Second Degree, Diss. Chicago, 1897.

Mit Hilfe des in § 5 angeführten Satzes von McDonald erhält man überdies den

Zusatz: Die beiden Integrale (49) sind konjugierte Integrale.

B. Für den Fall II_B.

Hier existieren, wie wir gesehen haben, drei Paare konjugierter Integrale vom Reduktionsgrad 3, deren Integranden lauten:

$$x_1,\ x_2;\ x_1 + 4r_1x_2,\ x_1 - 5r_1x_2;\quad x_1 + 4r_2x_2,\ x_1 - 5r_2x_2.$$

Ferner ist die Form $R(x_1, x_2)$ jetzt invariant unter den beiden linearen Substitutionen

$$T_1:\ x_1 = \frac{2}{3}(x_1' - 5r_1x_2'),\quad x_2 = -\frac{1}{6r_1}(x_1' + 4r_1x_2'),$$

$$T_2:\ x_1 = \frac{2}{3}(x_1' - 5r_2x_2'),\quad x_2 = -\frac{1}{6r_2}(x_1' + 4r_2x_2').$$

und daher auch bei den sämtlichen Substitutionen der von T_1 und T_2 erzeugten Gruppe.

Zur Bestimmung dieser Gruppe bilden wir zunächst das Produkt $T_1T_2 = S$:

$$S:\ x_1 = \frac{3+\sqrt{-11}}{6}x_1' + \frac{p}{3}\sqrt{-11}\,x_2',\quad x_2 = \frac{4\sqrt{-11}}{33p}x_1' + \frac{3-\sqrt{-11}}{6}x_2'.$$

Man zeigt nun weiter, daß S^3: $x_1 = -x_1'$, $x_2 = -x_2'$, also $S^6 = 1$. Da aber $T_1^2 = 1$, $T_2^2 = 1$, so ist $S^{-1} = T_2T_1$, also $T_1S = S^{-1}T_1 = S^5T$. Daraus folgt aber, daß die 12 Substitutionen

$$\Gamma = \{S^\mu T^\nu\},\ \mu = 0, 1, \ldots 5;\ \nu = 0, 1$$

eine *Gruppe* bilden und zwar die *homogene Dieder-Gruppe für $n = 3$.*

Für spätere Anwendungen erwähnen wir noch, daß die Substitution $ST_1 = T_3$ lautet

$$T_3:\ x_1 = -\frac{p\sqrt{-11}}{2}x_2',\quad x_2 = \frac{2\sqrt{-11}}{11p}x_1'.$$

Wendet man die Substitutionen der Gruppe Γ auf die oben genannten sechs reduzierbaren Integrale an, so werden dieselben, abgesehen von konstanten Faktoren, untereinander vertauscht. –

Aus der Invarianz von $R(x_1, x_2)$ unter Γ folgt nun weiter nach F. Kleins Theorie der endlichen Gruppen von linearen Substitutionen[17]),

[17]) F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, Leipzig, 1884, S. 37, 48, 49. Vgl. auch O. Bolza, On binary Sextics with linear Transformations into themselves, American Journal of Mathematics 9 (1888), S. 57.

daß $R(x_1, x_2)$ sich durch eine lineare Transformation der Variablen auf die *kanonische Form* bringen läßt:

$$t_1^6 + m t_1^3 t_2^3 + t_2^6,$$

wobei gleichzeitig die Substitutionen der Gruppe Γ in die von Klein (loc. cit. S. 37) angegebene kanonische Form übergehen.

Die fragliche Transformation läßt sich leicht bestimmen. Die der homogenen Substitution S entsprechende nichthomogene Substitution hat nämlich die Periode 3 und die beiden Fixpunkte

$$f_1 = \frac{11 + 3\sqrt{33}}{8}\, p, \quad f_2 = \frac{11 - 3\sqrt{33}}{8}\, p.$$

Daraus folgt, daß die Form $R(x_1, x_2)$ durch die zu

$$\varrho_1 t_1 = x_1 - f_1 x_2, \quad \varrho_2 t_2 = x_1 - f_2 x_2$$

inverse Substitution, wenn

$$\varrho_1^6 = \frac{3^3 \cdot 11^3 p^3}{4^3 f_2^3}, \quad \varrho_2^6 = \frac{3^3 \cdot 11^3 \cdot p^3}{4^3 \cdot f_1^3},$$

in die obige kanonische Form übergeht und zwar mit dem Wert[18])

$$m = \frac{\sqrt{-11}}{2}. \tag{52}$$

Dies führt zu folgendem

Satz X: *In dem Grenzfall* II_B *bleibt* $R(x_1, x_2)$ *bei einer Dieder-Gruppe* ($n = 3$) *von linearen Substitutionen von* x_1, x_2 *invariant, was zur Folge hat, daß die in diesem Fall vorhandenen drei Paare konjugierter Integrale mit dem Reduktionsgrad* 3 *sich durch eine lineare Transformation der Integrationsvariablen, abgesehen von konstanten Faktoren, auf die kanonische Form bringen lassen*

$$\int \frac{(\varrho_2 t_1 - \omega^\varkappa \varrho_1 t_2)\,(dt, t)}{\sqrt{\Re(t_1, t_2)}}, \quad \int \frac{(\varrho_1 t_1 - \omega^\varkappa \varrho_2 t_2)\,(dt, t)}{\sqrt{\Re(t_1 \cdot t_2)}}, \tag{53}$$

worin:

$$\Re(t_1, t_2) = t_1^6 + \frac{\sqrt{-11}}{2} t_1^3 t_2^3 + t_2^6, \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad \varkappa = 0, 1, 2.$$

Endlich gelten die am Ende des unter A. aus der Invarianz von $R(x_1, x_2)$ gezogenen Schlüsse nunmehr für jede der drei Substitutionen T_1, T_2, T_3 von der Periode 2, und wir erhalten so den

Satz XI: *In dem Grenzfall* II_B *gibt es gleichzeitig auch drei Paare zur Irrationalität* $R(x_1, x_2)$ *gehöriger konjugierter Integrale erster Gattung, die durch Transformationen zweiten Grades auf je ein elliptisches Integral*

[18]) Vorausgesetzt, daß man die bei der Bestimmung von ϱ_1, ϱ_2 noch willkürlich bleibenden sechsten Einheitswurzeln so wählt, daß $f_2 \varrho_1^2 = f_1 \varrho_2^2$.

reduzierbar sind. In den kanonischen Variablen t_1, t_2 geschrieben lauten sie[19]:

$$(54) \qquad \int \frac{(t_1 - \omega^\varkappa t_2)(dt, t)}{\sqrt{\Re(t_1, t_2)}}, \quad \int \frac{(t_1 + \omega^\varkappa t_2)(dt, t)}{\sqrt{\Re(t_1, t_2)}},$$

wo $\varkappa = 0, 1, 2$.

§ 8.

Der Hermitesche Fall.

Wir wollen zum Schluß nun noch den im Eingang erwähnten Grenzübergang durchführen, der auf den *Hermiteschen Spezialfall* führt.

Dazu wählen wir zwei Größen p_0, q_0 willkürlich, nur der Bedingung $q_0 \neq 0$ unterworfen, und setzen in den Formeln (29), (26) und (27) für r, a und b

$$p = \frac{p_0}{\varepsilon}, \quad q = \frac{q_0}{\varepsilon}$$

und lassen dann ε gegen 0 konvergieren. Die Grenzwerte von r, a, b, die wir mit r_0, a_0, b_0 bezeichnen, sind

$$r_0 = \frac{b_0}{44 a_0}, \quad a_0 = 2 r_0^2, \quad b_0 = 88 r_0^3.$$

Daraus folgt zwischen a_0 und b_0 die Relation

$$b_0^2 - 8 \cdot 11^2 a_0^3 = 0,$$

die man auch durch denselben Grenzübergang aus der für den singulären Fall charakteristischen Gleichung $F(p, q, a) = 0$ erhält. Gleichzeitig geht die Goursatsche Relation (3) über in

$$q_0 = 12 a_0 p_0.$$

Es müssen also $a_0 \neq 0$, $p_0 \neq 0$ sein, woraus folgt, daß hier der Fall II_B nicht eintreten kann und daß wir $p_0 = 1$ wählen dürfen.

Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt den Grenzübergang auch in den beiden Reduktionsformeln (46) vornehmen. Bezeichnen wir noch

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{y}{\varepsilon} = -y_0, \quad \lim_{\varepsilon=0} \varepsilon z = -z_0,$$

so erhalten wir, wenn wir schließlich überall den Index 0 weglassen, den

---

[19]) Diese Integrale sind übrigens nicht nur bei dem speziellen Wert (52) von m, sondern für *beliebige Werte von m* durch quadratische Transformationen auf je ein elliptisches Integral reduzierbar und treten in diesem Sinn bereits in der oben genannten Arbeit von J. I. Hutchinson auf, bei der Lösung der Aufgabe, alle hyperelliptischen Gebilde vom Geschlecht 2 zu bestimmen, für die es mehr als zwei Integrale erster Gattung gibt, die durch quadratische Transformationen auf je ein elliptisches Integral reduzierbar sind.

Satz XII: *Im Hermiteschen Fall gibt es zwei singuläre, durch Transformationen dritten Grades auf elliptische Integrale reduzierbare, konjugierte Integrale erster Gattung. Sie lauten mit den zugehörigen Reduktionsformeln:*

$$\int \frac{\left(x+\frac{b}{11a}\right)dx}{\sqrt{(x^3+3ax+b)\,(x^2+4a)}} = \frac{\sqrt{3}\,b}{22a}\int \frac{dy}{\sqrt{y\,[4a^3+(3y-b)^2]}},$$

$$y = \frac{2\cdot 81\,a^2\,(x^2+4a)}{\left(x+\frac{b}{11a}\right)^3},$$

und

$$\int \frac{\left(x-\frac{5b}{44a}\right)dx}{\sqrt{(x^3+3ax+b)(x^2+4a)}} = \frac{3\sqrt{a}}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z\,[(bz-1)^3-27a^3z^2]}},$$

$$z = \frac{11\,(x^3+3ax+b)}{2b\left(4x+\frac{13b}{44a}\right)\left(x-\frac{5b}{44a}\right)^2},$$

wobei zwischen a und b die Relation besteht:

$$b^2 - 8\cdot 11^2 a^3 = 0.$$

(Eingegangen am 29. 3. 1935.)

Construction de la fonction analytique effectuant la représentation conforme d'un domaine plan quelconque sur le cercle.

Von

F. Leja in Warschau.

---

1. Soit D un domaine borné et simplement connexe du plan de la variable complexe x. Nous supposerons que ce domaine contient le point $x = 0$ dans son intérieur. Désignons par F la frontière de D et par

$$\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n \tag{1}$$

$n + 1$ points quelconques situés sur F, n étant un nombre fixe.

Formons le produit à $\frac{1}{2} n (n + 1)$ facteurs que voici:

$$U(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \prod_{0 \leq j < k \leq n} \left| \frac{1}{\xi_j} - \frac{1}{\xi_k} \right|. \tag{2}$$

Lorsque les points (1) varient sur F, le produit (2) reste borné et atteint sur F un maximum (car F est fermé et borné et ne contient pas le point $x = 0$). Soit

$$x_0, x_1, \ldots, x_n \tag{3}$$

une suite de $n + 1$ points de F en lesquels ce maximum est atteint. On a donc quels que soient les points (1) de F

$$U(x_0, x_1, \ldots, x_n) \geqq U(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n). \tag{4}$$

Formons encore les $n + 1$ produits que voici[1]):

$$u_j = \left| \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_j}\right) \cdots \left(\frac{1}{x_{j-1}} - \frac{1}{x_j}\right)\left(\frac{1}{x_{j+1}} - \frac{1}{x_j}\right) \cdots \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_j}\right) \right|, \; j = 0, 1, \ldots, n$$

et supposons que, parmi eux, le produit u_0 soit le plus petit. On a donc quel que soit $j = 1, 2, \ldots, n$

$$u_0 \leqq u_j. \tag{5}$$

2. Cela posé, formons la fonction $\varphi_n(x)$ suivante

$$\varphi_n(x) = \frac{x}{x_0} \sqrt[n]{\frac{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n)}{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}} \cdot e^{\theta_n i} \tag{6}$$

où θ_n est un nombre réel déterminé comme il suit: Soit $x = a$ un point fixe, différent de zéro, du domaine D. Nous supposerons que la déter-

---

[1]) Quels que soient les points (3) on a évidemment la relation

$$u_0 \cdot u_1 \ldots u_n = [U(x_0, x_1, \ldots, x_n)]^2.$$

mination du radical et le nombre θ_n dans l'expression (6) soient choisis de manière que la valeur

$$\varphi_n(a)$$

soit réelle et positive. Dans ces conditions la fonction (6) est régulière et uniforme dans le domaine D.

Faisons maintenant varier n. On obtient une suite de fonctions analytiques intimement liées au domaine D,

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots, \tag{7}$$

régulières et uniformes dans D, s'annulant au point $x = 0$ et ayant des valeurs positives au point $x = a$ de ce domaine.

Je vais établir les propositions suivantes:

I. *La suite* (7) *tend dans le domaine D vers une fonction analytique régulière dans D*

$$\varphi_n(x) \to \varphi(x). \tag{8}$$

II. *L'équation*

$$y = \varphi(x) \tag{9}$$

effectue la représentation conforme du domaine D sur le cercle $|y| < 1$ de manière que les points $x = 0$ et $y = 0$ se correspondent et que l'image du point $x = a$ de D se trouve sur le rayon positif du cercle $|y| < 1$.

3. Démonstration. Effectuons la transformation

$$z = \frac{1}{x}$$

du plan de la variable x sur le plan de la variable z et soient D' et F' les images sur le plan des z du domaine D et de la frontière F respectivement. Il est clair que le domaine D' contient le point à l'infini dans son intérieur. Le produit

$$v(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \prod_{0 \leqq j < k \leqq n} |\zeta_j - \zeta_k|,$$

où n est quelconque mais fixe, et les points $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ varient sur F', reste borné et atteint sur F' un maximum. Il résulte du paragraphe 1 que ce maximum est atteint aux points

$$z_0, z_1, \ldots, z_n, \qquad \text{où} \qquad z_j = \frac{1}{x_j},$$

et que, parmi les produits

$$v_j = |(z_0 - z_j) \ldots (z_{j-1} - z_j)(z_{j+1} - z_j) \ldots (z_n - z_n)|,\ j = 0, 1, \ldots, n,$$

celui d'indice $j = 0$ est le plus petit.

Ceci étant, formons le polynome suivant

$$\Phi_n(z) = \frac{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)\dots(z_0-z_n)} \tag{10}$$

et faisons varier n. J'ai démontré ailleurs[2]) ce qui suit:

Le polynome (10) satisfait (quel que soit n) sur la frontière F' du domaine D' à l'inégalité

$$|\Phi_n(z)| \leqq 1$$

et la suite

$$\sqrt[n]{|\Phi_n(z)|} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

converge dans le domaine D'. La fonction limite $|\Phi(z)|$ de cette suite est telle qu'on a $|\Phi(z)| > 1$ dans D' et que $\lim |\Phi(z)| = 1$ si z tend vers un point quelconque de la frontière F' de D'.

Observons maintenant que, dans le domaine D du plan des x, on a identiquement

$$\left|\Phi_n\left(\frac{1}{x}\right)\right| = \left|\frac{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_1}\right)\dots\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_n}\right)}{\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_1}\right)\dots\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_n}\right)}\right| = \frac{1}{|\varphi_n(x)|^n}.$$

Il en résulte que les fonctions (7) satisfont sur la frontière F du domaine D à l'inégalité

$$|\varphi_n(x)| \geqq 1$$

et que la suite de leurs modules

$$|\varphi_1(x)|,\ |\varphi_2(x)|,\ \dots,\ |\varphi_n(x)|,\ \dots \tag{11}$$

converge partout dans le domaine D. La fonction limite de cette suite est plus petite que l'unité dans D et tend vers l'unité si x tend vers un point quelconque de la frontière F de D. D'autre part, cette fonction ne s'annule qu'au point $x = 0$.

4. Je dis que la suite (7) est uniformément bornée dans chaque domaine fermé Δ intérieur au domaine D. En effet, désignons par R le diamètre de D, par $r > 0$ la distance entre Δ et F et par $\eta > 0$ la distance entre F et le point $x = 0$. Si x est un point quelconque de Δ on a, d'après la formule (6),

$$|\varphi_n(x)| \leqq \frac{R}{\eta}\sqrt[n]{\frac{R^n}{r^n}} = \frac{R^2}{r\eta}$$

ce qui prouve notre assertion.

Je dis maintenant que la suite (7) converge uniformément dans chaque domaine fermé Δ intérieur à D.

[2]) Annales de la Soc. Polon. de Mathém. 12 (1934), p. 57—71.

En effet, supposons que Δ contienne dans son intérieur le point $x = a$ (appartenant, comme on sait, à D) et admettons que la suite (7) ne soit pas convergente dans Δ. Dans ce cas il existerait, d'après un théorème connu de P. Montel, deux suites partielles de la suite (7) tendant uniformément dans Δ vers des fonctions limites différentes:

$$\varphi_{\mu_k}(x) \to \varphi(x), \quad \varphi_{\nu_k}(x) \to \psi(x).$$

Mais on a $|\varphi(x)| = |\psi(x)|$, car la suite (11) converge dans Δ. D'autre part, les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont régulières dans Δ et $\varphi(a) = \psi(a) > 0$, car, quel que soit n, on a $\varphi_n(a) > 0$ et la limite de la suite (11) ne s'annule qu'au point $x = 0$. Il s'ensuit immédiatement que les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ ne peuvent pas être différentes et, par conséquent, la suite (7) converge dans Δ. La proposition I (du paragraphe 2) est donc démontrée.

Soit $\varphi(x)$ la fonction limite de la suite (7). La proposition II résulte du fait qu'on a $|\varphi(x)| < 1$ dans D et que $\lim |\varphi(x)| = 1$ si x tend vers la frontière F de D, car la fonction $\varphi(x)$ est régulière dans D[3]).

---

[3]) Pendant la correction des épreuves M. B. L. van der Waerden a bien voulu attirer mon attention sur le manque de démonstration de l'univalence (Schlichtheit) de $\varphi(x)$. Pour compléter ce point il suffit de prouver que la fonction

$$\psi(z) = \lim \sqrt[n]{.\varphi_n(z)} \cdot e^{-\vartheta_n t} = 1 : \varphi(x)$$

est univalente dans le domaine D'. Pour ce but considérons la fonction $\psi_0(z) = w$ effectuant la représentation conforme de D' sur le cercle $|w| > 1$ de sorte que les points $z = \infty$ et $w = \infty$ se correspondent. On sait que $\left|\frac{z}{\psi_0(z)}\right| \to d$ si $z \to \infty$, où d est le diamètre transfini (de M. Fekete) de la frontière F' de D'. D'autre part, j'ai prouvé dans le travail cité plus haut que $\left|\frac{z}{\psi(z)}\right| \to d$ si $z \to \infty$, donc le quotient $\left|\frac{\psi(z)}{\psi_0(z)}\right|$ tend vers 1 si z tend ou bien vers l'infini ou bien vers F'. On en déduit aussitôt que la fonction $\frac{\psi(z)}{\psi_0(z)}$ est constante dans D', donc $\psi(z)$ est univalente dans D', car $\psi_0(z)$ l'y est. Cette démonstration est appuyée sur l'existence de la fonction $\psi_0(z)$. On pourrait éviter cette hypothèse en démontrant directement que $\psi'(z) \neq 0$ dans D', mais, dans ce cas, la démonstration serait un peu plus longue.

(Eingegangen am 19. 1. 1935.)

Asymptotische Darstellung und Lage der Nullstellen spezieller ganzer Funktionen (Exponentialsummen).

Von

Martin Regensburger in München[1]).

Inhalt.

---

[1]) Diese Arbeit ist von der philosophischen Fakultät II. Sektion der Universität München als Dissertation angenommen worden. Herrn Prof. S. Bochner dankt der Verf. herzlich für die Stellung des Themas, Herrn Prof. F. Hartogs für seine Beratung während der Bearbeitung.

II. Teil.

Einleitung.

Es werden im ersten Teile dieser Arbeit Funktionen behandelt von der Form

$$F(z) = c_1 e^{a_1 z} + c_2 e^{a_2 z} + \ldots = \sum_1^{\infty} c_\nu e^{a_\nu z}.$$

Für die Zahlen a_ν, die komplex sind, gelte: $|a_\nu| \leqq a$, $a > 0$; $\sum_1^{\infty} |c_\nu|$ wird als konvergent vorausgesetzt, wobei die Zahlen c_ν auch komplex sind.

Es soll der Versuch gemacht werden, im Anschluß an Arbeiten von G. Pólya und E. Schwengeler[2]), in welchen bloß endliche Summen der obigen Art behandelt werden, Untersuchungen über Lage und Anzahl der Nullstellen bei diesen ganzen transzendenten Funktionen anzustellen.

Im zweiten Teile sollen für eine allgemeinere Klasse von Funktionen

$$\Phi(z) = \sum_1^{\infty} c_\nu P_\nu(z) e^{a_\nu z}$$

analoge Untersuchungen angestellt werden, wobei über die c_ν und a_ν dieselben Voraussetzungen gemacht werden wie bei $F(z)$; für alle Polynome $P_\nu(z)$ aber soll gelten:

$$|P_\nu(z)| = \left| \sum_0^{m_\nu} A_\mu^{(\nu)} z^\mu \right| \leqq (m+1) A |z|^m, \quad A > 0, \quad m > 0.$$

---

[2]) G. Pólya, Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen gewisser ganzer Funktionen, Sitz.-Ber. Bayr. Akad. d. Wiss. 1920. E. Schwengeler, Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen spezieller ganzer Funktionen (Exponentialsummen), Dissertation, Zürich 1925. Über damit zusammenhängende Fragestellungen sind noch folgende Arbeiten erschienen: E. C. Titchmarsh, The zeros of certain integral functions, London Math. Soc. Proceedings (2) 25 (1926), S. 283—302; L. A. Mac Coll, On the distribution of the zeros of sums of exponentials of polynomials, Transact. Amer. Math. Soc. 36 (1934), S. 341—360. Weitere Hinweise finden sich bei G. Pólya, Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, Math. Zeitschr. 29 (1929) in Fußnote [30]) (S. 594).

I. Teil.

§ 1.

Die Funktion $F(z)$ und ihr Verhalten gegenüber gewissen Transformationen[3]).

In der Funktion $F(z) = \sum_1^\infty {}^{\nu}\, c_\nu e^{a_\nu z}$ seien alle a_ν komplex und voneinander verschieden und alle $|a_\nu| \leqq a$, ferner seien alle c_ν komplex und $\sum_1^\infty {}^{\nu}\, |c_\nu|$ sei konvergent.

Da $c_\nu e^{a_\nu z}$ eine in der ganzen Ebene analytische Funktion ist, und da in $|z| \leqq R$ gilt:

$$|c_\nu e^{a_\nu z}| \leqq |c_\nu|\, e^{|a_\nu| \cdot |z|} \leqq |c_\nu|\, e^{a R},$$

da ferner

$$\sum_1^\infty {}^{\nu}\, |c_\nu|\, e^{a R} = e^{a R} \sum_1^\infty {}^{\nu}\, |c_\nu|$$

konvergiert, so ist $F(z) = \sum_1^\infty {}^{\nu}\, c_\nu e^{a_\nu z}$ eine für $|z| \leqq R$ gleichmäßig konvergente Reihe analytischer Funktionen und als solche analytisch in $|z| \leqq R$. Da nun R beliebig groß sein kann, so ist $F(z)$ in der ganzen Ebene analytisch, also eine ganze Funktion.

Die zu den a_ν konjugiert komplexen Punkte $\bar{a}_\nu$ sind für die folgenden Untersuchungen wichtig. Sie mögen *Exponentenpunkte* heißen. Es wird sich ein Zusammenhang zwischen der Lage der Exponentenpunkte und der der Nullstellen in der komplexen Ebene ermitteln lassen.

Da oft eine spezielle Lage der Exponentenpunkte $\bar{a}_\nu$ in der komplexen Ebene von Vorteil ist, so wird jetzt das Verhalten der Nullstellen z_n der Funktion $F(z)$ und ihrer Exponentenpunkte $\bar{a}_\nu$ gegenüber einfachen Transformationen untersucht.

Sind z_n die Nullstellen von $F(z)$, also $F(z_n) = 0$, so besitzt die Funktion $e^{a_0 z} F(z)$ dieselben Nullstellen. Die Exponentenpunkte sind $\bar{a}_0 + \bar{a}_\nu$. Diese haben also gegenüber denen von $F(z)$ eine Parallelverschiebung erfahren. Es ergibt sich also der Satz:

Bei einer Parallelverschiebung der Figur der Exponentenpunkte und festgehaltenen c_ν bleibt die Lage der Nullstellen ungeändert.

Die Funktion $F(z e^{i\gamma})$, wo γ eine reelle Zahl ist, hat die Nullstellen $z_n e^{-i\gamma}$, wenn z_n wieder die Nullstellen von $F(z)$ sind. Die Nullstellen

[3]) Vgl. E. Schwengeler, a. a. O., S. 7 ff.

von $F(ze^{i\gamma})$ gehen also aus denen von $F(z)$ durch Drehung um den Winkel $-\gamma$ um den Nullpunkt hervor. Da $F(ze^{i\gamma}) = \sum_1^\infty c_\nu e^{a_\nu z e^{i\gamma}}$, so sind die Exponentenpunkte dieser Funktion $\bar{a}_\nu e^{-i\gamma}$. Die Exponentenpunkte haben dieselbe Drehung wie die Nullstellen erfahren.

Mit Hilfe dieser Transformationen kann man die Figur der Exponentenpunkte in eine beliebige Lage der komplexen Ebene bringen, wovon öfters Gebrauch zu machen sein wird.

§ 2.

Komplexe Bereiche und Exponentenpunkte[4]).

a) Definition eines konvexen Bereiches. Eine ebene Punktmenge bildet einen konvexen Bereich, wenn sie 1. beschränkt, 2. abgeschlossen ist und 3. die Konvexitätseigenschaft hat, mit einer sie treffenden Geraden stets eine einzige Strecke gemein zu haben, die sich natürlich auch auf einen Punkt zusammenziehen kann.

Die dritte und wesentliche Eigenschaft kann man auch durch die gleichwertige Forderung ersetzen, daß die Punktmenge zu zwei beliebigen ihrer Punkte immer auch deren Verbindungsstrecke enthalten soll[5]).

Jeder Punkt, der im konvexen Bereich $\mathfrak{B}$ nicht enthalten ist, soll ein äußerer Punkt von $\mathfrak{B}$ heißen.

Unter der Begrenzung eines konvexen Bereiches $\mathfrak{B}$ verstehen wir die Gesamtheit der Punkte des Bereiches, die Häufungspunkte von äußeren Punkten sind.

b) Schranken und Stützgeraden eines konvexen Bereiches. Unter einer Schranke eines konvexen Bereiches $\mathfrak{B}$ versteht man eine Gerade, welche keinen einzigen Punkt von $\mathfrak{B}$ enthält.

Unter einer Stützgeraden eines konvexen Bereiches versteht man eine Gerade, die $\mathfrak{B}$ ganz auf einer Seite läßt und mit $\mathfrak{B}$ wenigstens einen Punkt gemeinsam hat.

Es gilt der Satz: Durch jeden äußeren Punkt eines konvexen Bereiches $\mathfrak{B}$ kann man eine Schranke, durch jeden Punkt der Begrenzung eine Stützgerade legen.

---

[4]) Das Folgende ist eine dem Zwecke dieser Arbeit angepaßte Wiedergabe der einschlägigen Darstellungen in: W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 43 ff.; C. Carathéodory, Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 32 (1911), S. 197—199.

[5]) Blaschke, Kreis und Kugel, S. 43.

c) Konvexe Hülle einer Punktmenge. $\mathfrak{M}$ sei eine beschränkte und abgeschlossene Menge, jedoch sonst beliebig. Unter einer Schranke von $\mathfrak{M}$ verstehen wir hier eine Gerade, die keinen Punkt von $\mathfrak{M}$ enthält und $\mathfrak{M}$ nicht in zwei getrennte Bestandteile zerlegt.

Es gilt der Satz, daß es einen kleinsten konvexen Bereich gibt, der $\mathfrak{M}$ enthält.

Dieser kleinste konvexe Bereich $\mathfrak{B}$ besteht aus der Gesamtheit der Punkte, durch welche keine Schranke von $\mathfrak{M}$ hindurchgeht.

d) Konvexer Bereich und Exponentenpunkte. Mit $\bar{a}_\nu$ werden wieder die Exponentenpunkte bezeichnet. Da alle $|a_\nu| \leqq a$, wobei $a > 0$, und da die Menge der $\bar{a}_\nu$ unendlich viele Elemente enthält, so gibt es nach dem Satze von Bolzano-Weierstraß wenigstens einen Häufungspunkt der Exponentenpunkte $\bar{a}_\nu$. Die Häufungspunkte der Exponentenpunkte $\bar{a}_\nu$ können zur Menge der $\bar{a}_\nu$ gehören oder nicht.

Betrachtet man die Menge, welche

1. alle Exponentenpunkte $\bar{a}_\nu$ enthält,
2. ferner alle Häufungspunkte der $\bar{a}_\nu$,

so ist diese Menge abgeschlossen. Sie kann daher nach dem vorigen mit einem kleinsten konvexen Bereich $\mathfrak{B}$ umschlossen werden, den wir *konvexe Hülle*[6]) der Menge oder auch das *Indikatordiagramm*[7]) der Funktion $F(z)$ nennen wollen.

§ 3.

Asymptotische Darstellung der Funktion $F(z)$, wenn an einer Ecke des Indikatordiagramms zwei geradlinige Stücke zusammenstoßen.

Die Begrenzung der konvexen Hülle enthalte den Exponentenpunkt $\bar{a}_\varkappa$, in dem die zwei Strecken $\bar{a}_\varkappa \bar{a}_1$ und $\bar{a}_\varkappa \bar{a}_2$ zusammenstoßen (Fig. 1). Durch $\bar{a}_\varkappa$ soll mehr als eine Stützgerade gehen; wir wollen dann $\bar{a}_\varkappa$ eine „Ecke" des Indikatordiagramms nennen. Die Stützgeraden durch $\bar{a}_\varkappa$ fallen in einen bestimmten Winkelraum, dessen Größe δ sei. Der Winkel mit dem Ursprung als Scheitel, dessen Schenkel senkrecht sind zu den Schenkeln des die Stützgeraden enthaltenden Winkels, hat auch die Öffnung δ.

Der Richtungswinkel der Strecke $\bar{a}_\varkappa \bar{a}_1$ sei δ_1, der von $\bar{a}_\varkappa \bar{a}_2$ sei δ_2, so daß $\delta_1 = \delta_2 + \delta - \pi$.

Es wird behauptet:

Für alle Strahlen von O aus, deren Richtungswinkel φ der Bedingung genügen:

$$\delta_2 + \frac{\pi}{2} - 2\pi < \varphi < \delta_1 - \frac{\pi}{2}$$

---

[6]) Blaschke, Kreis und Kugel, S. 54.

[7]) Pólya, Math. Annalen 89 (1923), S. 181; Schwengeler, a. a. O., S. 9.

oder

$$\delta_2 + \frac{\pi}{2} < \varphi + 2\pi < \delta_1 + \frac{3\pi}{2}, \tag{1}$$

die also zwischen jenen beiden Loten liegen, gilt für $F(z)$ die Beziehung

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{F(z)}{c_\varkappa e^{a_\varkappa z}} = 1, \tag{2}$$

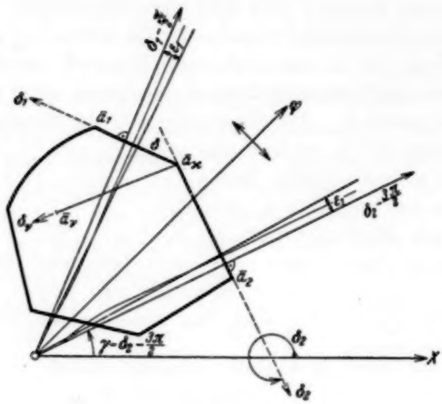


Fig. 1.

wo $z = r e^{i\varphi}$, und φ unverändert bleiben soll. Wir wollen für diese Grenzbeziehung kurz sagen: $F(z)$ läßt sich für die angegebenen Strahlen asymptotisch darstellen in der Form

$$F(z) \sim c_\varkappa e^{a_\varkappa z}.$$

Zum Beweise schreiben wir:

$$F(z) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\, c_\nu e^{a_\nu z} = c_\varkappa e^{a_\varkappa z}\Big(1 + \sum_{1}^{\infty}{}'_{\nu}\, \bar{c}_\nu e^{(a_\nu - a_\varkappa) z}\Big),$$

wo $\frac{c_\nu}{c_\varkappa} = \bar{c}_\nu$ gesetzt ist und $\sum\limits_{1}^{\infty}{}'_{\nu}$ bedeutet, daß bei der Summation der Index $\varkappa$ auszulassen ist. Ferner erhält man

$$\left| \frac{F(z)}{c_\varkappa e^{a_\varkappa z}} - 1 \right| = \left| \sum_{1}^{\infty}{}'_{\nu}\, \bar{c}_\nu e^{(a_\nu - a_\varkappa) z} \right| \leqq \sum_{1}^{\infty}{}'_{\nu}\, |\bar{c}_\nu| e^{\Re (a_\nu - a_\varkappa) z} \tag{3}$$

Es sei[8])

$$a_\nu - a_\varkappa = |a_\nu - a_\varkappa| (\cos \delta'_\nu + i \sin \delta'_\nu) = |a_\nu - a_\varkappa| e^{i\delta'_\nu};$$

δ'_ν ist der Winkel, den die Verbindungsstrecke $a_\varkappa a_\nu$ mit der positiven reellen Achse bildet.

Dann ist

$$\Re (a_\nu - a_\varkappa) z = \Re |a_\nu - a_\varkappa| r e^{i(\varphi + \delta'_\nu)} = |a_\nu - a_\varkappa| r \cos (\varphi + \delta'_\nu).$$

An Stelle des Winkels δ'_ν der Strecke $a_\varkappa a_\nu$ mit der positiven reellen Achse ist es zweckmäßig, den Winkel δ_ν einzuführen, den die zu $a_\varkappa a_\nu$ spiegelbildlich (bezüglich der reellen Achse) gelegene Strecke $\bar{a}_\varkappa \bar{a}_\nu$ mit der positiven reellen Achse bildet.

Zwischen beiden besteht die Beziehung

$$\delta'_\nu + \delta_\nu = 2\pi, \quad \text{also} \quad \delta'_\nu = 2\pi - \delta_\nu$$

und es wird dann

$$(4) \quad \Re (a_\nu - a_\varkappa) z = |a_\nu - a_\varkappa| r \cos (\varphi + \delta'_\nu) = |a_\nu - a_\varkappa| r \cos (\varphi - \delta_\nu).$$

Es gilt aber wegen der Konvexität des Indikatordiagrammes, das alle Exponentenpunkte $\bar{a}_\nu$ enthält, folgende Ungleichung:

$$(5) \quad \delta_1 \leqq \delta_\nu \leqq \delta_2.$$

Beachtet man die Beziehung (1), so folgt:

$$\frac{\pi}{2} < \varphi + 2\pi - \delta_\nu < \frac{3\pi}{2}$$

und somit

$$(6) \quad \cos (\varphi - \delta_\nu) < 0.$$

In unserer zu betrachtenden Summe (3), die jetzt

$$\sum_1^\infty{}' |\bar{c}_\nu| e^{|a_\nu - a_\varkappa| r \cos (\varphi - \delta_\nu)}$$

lautet, sind also alle Exponenten negativ.

Zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ wird jetzt n so bestimmt, daß

$$\sum_{n+1}^\infty{}' |\bar{c}_\nu| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann wird für die endlich vielen Glieder $\nu = 1, 2, \ldots, n$ r_0 so groß gewählt, daß

$$\sum_1^n{}' |\bar{c}_\nu| e^{|a_\nu - a_\varkappa| r \cos (\varphi - \delta_\nu)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

[8]) Cf. Schwengeler, a. a. O., S. 14.

für $r \geqq r_0$. Jetzt ist

$$\sum_1^{\infty}{}' |\bar{c}_\nu| e^{|a_\nu - a_\varkappa| r \cos(\varphi - \delta_\nu)} \leqq \sum_1^{n}{}' |c_\nu| e^{|a_\nu - a_\varkappa| r \cos(\varphi - \delta_\nu)} + \sum_{n+1}^{\infty}{}' |\bar{c}_\nu| < \varepsilon$$

für $r \geqq r_0$ oder

$$\text{(2a)} \quad \left| \frac{F(z)}{c_\varkappa e^{a_\varkappa z}} - 1 \right| < \varepsilon \text{ für } r \geqq r_0 \text{ und } z = r e^{i\varphi}, \left(\delta_2 - \frac{3\pi}{2} < \varphi < \delta_1 - \frac{\pi}{2}\right),$$

wie behauptet.

Der Wert von r_0, von dem an die Beziehung (2a) gilt, ist abhängig von dem vorgegebenen Werte ε und von der Richtung φ des Strahles, auf dem $z = re^{i\varphi}$ wandert. Es ist aber möglich, ein r_1 anzugeben, das nicht mehr von φ abhängt, wenn nur die Richtung φ ganz im Innern des betrachteten Winkelraumes liegt, d. h. wenn

$$\text{(7)} \qquad \delta_2 - \frac{3\pi}{2} + \varepsilon_1 \leqq \varphi \leqq \delta_1 - \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1,$$

wobei ε_1 beliebig klein gewählt werden darf.

Dann ist nämlich unter Beachtung von (5)

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 \leqq \varphi + 2\pi - \delta_\nu \leqq \frac{3\pi}{2} - \varepsilon_1$$

und somit

$$\cos(\varphi - \delta_\nu) \leqq -\sin\varepsilon_1 \; (< 0).$$

Bestimmt man jetzt r_1 so, daß

$$\sum_1^{n}{}' |\bar{c}_\nu| e^{-|a_\nu - a_\varkappa| r \sin\varepsilon_1} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für } r \geqq r_1,$$

so ist

$$\sum_1^{\infty}{}' |\bar{c}_\nu| e^{|a_\nu - a_\varkappa| r \cos(\varphi - \delta_\nu)} \leqq \sum_1^{n}{}' |\bar{c}_\nu| e^{-|a_\nu - a_\varkappa| r \sin\varepsilon_1} + \sum_{n+1}^{\infty}{}' |\bar{c}_\nu| < \varepsilon$$
$$\text{für } r \geqq r_1.$$

Dabei ist r_1 abhängig von ε und ε_1, nicht mehr aber von φ. Also gilt (2) für den betrachteten Winkelraum gleichmäßig, d. h. unabhängig von φ, sofern φ der Bedingung (7) genügt.

§ 4.

Asymptotische Darstellung außerhalb logarithmischer Streifen[9]).

Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen lassen noch eine Verfeinerung zu. Die Beziehung (2), die nach dem vorigen Paragraphen zwischen den Schenkeln des beiderseits um ε_1 verkleinerten Winkels gleichmäßig galt,

[9]) Schwengeler, a. a. O., S. 13 ff.

besteht sogar noch bis zu logarithmischen Linien, die die Strahlen der Richtung $\delta_2 - \frac{3\pi}{2}$ und $\delta_1 - \frac{\pi}{2}$ zur Achse haben, und zwar gleichmäßig (Fig. 1).

Um den Beweis dafür zu erbringen, drehen wir das Indikatordiagramm so um den Nullpunkt, daß der Strahl von der Richtung $\delta_2 - \frac{3\pi}{2}$ mit der positiven reellen Achse zusammenfällt. Zu diesem Zwecke müssen wir die z-Ebene durch die Transformation $z = \zeta e^{i\gamma}$, wo $\gamma = \delta_2 - \frac{3\pi}{2}$ ist, in die ζ-Ebene überführen.

Durch diese Drehung wird die Allgemeingültigkeit der Resultate nicht gefährdet. Wenn nämlich in der z-Ebene für den Exponentenpunkt $\bar{a}_\varkappa$ und für eine Richtung φ, wo $z = re^{i\varphi}$ ist, gilt

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{F(z)}{c_\varkappa e^{a_\varkappa z}} = 1,$$

so ist dann in der ζ-Ebene, da $z = \zeta e^{i\gamma}$,

$$\lim_{|\zeta|\to\infty} \frac{F(\zeta e^{i\gamma})}{c_\varkappa e^{a_\varkappa \zeta e^{i\gamma}}} = 1$$

oder

$$\lim_{|\zeta|\to\infty} \frac{\sum_1^\infty c_\nu e^{a_\nu \zeta e^{i\gamma}}}{c_\varkappa e^{a_\varkappa \zeta e^{i\gamma}}} = \lim_{|\zeta|\to\infty} \frac{\sum_1^\infty c_\nu e^{a_\nu^* \zeta}}{c_\varkappa e^{a_\varkappa^* \zeta}} = \lim_{|\zeta|\to\infty} \frac{f(\zeta)}{c_\varkappa e^{a_\varkappa^* \zeta}} = 1,$$

wo $a_\nu e^{i\gamma} = a_\nu^*$ und $\sum_1^\infty c_\nu e^{a_\nu^* \zeta} = f(\zeta)$ gesetzt wurde.

Die Exponentenpunkte $\bar{a}_\nu^*$ der ζ-Ebene, also auch $\bar{a}_\varkappa^*$, sind aus den Exponentenpunkten $\bar{a}_\nu$ der z-Ebene wegen $\bar{a}_\nu^* = \bar{a}_\nu e^{-i\gamma}$ durch Drehung um den Winkel $-\gamma$ um den Ursprung hervorgegangen; auch die Richtung des Strahles der ζ-Ebene ist wegen $\zeta = z e^{-i\gamma}$ durch Drehung um den Winkel $-\gamma$ aus der Richtung des betrachteten Strahles der ζ-Ebene hervorgegangen. In der ζ-Ebene gilt also dieselbe Grenzbeziehung für die transformierten Elemente.

Ebenso gelten die Umformungen rückwärts.

Das Indikatordiagramm ist also so gedreht worden (Fig. 2), daß die Strecke $\bar{a}_\varkappa \bar{a}_2$ senkrecht zur positiven reellen Achse liegt. Es wird bewiesen, daß Beziehung (2) für $r \geqq r_0$ in dem Gebiete zwischen $y = k \log x$ und $y = x \operatorname{tg} \varepsilon_1$ gilt, wobei k und ε_1 zwei beliebig zu wählende positive Konstanten sind, ε_1 hinreichend klein.

Zum Beweise untersuchen wir wieder (3).

Dort setzen wir analog den Bezeichnungen in § 3

$$a_\nu - a_\varkappa = |a_\nu - a_\varkappa|(\cos\delta'_\nu + i\sin\delta'_\nu) = |a_\nu - a_\varkappa|(\cos\delta_\nu - i\sin\delta_\nu);$$

δ_ν ist der Winkel, den die Strecke $\bar a_\varkappa \bar a_\nu$ mit der positiven reellen Achse bildet (Fig. 2). Wenn man noch $z = x + iy$ setzt, so erhält man

$$\Re(a_\nu - a_\varkappa)z = |a_\nu - a_\varkappa|(x\cos\delta_\nu + y\sin\delta_\nu).$$

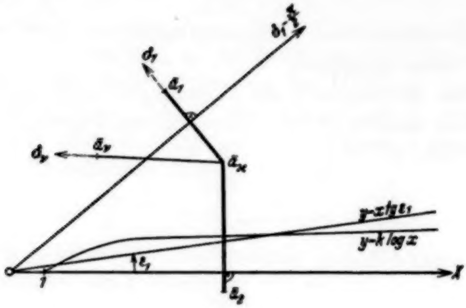


Fig. 2.

Jetzt werden folgende Fälle unterschieden:

1. Fall: $\qquad \frac{\pi}{2} < \delta_1 < \pi.$

Dann ist

$$\left(\frac{\pi}{2} <\right) \delta_1 \leqq \delta_\nu \leqq \frac{3\pi}{2}.$$

Die Winkel δ_ν werden eingeteilt in $\delta_{\nu 1}$ und $\delta_{\nu 2}$, für welche gilt:

$$\left(\frac{\pi}{2} <\right) \delta_1 \leqq \delta_{\nu 1} \leqq 2\pi - \delta_1 \left(< \frac{3\pi}{2}\right), \tag{8}$$

$$(\pi <)\, 2\pi - \delta_1 \leqq \delta_{\nu 2} \leqq \frac{3\pi}{2}. \tag{9}$$

Wir erhalten dann für die Summe (3):

$$\sum_1^\infty{}' |\bar c_\nu|\, e^{|a_\nu - a_\varkappa|(x\cos\delta_\nu + y\sin\delta_\nu)}$$

$$= \sum_1^\infty{}_1' |\bar c_{\nu 1}|\, e^{|a_{\nu 1} - a_\varkappa|(x\cos\delta_{\nu 1} + y\sin\delta_{\nu 1})} + \sum_1^\infty{}_2' |\bar c_{\nu 2}|\, e^{|a_{\nu 2} - a_\varkappa|(x\cos\delta_{\nu 2} + y\sin\delta_{\nu 2})}.$$

a) **Abschätzung von** $\sum_1'$. Es ist wegen (8)

$$\cos\delta_{\nu 1} \leqq \cos\delta_1\,(< 0); \quad \sin\delta_{\nu 1} \leqq \sin\delta_1\,(< 1)$$

und

$$x \cos\delta_{\nu 1} + y \sin\delta_{\nu 1} \leqq x\cos\delta_1 + y\sin\delta_1$$
$$\leqq x\cos\delta_1 + x \operatorname{tg}\varepsilon_1 \sin\delta_1 = x(\cos\delta_1 + \operatorname{tg}\varepsilon_1 \sin\delta_1)$$

für $0 < y < x \operatorname{tg}\varepsilon_1$ und $x \geqq x_0'$.

Wählt man jetzt ε_1 so klein, daß

$$\cos\delta_1 + \operatorname{tg}\varepsilon_1 \sin\delta_1 < 0,$$

so ist die Summe

$$\sum\nolimits_1^{\nu} |\bar{c}_{\nu 1}|\, e^{|a_{\nu 1} - a_\varkappa|(x\cos\delta_{\nu 1} + y\sin\delta_{\nu 1})} \leqq \sum\nolimits_1^{\nu} |\bar{c}_{\nu 1}|\, e^{|a_{\nu 1} - a_\varkappa| x(\cos\delta_1 + \operatorname{tg}\varepsilon_1 \sin\delta_1)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

für $x \geqq x_1$ ähnlich wie in § 3.

b) Abschätzung von $\sum\nolimits_2^{\nu}$. Wegen (9) ist

$$\cos\delta_{\nu 2} \leqq 0; \quad \sin\delta_{\nu 2} \leqq \sin(2\pi - \delta_1) = -\sin\delta_1 \,(< 0).$$

Man erhält dann, wenn man noch $y \geqq k\log x$ beachtet, für $x \geqq x_0'$

$$x\cos\delta_{\nu 2} + y\sin\delta_{\nu 2} \leqq -y\sin\delta_1 \leqq -k\log x \sin\delta_1.$$

Für die Summe ergibt sich dann

$$\sum\nolimits_2^{\nu} |\bar{c}_{\nu 2}|\, e^{|a_{\nu 2} - a_\varkappa|(x\cos\delta_{\nu 2} + y\sin\delta_{\nu 2})}$$
$$\leqq \sum\nolimits_2^{\nu} |\bar{c}_{\nu 2}|\, e^{-|a_{\nu 2} - a_\varkappa| k \log x \sin\delta_1} = \sum\nolimits_2^{\nu} |\bar{c}_{\nu 2}|\, x^{-|a_{\nu 2} - a_\varkappa| k\sin\delta_1}$$

Für hinreichend großes $x \geqq x_2$ ist dann wie in den früheren Abschätzungen

$$\sum\nolimits_2^{\nu} |\bar{c}_{\nu 2}|\, x^{-|a_{\nu 2} - a_\varkappa| k \sin\delta_1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Faßt man die Abschätzungen von a) und b) zusammen, so erhält man

$$\sum_{1}^{\infty}{}' |\bar{c}_\nu|\, e^{|a_\nu - a_\varkappa|(x\cos\delta_\nu + y\sin\delta_\nu)} < \varepsilon$$

für $x \geqq x_0$, wo x_0 die größte der Zahlen x_1 und x_2 ist, gleichmäßig für alle y, welche der Bedingung genügen:

$$k\log x \leqq y \leqq x \operatorname{tg}\varepsilon_1.$$

2. Fall: $$\pi \leqq \delta_1 \leqq \frac{3\pi}{2}.$$

Dann ist:

$$(\pi \leqq)\ \delta_1 \leqq \delta_\nu \leqq \frac{3\pi}{2}.$$

Die Winkel δ_ν werden eingeteilt in $\delta_{\nu 1}$ und $\delta_{\nu 2}$, für welche gilt:

$$\pi \leqq \delta_{\nu 1} \leqq \frac{5\pi}{4}, \tag{10}$$

$$\frac{5\pi}{4} < \delta_{\nu 2} \leqq \frac{3\pi}{2}. \tag{11}$$

Die Summe (3) wird dementsprechend in $\sum_1^{\nu}$ mit $\delta_{\nu 1}$ und $\sum_2^{\nu}$ mit $\delta_{\nu 2}$ zerlegt.

Man erhält wegen (10) für alle Glieder aus $\sum_1^{\nu}$

$$x \cos \delta_{\nu 1} + y \sin \delta_{\nu 1} \leqq x \cos \frac{5\pi}{4} + y \sin \pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} x.$$

Für die Glieder aus $\sum_2^{\nu}$ bekommt man wegen (11)

$$x \cos \delta_{\nu 2} + y \sin \delta_{\nu 2} \leqq y \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} y \leqq -\frac{\sqrt{2}}{2} k \log x \quad \text{für} \quad x \geqq x_0'.$$

Die weitere Abschätzung von $\sum_1^{\nu}$ und $\sum_2^{\nu}$ verläuft wie im ersten Falle und führt zu dem gleichen Ergebnis.

Dieser Paragraph erbrachte also den Beweis dafür, daß sogar für $k \log x \leqq y \leqq x \operatorname{tg} \varepsilon_1$ gleichmäßig

$$\left| \sum_{1}^{\infty}{}' \bar{c}_\nu e^{(a_\nu - a_\varkappa) z} \right| < \varepsilon,$$

sobald $x \geqq x_0$, wo x_0 von y unabhängig ist, und daß somit Beziehung (2) bis einschließlich zur logarithmischen Linie $y = k \log x$ gültig bleibt. Über die Steigung k wurde nur vorausgesetzt, daß

(12) $$k > 0.$$

§ 5.

Asymptotische Darstellung von $F(z)$, wenn an einer Ecke des Indikatordiagramms zwei nicht geradlinige Stücke zusammenstoßen.

Auch wenn in einer Ecke des Indikatordiagramms zwei nicht geradlinige Begrenzungsstücke zusammenstoßen, läßt sich die Darstellung von $F(z)$ in der Form (2) durchführen. Es kann hier die gleichmäßige (d. h. von φ unabhängige) Konvergenz sogar für den ganzen Winkelraum bewiesen werden, der gebildet ist von den zwei Strahlen durch den Ursprung, die senkrecht zu den berührenden Stützgeraden durch die Ecke $\bar{a}_\varkappa$ sind (Fig. 3), während in § 4 nur für einen um ε_1 verkleinerten Winkelraum diese Tatsache bewiesen werden konnte.

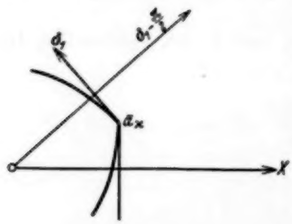


Fig. 3.

Zur Vereinfachung der Darstellung denken wir uns das Indikatordiagramm so gedreht, daß die eine berührende Stützgerade in Richtung der Y-Achse fällt, so daß die positive reelle Achse der eine Schenkel des Winkelraumes wird. Wie in § 5 bezeichnen wir mit δ_1 den Winkel der

anderen berührenden Stützgeraden mit der positiven reellen Achse. Es gilt dann für alle φ des Intervalls

$$0 \leqq \varphi \leqq \delta_1 - \frac{\pi}{2}$$

und für alle $z = r e^{i\varphi}$ die Beziehung (2)

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{F(z)}{c_\varkappa e^{a_\varkappa z}} = 1,$$

wo $a_\varkappa$ der Punkt ist, der zum Exponentenpunkt $\bar{a}_\varkappa$ konjugiert ist.

Zum Beweise unterscheiden wir nach der Größe des Winkels δ_1 zwei Fälle:

1. Fall: $$\frac{\pi}{2} < \delta_1 < \pi.$$

Dann ist

$$0 \leqq \varphi \leqq \delta_1 - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2};$$

$$1 \geqq \cos\varphi \geqq \sin\delta_1 > 0; \quad 0 \leqq \sin\varphi \leqq -\cos\delta_1 < 1.$$

Die Richtungswinkel δ_ν der Strecken $\bar{a}_\varkappa \bar{a}_\nu$ genügen der Beziehung

$$\left(\frac{\pi}{2} <\right) \delta_1 < \delta_\nu < \frac{3\pi}{2}.$$

a) Für alle δ_ν des Intervalls $\delta_1 < \delta_\nu < \pi$ gilt

$$0 > \cos\delta_1 > \cos\delta_\nu; \quad 1 > \sin\delta_1 > \sin\delta_\nu$$

und

$$\cos(\varphi - \delta_\nu) = \cos\varphi\cos\delta_\nu + \sin\varphi\sin\delta_\nu$$
$$\leqq \sin\delta_1\cos\delta_\nu - \cos\delta_1\sin\delta_\nu = \sin(\delta_1 - \delta_\nu) < 0,$$

wo die Schranke $\sin(\delta_1 - \delta_\nu)$ unabhängig von φ ist.

b) Für alle δ_ν des Intervalls $\pi \leqq \delta_\nu \leqq \frac{5\pi}{4}$ gilt:

$$-1 \leqq \cos\delta_\nu \leqq -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 0 \geqq \sin\delta_\nu \geqq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

und

$$\cos(\varphi - \delta_\nu) = \cos\varphi\cos\delta_\nu + \sin\varphi\sin\delta_\nu \leqq \sin\delta_1\cos\delta_\nu < 0.$$

c) Für alle δ_ν aus $\frac{5\pi}{4} < \delta_\nu < \frac{3\pi}{2}$ ist

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\delta_\nu < 0; \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} > \sin\delta_\nu > -1$$

und

$$\cos(\varphi - \delta_\nu) = \cos\varphi\cos\delta_\nu + \sin\varphi\sin\delta_\nu < \sin\delta_1\cos\delta_\nu < 0.$$

Für alle δ_ν, die im ersten Falle möglich sind, kann also für $\cos(\varphi - \delta_\nu)$ eine Schranke gefunden werden, die von φ nicht abhängt.

2. Fall: $$\pi \leqq \delta_1 < \frac{3\pi}{2}.$$

Dann ist

$$0 \leqq \varphi \leqq \delta_1 - \frac{\pi}{2} \, (< \pi)$$

und

$$(\pi \leqq) \, \delta_1 < \delta_\nu < \frac{3\pi}{2},$$

also

$$\cos \delta_\nu < 0, \quad \sin \delta_\nu < 0.$$

a) Wenn nun $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4}$, dann ist

$$\cos(\varphi - \delta_\nu) = \cos\varphi \cos\delta_\nu + \sin\varphi \sin\delta_\nu \leqq \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\delta_\nu < 0.$$

b) Für $\frac{\pi}{4} < \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ wird

$$\cos(\varphi - \delta_\nu) = \cos\varphi \cos\delta_\nu + \sin\varphi \sin\delta_\nu \leqq \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\delta_\nu < 0.$$

c) Wenn $\frac{\pi}{2} < \varphi \leqq \delta_1 - \frac{\pi}{2}$, dann ist $\delta_1 > \pi$ und

$$0 > \cos\varphi \geqq \sin\delta_1; \quad 1 > \sin\varphi \geqq -\cos\delta_1 \, (> 0).$$

Man erhält dann

$$\begin{aligned} \cos(\varphi - \delta_\nu) &= \cos\varphi \cos\delta_\nu + \sin\varphi \sin\delta_\nu \\ &\leqq \sin\delta_1 \cos\delta_\nu - \cos\delta_1 \sin\delta_\nu = \sin(\delta_1 - \delta_\nu) < 0. \end{aligned}$$

Auch im zweiten Falle läßt sich also für $\cos(\varphi - \delta_\nu)$ eine Schranke finden, die φ nicht enthält.

Die im ersten und zweiten Falle gefundenen Abschätzungen ergeben, wenn man, ausgehend von der Beziehung

$$\left| \frac{F(z)}{c_\varkappa e^{a_\varkappa z}} - 1 \right| \leqq \sum_1^\infty{}' \, |\bar{c}_\nu| \, e^{|a_\nu - a_\varkappa| \, r \cos(\varphi - \delta_\nu)}$$

die Überlegungen des § 4 anwendet, daß

$$\lim_{|z| \to \infty} \left| \frac{F(z)}{c_\varkappa e^{a_\varkappa z}} - 1 \right| = 0$$

im ganzen Winkelraum $0 \leqq \varphi \leqq \delta_1 - \frac{\pi}{2}$ gleichmäßig, d. h. unabhängig von φ.

§ 6.

Asymptotische Darstellung von $F(z)$ für gewisse Richtungen, wenn die Begrenzung des Indikatordiagramms eine Kurve enthält.

Die konvexe Hülle der Exponentenpunkte enthalte in der Begrenzung ein nicht geradliniges Stück (Fig. 4). Wir nehmen an, daß auf diesem nicht geradlinigen Stücke auch Exponentenpunkte $\bar{a}_\nu$ liegen.

Ist $\bar{a}_j$ ein Punkt aus der Menge der Exponentenpunkte $\bar{a}_\nu$, der auf dem Kurvenstück liegt, so geht durch ihn nur eine einzige Stützgerade des konvexen Bereiches. Durch jeden benachbarten Exponentenpunkt auf der Kurve geht eine Stützgerade, die von dieser verschieden ist.

Für den Strahl durch O, der senkrecht ist zur Stützgeraden durch $\bar{a}_j$, d. h. für $z = re^{i\varphi_j}$, wo φ_j der Richtungswinkel dieses Strahles ist, läßt sich bei großem $|z|$ $F(z)$ asymptotisch darstellen in der Form

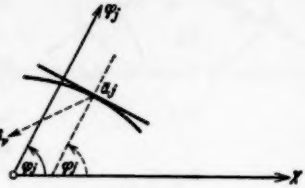


Fig. 4.

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{F(z)}{c_j e^{a_j z}} = 1.$$

Zum Beweise setzen wir wie früher $z = re^{i\varphi_j}$ und

$$\left| \frac{F(z)}{c_j e^{a_j z}} - 1 \right| = \frac{1}{|c_j|} \left| \sum_{1}^{\infty}{}' c_\nu e^{(a_\nu - a_j) z} \right| \leqq \frac{1}{|c_j|} \sum_{1}^{\infty}{}' |c_\nu| \, e^{|a_\nu - a_j| r \cos(\varphi_j - \delta_\nu)}.$$

$\sum'$ enthält das Glied mit dem Index j nicht; δ_ν ist der Winkel, den die Verbindungsstrecke $\bar{a}_j \bar{a}_\nu$ mit der positiven reellen Achse bildet.

Nun ist für alle $\bar{a}_\nu$

$$\varphi_j + \frac{\pi}{2} < \delta_\nu < \varphi_j + \frac{3\pi}{2}; \quad \frac{\pi}{2} < \delta_\nu - \varphi_j < \frac{3\pi}{2},$$

also

$$\cos(\varphi_j - \delta_\nu) < 0.$$

Dann ist für genügend große $r = r(\varepsilon, a_j, c_j)$ bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wie in § 4

$$\left| \frac{F(z)}{c_j e^{a_j z}} - 1 \right| \leqq \frac{1}{|c_j|} \sum_{1}^{\infty}{}' |c_\nu| \cdot e^{|a_\nu - a_j| r \cos(\varphi_j - \delta_\nu)} < \varepsilon,$$

und somit die Behauptung bewiesen.

§ 7.

Untersuchung des Falles, daß an einer Ecke des Indikatordiagramms, die nicht Exponentenpunkt ist, zwei Strecken zusammenstoßen.

Die Ecke A des Indikatordiagramms sei kein Exponentenpunkt. Dort sollen zwei geradlinige Begrenzungsstücke zusammenstoßen. A ist notwendig ein Häufungspunkt von Exponentenpunkten, da andernfalls das Indikatordiagramm mit der Ecke A nicht mehr kleinste konvexe Hülle der Exponentenpunkte wäre.

In diesem Paragraphen soll untersucht werden, ob auch in diesem Falle eine asymptotische Darstellung von $F(z)$ möglich ist. Zu diesem Zwecke legen wir um A einen Kreis von kleinem Radius. Seine Schnittpunkte mit der Begrenzung seien B und C (Fig. 5).

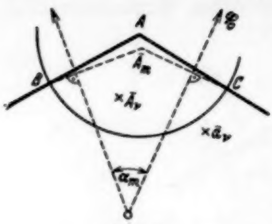


Fig. 5.

Wir bezeichnen jetzt (für diesen Paragraphen) die Exponentenpunkte, die in dem Kreissektor, einschließlich seiner Begrenzung liegen, mit $\bar{A}_\nu$, die Exponentenpunkte im übrigen Indikatordiagramm mit $\bar{a}_\nu$. Alsdann lautet unsere Funktion:

$$F(z) = \sum_1^\infty {}^\nu c_\nu e^{a_\nu z} + \sum_1^\infty {}^\nu C_\nu e^{A_\nu z} = F_0(z) + \sum_1^\infty {}^\nu C_\nu e^{A_\nu z}$$

Wir untersuchen jetzt das Verhalten von

$$\frac{F(z)}{\sum_1^\infty {}^\nu C_\nu e^{A_\nu z}} - 1 = \frac{F(z) - \sum_1^\infty {}^\nu C_\nu e^{A_\nu z}}{\sum_1^\infty {}^\nu C_\nu e^{A_\nu z}} = \frac{F_0(z)}{\sum_1^\infty {}^\nu C_\nu e^{A_\nu z}}$$

in einem geeigneten Winkelraum für große $|z|$.

Zur Durchführung dieser Aufgabe wählen wir aus den Exponentenpunkten $\bar{A}_\nu$ einen sehr nahe an A gelegenen, $\bar{A}_m$, aus und dividieren Zähler und Nenner unseres Ausdruckes durch das diesem Exponentenpunkt entsprechende Glied:

$$\frac{F_0(z)}{\sum_1^\infty {}^\nu C_\nu e^{A_\nu z}} = \frac{\dfrac{F_0(z)}{C_m e^{A_m z}}}{\sum_1^\infty {}^\nu \dfrac{C_\nu}{C_m} e^{(A_\nu - A_m) z}} = \frac{\sum_1^\infty {}^\nu \dfrac{c_\nu}{C_m} e^{(a_\nu - A_m) z}}{1 + \sum_1^\infty {}^{\nu\prime} \dfrac{C_\nu}{C_m} e^{(A_\nu - A_m) z}}.$$

Dabei ist in $\sum{}^{\nu\prime}$ des Nenners bei der Summation der Index m auszulassen. Jetzt gilt es, Zähler und Nenner dieses Ausdruckes in einem geeignet zu wählenden Winkelraum abzuschätzen.

1. Zur Abschätzung des Zählers führen wir (Fig. 5) den Winkelraum α_m ein, der von den Senkrechten durch O zu $\bar{A}_m B$ und $\bar{A}_m C$ gebildet wird. Da unser Punkt $\bar{A}_m$ beliebig nahe an A gewählt werden kann, so kommt Winkel α_m dem Winkel, der durch die Senkrechten durch O zu AB und AC gebildet wird, beliebig nahe. Den beiderseits um $\varepsilon_1 > 0$ verkleinerten Winkelraum α_m nennen wir α_m'. Mit φ bezeichnen

wir eine Richtung, die in α_m' liegt, mit z einen Punkt dieses Strahls, mit δ_ν den Winkel der Strecke $\bar{A}_m \bar{a}_\nu$ mit der positiven reellen Achse. Nun ist

$$\Re (a_\nu - A_m) z = |a_\nu - A_m| \, r \cos (\varphi - \delta_\nu) \leqq - d\, r \sin \varepsilon_1 < 0,$$

weil

α) $$|a_\nu - A_m| \geqq d (> 0),$$

β) wenn φ_0 die Richtung der Senkrechten durch O zu $\bar{A}_m C$ bezeichnet,

$$\varphi_0 + \varepsilon_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + \alpha_m - \varepsilon_1,$$

$$\varphi_0 + \frac{\pi}{2} + \alpha_m \leqq \delta_\nu \leqq \varphi_0 + \frac{3\pi}{2}$$

und daher

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 \leqq \delta_\nu - \varphi \leqq \frac{3\pi}{2} - \varepsilon_1,$$

somit

$$\cos (\varphi - \delta_\nu) \leqq \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1\right) = - \sin \varepsilon_1 \; (< 0).$$

Dann gilt aber für alle z des Winkelraumes α_m':

$$\left| \frac{F_0(z)}{C_m e^{A_m z}} \right| = \left| \sum_1^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{C_m} e^{(a_\nu - A_m) z} \right| \leqq e^{-d r \sin \varepsilon_1} \sum_1^\infty{}_\nu \left| \frac{c_\nu}{C_m} \right| < \varepsilon \xi,$$

sobald

$$r \geqq r_0 (\varepsilon, \varepsilon_1, \xi), \quad \text{wo} \quad \varepsilon > 0, \quad \xi > 0;$$

ξ wird später noch geeignet gewählt werden.

2. Zur Abschätzung des Nenners setzen wir

$$1 + \sum_1^\infty{}_\nu' \frac{C_\nu}{C_m} e^{(A_\nu - A_m) z} = H(z)$$

und unterscheiden folgende zwei Fälle:

a) Es ist $\lim\limits_{|z| \to \infty} H(z) = 0$ gleichmäßig im ganzen Winkelraum α_m'. Dann ist es nicht möglich, den Nenner nach unten abzuschätzen und über das Verhalten unseres Ausdruckes eine Aussage zu machen[10]).

b) Es ist *nicht* $\lim\limits_{|z| \to \infty} H(z) = 0$ gleichmäßig im ganzen Winkelraum. Dann ist sicher $\overline{\lim\limits_{|z| \to \infty}} |H(z)| = p$, wo $p > 0$ ist, und es gibt außerhalb jedes Kreises $|z| = R$ unendlich viele Stellen in α_m', wo z. B.

[10]) Dieser Fall tritt nicht immer bei unseren Funktionen auf. Wenn nämlich bei einer Funktion dieser Fall vorliegt, so gewinnt man eine Funktion, bei der er nicht mehr auftritt, dadurch, daß man zu $H(z)$ ein einziges Glied $\frac{C_\nu^*}{C_m} e^{(A_\nu^* - A_m) z}$ addiert, wo der neue Exponentenpunkt $\bar{A}_\nu^*$ dem Kreissektor angehört.

$|H(z)| > \frac{p}{5}$ und wegen der Stetigkeit von $H(z)$ um jede dieser Stellen ein Gebiet, in dem $|H(z)| > \frac{p}{10}$. Diese Gebiete, die nicht notwendig miteinander zusammenhängen, erstrecken sich in ihrer Gesamtheit ins Unendliche.

Um jetzt die Abschätzungen des Zählers und Nenners vereinigen zu können, wählen wir das bei der Zählerabschätzung vorkommende $\xi = \frac{p}{10}$.

Dann gilt in allen Gebieten, die durch 2b) bestimmt sind, soweit sie in $r \geqq r_0\left(\varepsilon, \varepsilon_1, \frac{p}{10}\right)$ liegen, wo r_0 die in 1. bestimmte Größe ist,

$$\left|\frac{F(z)}{\sum\limits_1^\infty C_\nu e^{A_\nu z}} - 1\right| = \left|\frac{F_0(z)}{\sum\limits_1^\infty C_\nu e^{A_\nu z}}\right| < \frac{\varepsilon \frac{p}{10}}{\frac{p}{10}} = \varepsilon.$$

Es ist also unter Beschränkung auf die obigen Gebiete

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{F(z)}{\sum\limits_1^\infty C_\nu e^{A_\nu z}} = 1 \tag{13}$$

und damit unter den erwähnten Einschränkungen eine gewisse asymptotische Darstellung auch in diesem Falle gefunden.

Bemerkung: Wenn die Begrenzungsstücke, die in der Ecke A, welche nicht Exponentenpunkt ist, zusammenstoßen, nicht geradlinig sind, so findet man durch ganz analoge Betrachtungen und unter analogen Voraussetzungen eine Darstellung von $F(z)$ in der Form (13) in gewissen sich ins Unendliche erstreckenden Gebieten. Dabei liegen die den A_ν entsprechenden Exponentenpunkte $\bar{A}_\nu$ in einem kleinen Kreis um A.

Eine Darstellung von $F(z)$ in der Gestalt (13) läßt sich sogar dann noch für gewisse ins Unendliche sich erstreckende Gebiete finden, wenn der Punkt A, der nicht Exponentenpunkt ist, auf einem nicht geradlinigen Begrenzungsstück liegt. Die den A_ν entsprechenden Exponentenpunkte $\bar{A}_\nu$ liegen wiederum in einem kleinen Kreise um A.

§ 8.

Anzahl der Nullstellen von $F(z)$ in der Umgebung einer Wechselrichtung.

Das Indikatordiagramm, das wiederum die spezielle Lage des § 4 habe, enthalte in der Begrenzung die Strecke $\bar{a}_1\bar{a}_2$, die senkrecht zur positiven reellen Achse sei (Fig. 6). Die Endpunkte $\bar{a}_1$ und $\bar{a}_2$ der Strecke sollen nicht nur Exponentenpunkte sondern auch „Ecken“ des Indikator-

diagramms sein; es schließe sich z. B. an $\bar{a}_1$ eine Strecke, an $\bar{a}_2$ ein nicht geradliniges Stück an.

Nach den Ergebnissen der § 3 und 4 gilt in dem Gebiet

$$k_1 \log x \leqq y \leqq x \operatorname{tg}\left(\delta_1 - \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1\right)$$

(14) $$\left|\frac{F(z)}{c_1\, e^{a_1 z}} - 1\right| < \varepsilon \quad \text{für genügend große } x.$$

Ebenso gilt nach § 3, 4 und 5 in dem Gebiet

$$x \operatorname{tg}\left(\delta_2 + \frac{\pi}{2}\right) \leqq y \leqq k_2 \log x$$

(15) $$\left|\frac{F(z)}{c_2\, e^{a_2 z}} - 1\right| < \varepsilon \quad \text{für genügend große } x.$$

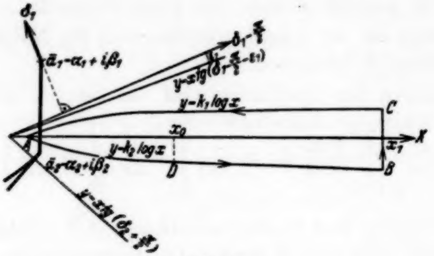


Fig. 6.

Keine dieser Grenzbeziehungen hat dagegen in der Umgebung der positiven reellen Achse selbst Gültigkeit. Beim Überschreiten der positiven X-Achse wechselt vielmehr die asymptotische Darstellung von $F(z)$. Man nennt daher diese Richtung „Wechselrichtung"[11]). Würde das Indikatordiagramm nicht diese besondere Lage haben, so würde man die Wechselrichtung dadurch finden, daß man durch den Nullpunkt die Senkrechte zur Strecke $\bar{a}_1 \bar{a}_2$ zeichnet, die die Strecke in Richtung vom Innern zum Äußern des Indikatordiagramms überschreitet.

Da $F(z)$ in den bezeichneten Gebieten asymptotisch dargestellt werden kann, so können die Nullstellen von $F(z)$, die allenfalls in dem Winkelraum $\delta_2 + \frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \delta_1 - \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1$ liegen, abgesehen von endlich vielen, nur in der Umgebung der Wechselrichtung, d. h. in unserem Falle der positiven reellen Achse liegen. Sie können durch logarithmische Linien eingeschlossen werden, die beliebig flach verlaufen können, da nur vorausgesetzt wurde, daß $k_1 > 0$ (bzw. $k_2 < 0$) nach (12).

---

[11]) E. Feyer, Asymptotische Darstellung gewisser meromorpher Funktionen. Dissertation, Breslau 1919, S. 8.

Daß die Ergebnisse über die Nullstellen durch die spezielle Lage des Indikatordiagramms nicht geändert werden, wurde bereits in § 1 gezeigt.

Die Anzahl der Nullstellen von $F(z)$ in dem Gebiet, das begrenzt ist (Fig. 6) von den logarithmischen Linien

$$y = k_2 \log x, \quad y = k_1 \log x \; (x \geqq 1, \quad k_2 < 0, \quad k_1 > 0)$$

und der Geraden $x = x_1$, ist gegeben durch

$$N(x_1) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{ABCA} \frac{F'(z)}{F(z)}\, dz,$$

erstreckt über die Berandung des Gebietes; x_1 soll wenigstens so groß sein, daß für $x \geqq x_1$ längs der beiden logarithmischen Linien die ihnen entsprechenden Ungleichungen (14) und (15) gelten. Der Integrationsweg muß natürlich so gewählt werden, daß keine Nullstelle von $F(z)$ auf ihn zu liegen kommt; das ist immer möglich, weil die Nullstellen von $F(z)$ im Endlichen keine Häufungsstelle besitzen.

Zur Ausführung der Integration wird das Integral zerlegt wie folgt:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{ABCA} \frac{F'(z)}{F(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_A^B + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_B^C + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C^A .$$

a) Berechnung des Integrals längs AB. Integrationsweg ist die logarithmische Linie $y = k_2 \log x$. Die Grenzen sind

$$z_A = 1; \quad z_B = x_1 + i k_2 \log x_1 .$$

Als zweckmäßige Darstellung von $F(z)$ wählen wir

$$F(z) = c_2 e^{a_2 z} + \sum_1^{\infty}{}' c_\nu e^{a_\nu z};$$

$\sum'$ enthält das Glied mit dem Index 2 nicht. Wir setzen jetzt

$$\frac{F(z)}{c_2 e^{a_2 z}} - 1 = \sum_1^{\infty}{}' \bar{c}_\nu e^{(a_\nu - a_2) z} = f(z),$$

wo $\bar{c}_\nu = \frac{c_\nu}{c_2}$ ist. Aus $\frac{F(z)}{c_2 e^{a_2 z}} = 1 + f(z)$ folgt dann

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = a_2 + \frac{f'(z)}{1 + f(z)} .$$

Das zu berechnende Integral lautet jetzt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_A^B \frac{F'(z)}{F(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_A^B a_2\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_A^B \frac{f'(z)}{1 + f(z)}\, dz.$$

Das erste Integral liefert

$$(16)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_A^B a_2\,dz = \frac{a_2}{2\pi i}(z_B - z_A) = \frac{\alpha_2 - i\beta_2}{2\pi i}\,x_1 + \frac{a_2 k_2}{2\pi}\log x_1 - \frac{a_2}{2\pi i},$$

falls $a_2 = \alpha_2 - i\beta_2$ gesetzt wird.

Für das im zweiten Integral vorkommende $f(z) = \frac{F(z)}{c_2 e^{a_2 z}} - 1$ gilt für $x \geqq x_1$ auf unserem Integrationsweg $y = k_2 \log x$ wegen (15) $|f(z)| < \varepsilon$. Wir schalten auf dem Integrationsweg den festen Punkt D (Fig. 6) mit der Abszisse x_0 so ein, daß auf der logarithmischen Linie $y = k_2 \log x$ für $x \geqq x_0$ $|f(z)| < \frac{1}{2}$, was nach § 4 möglich ist. Dann zerlegen wir das Integral in zwei Bestandteile

$$\frac{1}{2\pi i}\int_A^B \frac{f'(z)}{1+f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_A^D \frac{f'(z)}{1+f(z)}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_D^B \frac{f'(z)}{1+f(z)}\,dz.$$

Da D fest sein soll, während x_1 als veränderlich betrachtet werden wird, so ist

$$(17)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_A^D \frac{f'(z)}{1+f(z)}\,dz = \text{const},$$

d. h. von x_1 unabhängig.

Für das andere Integral erhalten wir

$$\int_D^B \frac{f'(z)}{1+f(z)}\,dz = [\log(1+f(z))]_D^B.$$

Da nun längs des ganzen Integrationsweges $|f(z)| < \frac{1}{2}$, also $1 + f(z)$ beständig innerhalb des Kreises um $z = 1$ mit dem Radius $\frac{1}{2}$ ist, so bleibt auch $\log(1 + f(z))$ und daher das Integral dem absoluten Betrage nach unterhalb einer von x_1 unabhängigen Schranke $\varkappa > 0$. Also ist dann

$$(18)\qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_D^B \frac{f'(z)}{1+f(z)}\,dz\right| < \varkappa.$$

Fassen wir die Ergebnisse von (16), (17), (18) zusammen, so erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_A^B \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz = \frac{\alpha_2 - i\beta_2}{2\pi i}\,x_1 + O(\log x_1).$$

b) **Berechnung des Integrals längs** CA. Wendet man dieselben Überlegungen auf den Integrationsweg $y = k_1 \log x$ an, so erhält man

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C^A \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz = -\frac{\alpha_1 - i\beta_1}{2\pi i}\,x_1 + O(\log x_1),$$

wenn $a_1 = \alpha_1 - i\beta_1$ gesetzt wird.

c) **Berechnung des Integrals längs** BC. Zu dieser Berechnung benötigen wir einen Satz von Bäcklund[12]), welcher gestattet,

$$\Re\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_B^C \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz\right\}$$

längs einer Strecke BC, die parallel zur y-Achse liegt, abzuschätzen.

Von der Funktion $F(z)$ wird dabei vorausgesetzt, daß sie in dem Kreise um B mit dem Radius $BC = |z_C - z_B| = l$ und auch noch in einem größeren konzentrischen Kreise mit dem Radius $L > l$ analytisch ist und daß sie längs BC nicht verschwindet.

Dann gilt

$$\left|\Re\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_B^C \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz\right\}\right| \leqq \frac{1}{2}\,\frac{\log\dfrac{\operatorname{Max}|F(z_B+\zeta)|}{|F(z_B)|}}{\log\dfrac{L}{l}} + \frac{1}{2},$$

$$|\zeta| = L > l = BC.$$

Von B bis C ist der Integrationsweg die Gerade $x = x_1$. Für die Berechnung der Anzahl der Nullstellen kommt nur die reelle Komponente des mit $\frac{1}{2\pi i}$ multiplizierten Integrals in Betracht. Diese wird uns direkt geliefert durch den Satz von Bäcklund. Wir haben nur noch die rechte Seite der Ungleichung abzuschätzen. Fig. 7 zeigt uns die näheren Einzelheiten des Integrationsweges; $y = k_1 \log x$ $(k_1 > 0)$ ist die Gleichung der logarithmischen Linie durch C, $y = k_2 \log x$ $(k_2 < 0)$ ist die Gleichung der logarithmischen Linie durch B;

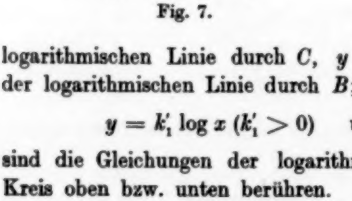


Fig. 7.

$$y = k_1' \log x\ (k_1' > 0) \quad \text{und} \quad y = k_2' \log x\ (k_2' < 0)$$

sind die Gleichungen der logarithmischen Linien, welche den größeren Kreis oben bzw. unten berühren.

---

[12]) Ein Beweis findet sich in E. Schwengeler, a. a. O., S. 34ff.

Die Abszisse von B ist x_1. Wir setzen voraus, daß zu $\varepsilon > 0$ für $x \geqq x_1$

$$(19)\quad \begin{array}{l} \text{1a) längs } y = k_1 \log x \\ \text{1b) längs } y = k_1' \log x \end{array} \quad \left| \frac{F(z)}{c_1 e^{a_1 z}} - 1 \right| < \varepsilon,$$

$$(20)\quad \begin{array}{l} \text{2a) längs } y = k_2 \log x \\ \text{2b) längs } y = k_2' \log x \end{array} \quad \left| \frac{F(z)}{c_2 e^{a_2 z}} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Wenn die logarithmische Linie $y = k_1' \log x$ für $x \geqq x_1$ zwischen $y = k_1 \log x$ und $y = x \operatorname{tg} \varepsilon_1$ liegt, so ist Voraussetzung 1b von selbst erfüllt nach § 4. Ähnliches gilt auch über 2b.

3. daß bei den Exponentenpunkten

$$\bar{a}_1 = \alpha + i\beta_1 \quad \text{und} \quad \bar{a}_2 = \alpha + i\beta_2$$

der Realteil $\alpha > 0$ und die Imaginärteile $\beta_1 > 0$ und $\beta_2 < 0$ sind.

Der Fall $\alpha \leqq 0$ läßt sich auf den Fall $\alpha > 0$ zurückführen, wenn man die Funktion $e^{a_0 z} \cdot F(z)$ betrachtet (a_0 ist dabei geeignet zu wählen) welche nach § 1 dieselben Nullstellen wie $F(z)$ hat. Die bei den Imaginärteilen β_1 und β_2 noch möglichen Fälle würden zu einer Abschätzung führen, die im wesentlichen mit der im folgenden gewonnenen übereinstimmt.

Die Radien der beiden Kreise sind:

$$l = (k_1 - k_2) \log x_1; \qquad L = (k_1' - k_2) \log x_1.$$

Dem Prinzip vom Maximum am Rande zufolge ist

$$\underset{|\zeta| = L}{\operatorname{Max}} |F(z_B + \zeta)| \leqq \underset{P_1 P Q Q_1}{\operatorname{Max}} |F(z)|.$$

Wir wollen jetzt $\underset{P_1 P Q Q_1}{\operatorname{Max}} |F(z)|$ abschätzen.

α) $|F(z)|$ längs $P_1 P$.

Wegen Voraussetzung 1b gibt es sicher eine positive Konstante ε', so daß bereits von P_1 an längs $y = k_1' \log x$ gilt:

$$\left| \frac{F(z)}{c_1 e^{a_1 z}} - 1 \right| < \varepsilon' \quad \text{und daher} \quad |F(z)| < (1 + \varepsilon') |c_1 e^{a_1 z}|.$$

Nun ist aber längs $P_1 P$ wegen $k_1' > 0$ und $\beta_1 > 0$ $(a_1 = \alpha - i\beta_1)$

$$|e^{a_1 z}| = e^{\alpha x + k_1' \beta_1 \log x} \leqq e^{\alpha x_R + k_1' \beta_1 \log x_R},$$

da $x_P = x_R$.

Somit können wir $\underset{P_1 P}{\operatorname{Max}} |F(z)|$ folgendermaßen abschätzen:

$$(21)\quad \underset{P_1 P}{\operatorname{Max}} |F(z)| < (1 + \varepsilon') |c_1| e^{\alpha x_R + k_1' \beta_1 \log x_R}.$$

β) $|F(z)|$ längs $Q_1 Q$.

Dieselben Überlegungen lassen wegen $\beta_2 < 0$ und $k_2' < 0$, also $\beta_2 k_2' > 0$ folgende Abschätzung zu:

(22) $$\operatorname*{Max}_{Q_1 Q} |F(z)| < (1+\varepsilon'')\,|c_2|\, e^{\alpha x_R + k_2' \beta_2 \log x_R}.$$

γ) $|F(z)|$ längs PQ.

Zuerst wird $|F(z_R)|$ abgeschätzt (Fig. 7). Wir wählen als zweckmäßige Darstellung

$$F(z_R) = \sum_1^\infty{}^n c_n e^{a_n z_R} + \sum_1^\infty{}'_\nu c_\nu e^{a_\nu z_R}.$$

Dabei ist $a_n = \alpha - i\beta_n$ $(\alpha > 0)$; $a_\nu = \alpha_\nu - i\beta_\nu$ $(\alpha_\nu < \alpha)$. $\sum^n$ enthält also alle Glieder, deren Exponentenpunkte auf der Strecke $\bar{a}_1 \bar{a}_2$ liegen, $\sum_\nu'$ alle übrigen Glieder. Wir formen um:

$$F(z_R) = e^{\alpha z_R}\Big(\sum_1^\infty{}^n c_n e^{-i\beta_n z_R} + \sum_1^\infty{}'_\nu c_\nu e^{(\alpha_\nu - \alpha) z_R - i\beta_\nu z_R}\Big).$$

Also ist

$$|F(z_R)| \leqq e^{\alpha x_R}\cdot C_1, \text{ wo } C_1 = \sum_1^\infty{}_\nu |c_\nu|, \text{ weil } z_R = x_R.$$

Um $|F(z)|$ längs RP zu untersuchen, beachten wir, daß hierfür $x = x_R = \text{const}$; $0 < y \leqq k_1' \log x_R$. Wegen der Beschränktheit der Menge $a_\nu = \alpha_\nu - i\beta_\nu$ gibt es ein $\beta > 0$, so daß für alle ν

$$-\beta \leqq \beta_\nu \leqq \beta.$$

Es ist mit denselben Bedeutungen wie bei der Abschätzung von $|F(z_R)|$

$$F(z) = e^{\alpha z}\Big(\sum_1^\infty{}^n c_n e^{-i\beta_n z} + \sum_1^\infty{}'_\nu c_\nu e^{(\alpha_\nu - \alpha) z - i\beta_\nu z}\Big).$$

Dann ist für alle z der Strecke RP:

$$|F(z)| \leqq e^{\alpha x_R}\Big(\sum_1^\infty{}^n |c_n|\, e^{\beta_n y} + \sum_1^\infty{}'_\nu |c_\nu|\, e^{(\alpha_\nu - \alpha) x_R + \beta_\nu y}\Big)$$

$$< C_1 \cdot e^{\alpha x_R + \beta y}, \quad \text{wo} \quad C_1 = \sum_1^\infty{}_\nu |c_\nu|.$$

Also ist

$$\operatorname*{Max}_{RP} |F(z)| < C_1 e^{\alpha x_R + \beta y_P}.$$

Auf dieselbe Weise findet man längs RQ:

$$\operatorname*{Max}_{RQ} |F(z)| < C_1 e^{\alpha x_R - \beta y_Q}.$$

Also gilt dann längs PQ wegen $-y_Q > y_P$

(23) $$\underset{PQ}{\mathrm{Max}}\,|F(z)| < C_1 e^{\alpha x_R - \beta y_Q} = C_1 e^{\alpha x_R - \beta k_2' \log x_R}.$$

δ) $|F(z)|$ längs $P_1 Q_1$.

Auf dieselbe Art findet man

(24) $$\underset{P_1 Q_1}{\mathrm{Max}}\,|F(z)| < C_1 e^{\alpha x_{R_1} - \beta k_2' \log x_{R_1}}.$$

Vergleicht man (21), (22), (23), (24), so findet man

(25) $$\underset{P_1 P Q Q_1}{\mathrm{Max}}\,|F(z)| < C_1 e^{\alpha x_R - \beta k_2' \log x_R}.$$

Für das in der Ungleichung von Bäcklund vorkommende $|F(z_B)|$ gilt wegen Voraussetzung (20)

(26) $$(1-\varepsilon)\,|c_2|\,e^{\alpha x_1 + \beta_2 k_2 \log x_1} < |F(z_B)|.$$

Nun ist (Fig. 7)

(27) $$x_R = x_1 + L = x_1 + (k_1' - k_2)\log x_1.$$

Dann ist wegen (25), (26) und (27)

$$\frac{\underset{P_1 P Q Q_1}{\mathrm{Max}}\,|F(z)|}{|F(z_B)|} \leqq \frac{C_1 e^{\alpha x_1 + \alpha(k_1' - k_2)\log x_1 - \beta k_2' \log x_R}}{(1-\varepsilon)\,|c_2|\,e^{\alpha x_1 + \beta_2 k_2 \log x_1}}$$
$$= C_2 x_1^{\alpha(k_1' - k_2) - \beta_2 k_2} \cdot x_1^{-\beta k_2'} \left(1 + (k_1' - k_2)\frac{\log x_1}{x_1}\right)^{-\beta k_2'}$$
$$< C_3 x_1^{\alpha(k_1' - k_2) - \beta_2 k_2 - \beta k_2'}$$

wegen

$$\frac{\log x_1}{x_1} < \frac{1}{e} \quad \text{für} \quad x_1 > e.$$

Dabei ist

$$\alpha(k_1' - k_2) - \beta_2 k_2 - \beta k_2' > 0.$$

Außerdem ist

$$\log\frac{L}{l} = \log\frac{k_1' - k_2}{k_1 - k_2} > 0.$$

Wenn man alles in die Ungleichung von Bäcklund einsetzt, so erhält man

$$\left|\Re\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_B^C \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz\right\}\right| \leqq \frac{[\alpha(k_1' - k_2) - \beta_2 k_2 - \beta k_2']\log x_1 + \log C_3}{2\log\dfrac{k_1' - k_2}{k_1 - k_2}} + \frac{1}{2}$$
$$= O(\log x_1).$$

Wir bekommen das gleiche Ergebnis, wenn wir statt durch die Gerade $x = x_1$ das Gebiet abschließen durch den Kreis $|z| = r = \sqrt{x_1^2 + y^2}$, denn

$$|z| = \sqrt{x_1^2 + y^2} = x_1\sqrt{1 + k^2\left(\frac{\log x_1}{x_1}\right)^2} = x_1\left(1 + \frac{1}{2}k^2\left(\frac{\log x_1}{x_1}\right)^2 + \dots\right)$$

oder

$$\lim_{x_1 \to \infty} \frac{|z|}{x_1} = 1.$$

d) Ergebnis der Integration längs $ABCA$. Fassen wir die Ergebnisse von a), b) und c) zusammen, so erhalten wir unter Beachtung von $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{ABCA} \frac{F'(z)}{F(z)} dz = \frac{\alpha_2 - i\beta_2}{2\pi i} x_1 - \frac{\alpha_1 - i\beta_1}{2\pi i} x_1 + O(\log x_1)$$

$$= \frac{\beta_1 - \beta_2}{2\pi} x_1 + O(\log x_1).$$

Da nun $\beta_1 - \beta_2$ die Länge der Strecke $\bar{a}_1 \bar{a}_2$ ist, so kann man das Ergebnis folgendermaßen formulieren:

Ist $\bar{a}_1 \bar{a}_2$ eine Strecke in der Begrenzung der konvexen Hülle, $\bar{a}_1$ und $\bar{a}_2$ selbst je ein Punkt der Menge $\bar{a}_\nu$, d. h. Exponentenpunkt, und geht durch $\bar{a}_1$ und $\bar{a}_2$ mehr als eine Stützgerade der konvexen Hülle, so liegen die Nullstellen in der Umgebung der Wechselrichtung zu $\bar{a}_1 \bar{a}_2$. Diese Umgebung sei von logarithmischen Linien begrenzt und abgeschlossen durch den Kreis $r = x_1$.

Die Anzahl der Nullstellen ist proportional

1. dem Radius r des Kreises,
2. der Länge der Strecke $\bar{a}_1 \bar{a}_2$.

Diese Anzahl ist asymptotisch richtig bis auf einen Fehler, der, durch $\log r$ dividiert, unterhalb einer endlichen Konstanten bleibt.

§ 9.

Untersuchung des Verhaltens von $F(z)$ in den Wechselrichtungsräumen[13]).

Wenn das Indikatordiagramm von $F(z)$ in der Begrenzung eine Strecke enthält, deren Endpunkte nicht nur Exponentenpunkte, sondern auch „Ecken" sind, so ist die Senkrechte zur Strecke durch O, welche die Strecke vom Innern zum Äußern des Indikatordiagramms überschreitet, „Wechselrichtung" (vgl. § 8). $F(z)$ kann in der Umgebung einer Wechselrichtung, die von logarithmischen Linien begrenzt ist, nicht asymptotisch dargestellt werden. In dieser Umgebung, die wir „Wechselrichtungsraum" nennen, liegen Nullstellen von $F(z)$. In diesem Paragraphen wollen wir auch in den Wechselrichtungsräumen das Verhalten von $F(z)$ untersuchen.

---

[13]) Vgl. E. Feyer, a. a. O., S. 18.

Die Exponentenpunkte, die auf der in der Begrenzung enthaltenen Strecke liegen, bezeichnen wir mit $\bar{A}_\nu$, alle anderen mit $\bar{a}_\nu$ (Fig. 8). Dann lautet unsere Funktion

$$F(z) = \sum_1^\infty C_\nu e^{A_\nu z} + \sum_1^\infty c_\nu e^{a_\nu z} = f(z) + \sum_1^\infty c_\nu e^{a_\nu z},$$

wenn $\sum_1^\infty C_\nu e^{A_\nu z} = f(z)$ gesetzt wird.

Die Strecke $\bar{A}_1 \bar{A}_2$ der Begrenzung liege parallel zur Y-Achse. Das Indikatordiagramm erstrecke sich in Richtung der negativen X-Achse.

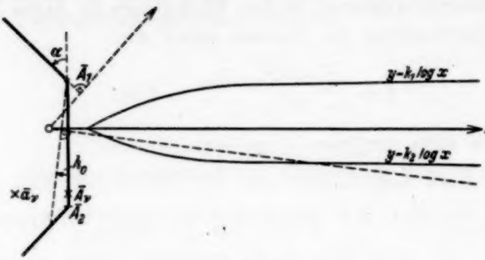


Fig. 8.

Dann ist die positive X-Achse die Wechselrichtung, die zur Strecke $\bar{A}_1 \bar{A}_2$ gehört.

Die Exponentenpunkte $\bar{a}_\nu$ sollen auf der Strecke $\bar{A}_1 \bar{A}_2$ keinen Häufungspunkt besitzen.

Wir bilden

$$\frac{F(z)}{f(z)} - 1 = \frac{F(z) - f(z)}{f(z)} = \frac{\sum_1^\infty c_\nu e^{a_\nu z}}{\sum_1^\infty C_\nu e^{A_\nu z}} = \frac{\sum_1^\infty \frac{c_\nu}{C_1} e^{(a_\nu - A_1) z}}{1 + \sum_2^\infty \frac{C_\nu}{C_1} e^{(A_\nu - A_1) z}}.$$

(Die Division des Zählers und Nenners durch $C_2 e^{A_2 z}$ würde zu demselben Ergebnis führen, wie aus der folgenden Rechnung sich ergibt.)

Wir müssen diesen Bruch im Wechselrichtungsraum abschätzen.

1. Zur Abschätzung des Zählers beachten wir, daß die $\bar{a}_\nu$ keinen Häufungspunkt auf $\bar{A}_1 \bar{A}_2$ haben. Wir erhalten dann, wenn $z = r e^{i\varphi}$,

$$\Re (a_\nu - A_1) z = |a_\nu - A_1| r \cos (\varphi - \delta_\nu),$$

wo δ_ν die Richtung von $\bar{A}_1 \bar{a}_\nu$, also

$$\frac{\pi}{2} + \alpha \leqq \delta_\nu \leqq \frac{3\pi}{2} - h_0.$$

Wird also $-p_0 \leqq \varphi \leqq p_0$ gewählt, wo p_0 kleiner als α und kleiner als h_0 $\left\{p_0 \leqq \frac{\alpha - \varepsilon_1}{h_0 - \varepsilon_1}\right\}$, so folgt

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 \leqq \delta_\nu - \varphi \leqq \frac{3\pi}{2} - \varepsilon_1, \qquad \cos(\varphi - \delta_\nu) \leqq -\sin \varepsilon_1;$$

ferner ist $|a_\nu - A_1| \geqq d$; so erhält man

$$\left|\sum_1^\infty \frac{c_\nu}{C_1} e^{(a_\nu - A_1)z}\right| < \varepsilon \xi,$$

sobald $r \geqq r_0$ für alle $-p_0 \leqq \varphi \leqq p_0$; r_0 soll dabei so groß gewählt sein, daß der Wechselrichtungsraum in den Winkelraum zu liegen kommt.

2. Zur Untersuchung des Nenners setzen wir

$$1 + \sum_1^\infty \frac{C_\nu}{C_1} e^{(A_\nu - A_1)z} = H(z).$$

Jetzt sind zwei Fälle denkbar, je nachdem, ob

a) $\lim\limits_{|z| \to \infty} H(z) = 0$ gleichmäßig im Wechselrichtungsraum oder

b) nicht $\lim\limits_{|z| \to \infty} H(z) = 0$ gleichmäßig im Wechselrichtungsraum.

Der erste Fall kann aber nicht eintreten. Denn es ist nach § 4 längs $y = k_1 \log x$

$$\left|\sum_2^\infty \frac{C_\nu}{C_2} e^{(A_\nu - A_1)z}\right| < \varepsilon \quad \text{für} \quad x \geqq x_1(\varepsilon, k_1). \tag{28}$$

Wählt man nun $0 < k < k_1$, so verläuft die logarithmische Linie $y = k \log x$ im Wechselrichtungsraum. Da aber in § 4 (vgl. (12)) nur $k > 0$ notwendig war, so gilt auch längs $y = k \log x$ Beziehung (28) für $x \geqq x_2(\varepsilon, k)$.

Dabei wird x_2 im allgemeinen bedeutend größer sein als x_1.

Wir erhalten dann für $x \geqq x_2$ längs $y = k \log x$

$$|H(z)| = \left|1 + \sum_2^\infty \frac{C_\nu}{C_1} e^{(A_\nu - A_1)z}\right| > 1 - \varepsilon,$$

also ist sicher nicht $\lim\limits_{|z| \to \infty} H(z) = 0$ gleichmäßig im Wechselrichtungsraum.

Sonach ist nur der zweite Fall möglich. Dann ist aber

$$\overline{\lim_{|z| \to \infty}} |H(z)| = p,$$

wo $p > 0$, und es gibt außerhalb jedes Kreises $|z| = R$ unendlich viele Stellen, in denen z. B. $|H(z)| > \frac{p}{5}$. Wegen der Stetigkeit von $H(z)$ existiert um jede dieser Stellen ein Gebiet, in welchem $|H(z)| > \frac{p}{10}$.

Diese Gebiete hängen nicht notwendig miteinander zusammen und erstrecken sich in ihrer Gesamtheit ins Unendliche.

Wählen wir nun das in der Zählerabschätzung vorkommende $\xi = \frac{p}{10}$, so gilt von $r \geqq r_0\left(\varepsilon, \frac{p}{10}\right)$ an in den Gebieten des Wechselrichtungsraumes, in denen $|H(z)| > \frac{p}{10}$,

$$\left|\frac{F(z)}{f(z)} - 1\right| < \frac{\varepsilon \cdot \frac{p}{10}}{\frac{p}{10}} = \varepsilon.$$

Damit ist eine asymptotische Darstellung von $F(z)$ für die genannten Teilgebiete des Wechselrichtungsraumes gefunden.

II. Teil.

§ 10.

Die Funktion $\Phi(z)$.

Im zweiten Teil wollen wir eine allgemeinere Funktion als bisher behandeln. Wir gewinnen sie aus $F(z) = \sum_1^\infty{}' c_\nu e^{a_\nu z}$, indem wir zu den Exponentialgrößen noch Polynome als Faktoren anfügen:

$$\Phi(z) = \sum_1^\infty{}' c_\nu P_\nu(z) e^{a_\nu z}.$$

Es seien wiederum die c_ν komplex und $\sum_1^\infty{}' |c_\nu|$ sei konvergent; für alle a_ν, die auch komplex und voneinander verschieden sein sollen, soll gelten: $|a_\nu| \leqq a$, $a > 0$.

In den Polynomen

$$P_\nu(z) = \sum_0^{m_\nu}{}^{\mu} A_\mu^{(\nu)} z^\mu$$

seien für alle μ und ν $|A_\mu^{(\nu)}| \leqq A$, $A > 0$; $m_\nu \leqq m$, $m > 0$. Keines der Polynome soll identisch verschwinden.

Es gilt für alle ν

$$(29) \qquad |P_\nu(z)| \leqq \sum_0^{m_\nu}{}^{\mu} |A_\mu^{(\nu)}| \, |z|^\mu \leqq (m+1) A |z|^m$$

und

$$|\Phi(z)| \leqq \sum_1^\infty{}' |c_\nu| \, |P_\nu(z)| \, |e^{a_\nu z}| \leqq (m+1) A |z|^m e^{a|z|} \sum_1^\infty{}' |c_\nu|.$$

Es ist also $\Phi(z)$ absolut und gleichmäßig konvergent in der ganzen Ebene, somit eine ganze Funktion.

Die zu den a_ν konjugierten Punkte $\bar{a}_\nu$ sollen wieder Exponentenpunkte heißen; die Nullstellen von $\Phi(z)$ seien z_n. Die Exponentenpunkte $\bar{a}_\nu$ und die Nullstellen z_n von $\Phi(z)$ verhalten sich gegenüber den einfachen Transformationen des § 1 nach den dort gefundenen Sätzen, was man auch hier wieder durch Betrachtung der Funktionen $e^{a_0 z}\Phi(z)$ und $\Phi(z e^{i\gamma})$ zeigen kann.

Wir beschränken uns im folgenden darauf, die Ergebnisse ohne Beweise mitzuteilen.

§ 11.

Indikatordiagramm und asymptotische Darstellung der Funktion $\Phi(z)$.

Wir betrachten auch von $\Phi(z)$ das Indikatordiagramm, das wiederum aus der konvexen Hülle der Exponentenpunkte besteht. Dieses Indikatordiagramm enthalte in seiner Begrenzung die Strecke $\bar{a}_1\,\bar{a}_2$. Die Endpunkte $\bar{a}_1$ und $\bar{a}_2$ sollen Exponentenpunkte, „Ecken" des Indikatordiagramms und nicht Häufungspunkte der $\bar{a}_\nu$ sein. An $\bar{a}_1$ und $\bar{a}_2$ schließen sich dann zwei begrenzende Strecken an.

Das Indikatordiagramm liege so in der komplexen Ebene, daß die Strecke $\bar{a}_1\,\bar{a}_2$ auf der Y-Achse liegt und das Indikatordiagramm in die linke Halbebene fällt (Fig. 9).

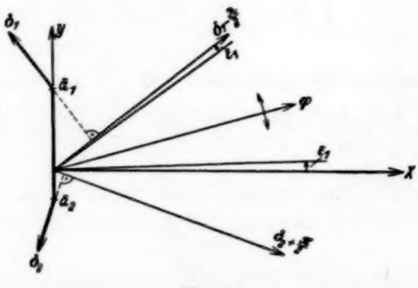


Fig. 9.

Diese Lage kann durch eine Drehung und eine Parallelverschiebung des Indikatordiagramms erreicht werden. Von einer Drehung und einer Translation wird die Allgemeingültigkeit der folgenden Ergebnisse nicht berührt.

Man kann nun zeigen: Wenn δ_1 der Winkel der an $\bar{a}_1$ anstoßenden Strecke mit der positiven reellen Achse und $z = r e^{i\varphi}$ ist, so gilt für

$$0 < \varepsilon_1 \leqq \varphi \leqq \delta_1 - \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1$$

gleichmäßig, d. h. unabhängig von φ

(30) $$\lim_{|z|\to\infty} \frac{\Phi(z)}{c_1 P_1(z) e^{a_1 z}} = 1.$$

Ist δ_2 der Richtungswinkel der an $\bar{a}_2$ anstoßenden Strecke, so gilt für $z = re^{i\psi}$, wo

$$\delta_2 + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_2 \leqq \psi \leqq 2\pi - \varepsilon_2,$$

(31) $$\lim_{|z|\to\infty} \frac{\Phi(z)}{c_2 P_2(z) e^{a_2 z}} = 1.$$

Dagegen läßt sich für die Richtung der positiven reellen Achse keine derartige Grenzbeziehung aufstellen. Für diese Richtung kommen wenigstens zwei Glieder für die asymptotische Darstellung in Betracht. Wir nennen daher wie in § 8 diese Richtung „Wechselrichtung". Die dortigen Erwägungen gelten natürlich auch hier. Insbesondere müssen Nullstellen, die eventuell im Winkelraum

$$\delta_2 + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_2 \leqq \varphi \leqq \delta_1 - \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1$$

liegen, abgesehen von endlich vielen, in einem Winkelraum beliebig kleiner Öffnung enthalten sein, der die Wechselrichtung in sich schließt.

§ 12.

Darstellung von $\Phi(z)$ außerhalb logarithmischer Streifen.

Die asymptotische Darstellung (30) von $\Phi(z)$ des vorigen Paragraphen ist sogar noch bis zu der logarithmischen Linie $y = k_1 \log x$ möglich, also für große x gleichmäßig in dem Gebiete (vgl. Fig. 2)

$$k_1 \log x \leqq y \leqq x \operatorname{tg} \varepsilon_1.$$

Dabei muß

$$k_1 > \left(\frac{m - m_1}{d \sin \delta_1}, \ \frac{m - m_1}{\frac{\sqrt{2}}{2} d}\right)$$

sein. (m_1 ist der Grad des Polynoms $P_1(z)$, m die obere Grenze aller Grade m_ν der Polynome $P_\nu(z)$, δ_1 der Richtungswinkel der in $\bar{a}_1$ anstoßenden Strecke und $0 < d \leqq |a_\nu - a_1|$).

Auch die asymptotische Darstellung (31) gilt für große x gleichmäßig in dem Gebiete

$$-x \operatorname{tg} \varepsilon_2 \leqq y \leqq k_2 \log x,$$

wo

$$k_2 < \left(\frac{m - m_2}{d \sin \delta_2}, \ -\frac{m - m_2}{\frac{\sqrt{2}}{2} d}\right).$$

Jetzt läßt sich das Ergebnis des vorigen Paragraphen folgendermaßen verschärfen: Die dem Gebiete

$$\delta_2 + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_2 \leqq \varphi \leqq \delta_1 - \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1$$

angehörigen Nullstellen der Funktion $\Phi(z)$ liegen, abgesehen von endlich vielen, in einem gewissen logarithmischen Streifen, der die Wechselrichtung $y = 0$ einschließt.

§ 13.

Asymptotische Darstellung längs einer logarithmischen Linie.

Das Ergebnis des vorigen Paragraphen läßt eine abermalige Verfeinerung zu. Das Indikatordiagramm habe wieder die spezielle Lage des vorigen Paragraphen. Alle Exponentenpunkte, die auf der Strecke $\bar{a}_1\,\bar{a}_2$ liegen und deren Anzahl auch unendlich groß sein kann, haben die Form $\bar{a}_\nu = i\beta_\nu$, wobei also $a_\nu = -i\beta_\nu$ gesetzt ist. Wir setzen voraus, daß alle Häufungspunkte der auf $\bar{a}_1\,\bar{a}_2$ gelegenen Exponentenpunkte zugleich Punkte der Menge $\bar{a}_\nu$ sind und daß alle nicht auf $\bar{a}_1\,\bar{a}_2$ gelegenen Exponentenpunkte auch keinen Häufungspunkt auf $\bar{a}_1\,\bar{a}_2$ haben.

Wir werden nun das Indikatordiagramm in gewisser Weise erweitern (Fig. 10). Durch jeden der Exponentenpunkte der Strecke $\bar{a}_1\,\bar{a}_2$, z. B.

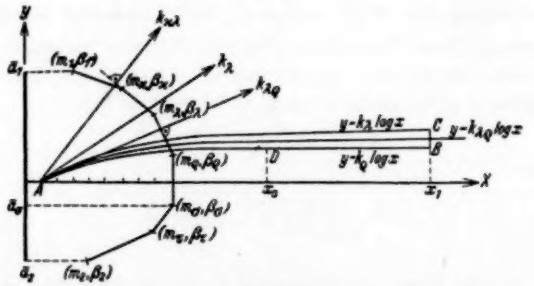


Fig. 10.

durch $\bar{a}_\sigma$, ziehe man eine Parallele zur Wechselrichtung, das ist zur positiven reellen Achse, und trage auf ihr alle Exponenten auf, die im zugehörigen Polynom enthalten sind, also im gewählten Beispiel die im Polynome $P_\sigma(z)$ vorkommenden Exponenten mit von Null verschiedenen Koeffizienten. Die neuen Punkte, die wir *Gradpunkte*[14]) nennen wollen, haben ganzzahlige Abstände von der Strecke $\bar{a}_1\,\bar{a}_2$ und die Koordinaten

[14]) Schwengeler, a. a. O., S. 19.

(μ, β_ν). Wenn ein Polynom ein konstantes Glied enthält, so wird der Exponentenpunkt selbst Gradpunkt. Wenn einer der Gradpunkte Häufungspunkt für weitere solche ist, so liegen diese letzteren auf einer Parallelen zur Y-Achse, welche auch wieder einen ganzzahligen Abstand von $\bar{a}_1\,\bar{a}_2$ hat.

Wir wollen voraussetzen, daß alle Häufungspunkte unserer Gradpunkte selbst Gradpunkte sind, daß also die Menge der Gradpunkte alle ihre Häufungspunkte enthält. Alle Gradpunkte können dann mit einem kürzesten konvexen Linienzug umschlossen werden, dessen Ecken Gradpunkte sind. Davon nehme man nur den Teil, der gegen die Strecke $a_1\,\bar{a}_2$ konkav ist. Die zwei Strecken, die möglicherweise durch $\bar{a}_1$ und $\bar{a}_2$ gehen und parallel zur X-Achse sind, sollen also nicht betrachtet werden.

Für gewisse logarithmische Linien läßt sich nunmehr $\Phi(z)$ in folgender Weise asymptotisch darstellen.

Ein Eckpunkt des Gradpunktpolygons sei $(m_\lambda, \beta_\lambda)$ (siehe dazu Fig. 10). Die Senkrechten zu den anstoßenden Polygonseiten sollen die Richtungen

$$k_{\varkappa\lambda} = \operatorname{tg} \omega_{\varkappa\lambda} \quad \text{und} \quad k_{\lambda\varrho} = \operatorname{tg} \omega_{\lambda\varrho}$$

haben. Wenn nun $k_{\lambda\varrho} < k_\lambda < k_{\varkappa\lambda}$, so gilt für die logarithmische Linie $y = k_\lambda \log x$

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{\Phi(z)}{c_\lambda A_{m_\lambda}^{(\lambda)} z^{m_\lambda} e^{a_\lambda z}} = 1. \tag{32}$$

Für die logarithmische Linie $y = k_{\lambda\varrho} \log x$, wo $k_{\lambda\varrho}$ der Richtungskoeffizient der Senkrechten zur Verbindungsstrecke der Punkte $(m_\lambda, \beta_\lambda)$ und $(m_\varrho, \beta_\varrho)$ ist (Fig. 10), kann $\Phi(z)$ nicht in ähnlicher Weise asymptotisch dargestellt werden. Wir nennen eine solche logarithmische Linie eine logarithmische Wechsellinie[15]).

Man bekommt offenbar alle logarithmischen Wechsellinien, indem man zu den Strecken des nach dem Indikatordiagramm konkaven Linienzuges die Senkrechten durch (1, 0) zeichnet und die logarithmischen Linien konstruiert, für die diese Richtungen Tangenten im Punkte (1, 0) sind („Anfangstangenten"). Wenn eine Strecke des Linienzuges senkrecht zur X-Achse ist, so wird diese selbst logarithmische Wechsellinie.

Für eine logarithmische Linie dagegen, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden logarithmischen Wechsellinien liegt, läßt sich $\Phi(z)$ nach dem Ergebnis dieses Paragraphen asymptotisch darstellen durch das Glied, das dem Gradpunkt entspricht, in dem die zwei zu den Anfangs-

[15]) Schwengeler, a. a. O., S. 21.

tangenten der logarithmischen Wechsellinien senkrechten Strecken zusammenstoßen.

Die Verfeinerung des Ergebnisses des vorhergehenden Paragraphen besteht darin, daß die dort erwähnten breiten logarithmischen Streifen, die die Wechselrichtungen enthalten, jetzt weiter aufgeteilt werden konnten

§ 14.
Anzahl der Nullstellen in der Umgebung einer logarithmischen Wechsellinie.

Die Nullstellen, die nach dem Ergebnis des vorigen Paragraphen möglicherweise in der Umgebung einer logarithmischen Wechsellinie liegen, werden jetzt durch das Cauchysche Integral berechnet. Das Indikatordiagramm habe wieder dieselbe Lage wie in § 13 (Fig. 10).

Die logarithmische Wechsellinie $y = k_{\lambda\varrho} \log x \left[k_{\lambda\varrho} = -\frac{m_\lambda - m_\varrho}{\beta_\lambda - \beta_\varrho}\right]$ sei durch die zwei benachbarten logarithmischen Linien $y = k_\varrho \log x$ und $y = k_\lambda \log x$ eingeschlossen, wobei

$$0 < k_\varrho < k_{\varrho\lambda};\quad k_{\varrho\lambda} < k_\lambda < k_{\lambda\varkappa};\quad k_{\lambda\varkappa} = -\frac{m_\lambda - m_\varkappa}{\beta_\lambda - \beta_\varkappa}.$$

Durch die Gerade $x = x_1$ soll der logarithmische Streifen abgeschlossen sein. Auf diese Begrenzungslinie soll keine Nullstelle zu liegen kommen, was möglich ist, da die Nullstellen von $\Phi(z)$ im Endlichen keine Häufungsstelle besitzen. Die Größe x_1 sei so gewählt, daß für $x \geqq x_1$ zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ längs der logarithmischen Linie $y = k_\varrho \log x$

$$\left|\frac{\Phi(z)}{c_\varrho A^{(\varrho)}_{m_\varrho} z^{m_\varrho} e^{a_\varrho z}} - 1\right| < \varepsilon \tag{33}$$

und längs der logarithmischen Linie $y = k_\lambda \log x$

$$\left|\frac{\Phi(z)}{c_\lambda A^{(\lambda)}_{m_\lambda} z^{m_\lambda} e^{a_\lambda z}} - 1\right| < \varepsilon. \tag{34}$$

Die Anzahl der Nullstellen von $\Phi(z)$ im logarithmischen Streifen ist

$$N(x_1) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{ABCA} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_A^B + \int\limits_B^C + \int\limits_C^A\right).$$

a) **Das Integral längs AB.** Wir setzen

$$\frac{\Phi(z)}{c_\varrho A^{(\varrho)}_{m_\varrho} z^{m_\varrho} e^{a_\varrho z}} - 1 = \varphi(z)$$

und bemerken, daß längs $y = k_\varrho \log x$ für $x \geqq x_1$ wegen (33) $|\varphi(z)| < \varepsilon$. Es ist dann

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = a_\varrho + \frac{m_\varrho}{z} + \frac{\varphi'(z)}{1+\varphi(z)}.$$

Unser Integral ergibt dann:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_A^B \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\,dz = -\frac{\beta_\varrho}{2\pi}\,x_1 + O(\log x_1).$$

b) Das Integral längs CA. Wenn man dieselben Überlegungen auf den Integrationsweg $y = k_\lambda \log x$ anwendet, so findet man

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C^A \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\,dz = \frac{\beta_\lambda}{2\pi}\,x_1 + O(\log x_1).$$

c) Das Integral längs BC. Die Anzahl der Nullstellen wird uns geliefert durch die reelle Komponente des mit $\frac{1}{2\pi i}$ multiplizierten Integrals. Der Satz von Bäcklund (§ 8, c), der uns diese abzuschätzen gestattet, liefert:

$$\left|\Re\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_B^C \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\,dz\right\}\right| = O(\log x_1).$$

d) Ergebnis der Integration längs $ABCA$. Wenn wir die Ergebnisse von a) bis c) zusammenfassen, erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{ABCA} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\,dz = \frac{\beta_\lambda - \beta_\varrho}{2\pi}\,x_1 + O(\log x_1).$$

Man kann jetzt, wie in § 8, den logarithmischen Streifen statt durch die Gerade $x = x_1$ durch den Kreis $r_1 = x_1$ abschließen. So erhält man das Ergebnis:

Die Anzahl der Nullstellen, die in der Umgebung einer logarithmischen Wechsellinie, jedoch innerhalb eines Kreises mit gegebenem Radius r_1 liegen, ist

1. proportional der Länge der Projektion der fraglichen Seite des erweiterten Indikatordiagramms auf die zugehörige Seite des Indikatordiagramms;

2. proportional dem Radius r_1 des Kreisbogens, der den logarithmischen Streifen abschließt.

Das Ergebnis ist richtig bis auf einen Fehler, der durch $\log r_1$ dividiert, unter einer endlichen Schranke bleibt.

Nun erfüllen die Projektionen sämtlicher Seiten des erweiterten Indikatordiagramms, die der Seite $\bar{a}_1\,\bar{a}_2$ zugeordnet sind, diese Seite ganz. Wir erhalten dann: Die Anzahl der Nullstellen, die sich der zur Strecke $\bar{a}_1\,\bar{a}_2$ gehörigen Wechselrichtung des Indikatordiagramms anschließen, ist proportional der Länge der Seite $\bar{a}_1\,\bar{a}_2$.

Da $\lim\limits_{r_1 \to \infty} \frac{N(r_1)}{r_1} = \frac{a_2 - a_1}{2\pi}$, so gilt auch: Die Dichtigkeit der Nullstellen, die sich einer Wechselrichtung anschließen, ist gleich der Länge der betreffenden Seite, dividiert durch 2π.

(Eingegangen am 1. 6. 1935.)

Abhängigkeiten zwischen den Flächenintegralen einer stetigen Funktion.

Von

F. John in Cambridge (England).

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit betrifft eine gewisse Klasse von Integralgleichungen. Es liege eine Schar von Hyperflächen $\Sigma^b_{a_1 \ldots a_r}$ im R_n vor, die von den $r+1$ Parametern $a_1, \ldots, a_r, b$ abhängt. Wir betrachten eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$, die stetig in einem gewissen *beschränkten* Gebiet G ist und außerhalb G gleich 0 gesetzt werde. Man denke sich das Integral $g(a_1, \ldots, a_r, b)$ von f über die Fläche $\Sigma^b_{a_1 \ldots a_r}$ mit einem willkürlichen analytischen Flächenelement $Q\,d\,o$ versehen, gegeben. Die Bestimmung von f aus g entspricht der Integralgleichung

$$(1) \qquad g(a_1, \ldots, a_r, b) = \int\limits_{\Sigma^b_{a_1 \ldots a_r}} f(y_1, \ldots, y_n)\, Q(a_1, \ldots, a_r, y_1, \ldots, y_n)\, d\,o$$

für f.

Wir machen nun die wesentliche Annahme, daß die $\Sigma^b_{a_1 \ldots a_r}$ eine analytische Flächenschar bilden und daß sie für festes $(a_1 \ldots a_r)$ G *schlicht* überdecken. Wir können dann die Integralgleichung in eine vertrautere Form bringen, indem wir statt g den Ausdruck

$$\gamma(a_1, \ldots, a_r, b) = \int^b g(a_1, \ldots, a_r, \beta)\, d\beta$$

gegeben denken. γ stellt dann das Integral der mit einem bestimmten Kern multiplizierten Funktion f über einen Teil $\Gamma(a_1, \ldots, a_r, b)$ von G dar. Den Zusammenhang zwischen f und γ können wir als eine Volterrasche Integralgleichung erster Art in mehreren Variablen betrachten. Während nun im allgemeinen Volterrasche Integralgleichungen erster Art in einer Variablen sich leicht auf solche zweiter Art zurückführen lassen und ein sehr einfaches Verhalten haben, ist das hier nicht mehr der Fall.

Man sollte erwarten, daß man die Integrale einer stetigen Funktion f über die Flächen einer n-parametrigen Schar willkürlich (eventuell mit gewissen Regularitätsvoraussetzungen) vorgeben kann. Das ist aber nicht zutreffend. Schon im Falle $r = 1$ ist $g(a_1, b)$, also die Integrale von f über die Flächen einer nur zweiparametrigen Schar, nicht willkürlich vor-

gebbar. In der Tat ist $g(a_1, b)$ schon für alle a_1 und b eindeutig bestimmt, wenn es nur für irgend unendlich viele a_1 (mit einem Häufungswert) und alle b gegeben ist.

Die Ausdrücke $g(a_1, \ldots, a_r, b)$ sind zwar für stetiges f im allgemeinen keineswegs analytisch; man kann ihnen aber eine reguläre analytische Funktion $F(a_1, \ldots, a_r, b)$ (im wesentlichen die Fouriertransformierte von g bezüglich b) derart zuordnen, daß sich alle Eindeutigkeitssätze für analytische Funktionen von F auf g übertragen lassen und zwar in folgender Weise: Wenn eine Menge $\mathfrak{M}$ von r-tupeln $(a_1, \ldots, a_r)$ vorliegt mit der Eigenschaft, daß die reguläre Funktion $F(a_1, \ldots, a_r, b)$ eindeutig bestimmt ist, falls sie für alle $(a_1, \ldots, a_r)$ aus $\mathfrak{M}$ und alle b gegeben ist (wir wollen $\mathfrak{M}$ dann als *vollständig* bezeichnen), dann hat auch $g(a_1, \ldots, a_r, b)$ die Eigenschaft, eindeutig bestimmt zu sein, falls es für alle $(a_1, \ldots, a_r)$ aus $\mathfrak{M}$ und alle b gegeben ist[1]). Die Variable b spielt also eine ausgezeichnete Rolle, was in der Voraussetzung zum Ausdruck kam, daß die $\Sigma^b_{a_1 \ldots a_r}$ für festes $(a_1, \ldots, a_r)$ das Gebiet G schlicht überdecken sollen. g hat diese Art quasi-analytischen Verhaltens in den übrigen Variablen, wenn es jedesmal für alle b bekannt ist.

Man könnte b als eine *zeitartige* Variable zum Unterschied von den *raumartigen* Variablen $a_1, \ldots, a_r$ bezeichnen, wie durch das Beispiel von Kugelscharen $\Sigma^b_{a_1 \ldots a_r}$ nahegelegt wird.

In der Tat kann man die Integrale einer stetigen Funktion f über die Kugeln vom Radius r und Mittelpunkt $(x_1, \ldots, x_n)$ im R_n als Funktion $u(x_1, \ldots, x_n, r)$ im $(n+1)$-dimensionalen $x_1 \ldots x_n r$-Raum betrachten. u ist Lösung einer gewissen singulären partiellen hyperbolischen Differentialgleichung, der sogenannten „Darbouxschen Gleichung". Vorgabe von u in einer gewissen Punktmenge S des $x_1 \ldots x_n r$-Raumes ist gleichbedeutend mit Vorgabe der Integrale von f über gewisse Kugeln. Diese Kugeln überdecken nun für variables r dann einen Teil des $x_1 \ldots x_n$-Raumes *schlicht*, wenn S eine *zeitartige* Mannigfaltigkeit (im üblichen Sinne) ist. Unsere allgemeinen Sätze geben dann Aussagen über das Verhalten einer Lösung u der Darbouxschen Gleichung auf zeitartigen Mannigfaltigkeiten.

Für diese Gleichung folgt dann, daß die Werte auf jeder zeitartigen analytischen Mannigfaltigkeit von mindestens zwei Dimensionen nicht

---

[1]) In § 1 wird gezeigt werden, daß eine Menge von Punkten $(a_1, \ldots, a_r)$ dann vollständig ist, wenn sie *einen* Häufungspunkt besitzt, in dem sie sich „allgemein" verhält, d. h. sich von genügend vielen (entsprechend der Dimensionszahl) Richtungen her gegen ihn häuft. Doch kann, wie an einem Beispiel gezeigt wird, auch eine Punktmenge, die sich von einer einzigen Richtung her gegen einen Häufungspunkt häuft, vollständig sein, wenn sie gewisse arithmetische Eigenschaften hat.

mehr willkürlich vorgebbar sind; sobald die Lösung nämlich auf vollständig vielen zeitartigen, zwei feste Punkte P_1 und P_2 verbindenden Kurven auf dieser Mannigfaltigkeit gegeben ist, ist die Lösung auf der ganzen Mannigfaltigkeit bestimmt, soweit sie innerhalb des von P_1 und P_2 aufgespannten charakteristischen Doppelkegels liegt. (Natürlich kann man nach den Cauchy-Kowalewskischen Sätzen auch auf zeitartigen Hyperflächen *analytische* Anfangswerte ohne Widersprüche im kleinen vorgeben). Der singuläre Charakter der Hyperebene $t = 0$ kommt darin zum Ausdruck, daß man die Forderung, daß die zeitartigen Kurven durch den festen Punkt P_2 gehen, auch durch die Forderung, daß die Kurven die Hyperebene $t = 0$ treffen, ersetzen kann. Die Dimensionszahl der zeitartigen Mannigfaltigkeit, auf der man u vorgibt, steht in keiner festen Beziehung zur Dimensionszahl der Mannigfaltigkeit, in der u dadurch bestimmt ist. Ist u z. B. auf der n-dimensionalen Hyperebene $x_1 = 0$ gegeben, so ist es noch in keinem Punkte außerhalb dadurch bestimmt. Dagegen gibt es zweidimensionale Mannigfaltigkeiten derart, daß wenn u auf ihnen vorgegeben ist, es in einem ganzen $(n + 1)$-dimensionalen Kegel eindeutig bestimmt ist[2]).

Als weitere Anwendung wird die Frage nach der eindeutigen Bestimmtheit einer Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ durch ihre Integrale über alle Einheitskugeln behandelt. Ich hatte in einer früheren Arbeit[3]) gezeigt, daß man außer den Einheitskugelintegralen noch f selbst im Innern einer festen Einheitskugel im wesentlichen willkürlich vorgeben kann. Hier wird nun in § 4 zunächst an einem Beispiel gezeigt, daß f dadurch noch nicht eindeutig bestimmt ist. Dann wird bewiesen, daß f eindeutig bestimmt ist, falls außer den Einheitskugelintegralen die Werte von f in

---

[2]) In diesem Zusammenhange möchte ich noch folgendes erwähnen. Herr Asgeirsson hat in seiner Dissertation (die zur Zeit noch nicht publiziert ist, die ich aber durch das Entgegenkommen von Herrn Prof. Courant kennen lernte) die Grundlagen einer allgemeinen Theorie aller linearer partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (von jeder Variablenanzahl und jedem Typ) entwickelt. Er hat im Anschluß daran ebenfalls Untersuchungen über Anfangswertprobleme nichtelliptischer Differentialgleichungen angestellt, deren Resultate sich mit den meinigen berühren und sich insbesondere auf die Wellengleichung beziehen. Die in der vorliegenden Arbeit gebrauchten Methoden (die mit den Asgeirssonschen nichts gemein haben) lassen sich dagegen direkt nur auf die spezielle Darbouxsche Gleichung anwenden. Die Frage der Möglichkeit von Anfangswertproblemen für nicht-total-hyperbolische Gleichungen wird auch von Herrn Prof. Courant in den „Methoden der Math. Physik", Bd. II, behandelt. Randwertaufgaben für eine Gleichung vierter Ordnung, die weder elliptisch noch total-hyperbolisch ist, hat Herr Hadamard im Tôhoku Math. Journ. 37 (1933), 133—150, diskutiert.

[3]) „Bestimmung einer Funktion ..." in Bd. 109 dieser Zeitschrift, S. 488—520.

einer Kugel vom Radius >1 gegeben sind. Wir können dieses Ergebnis auch so deuten: Eine Lösung $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ der Darbouxschen Gleichung ist eindeutig bestimmt, wenn sie auf der Hyperebene $t = 0$ für $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqq 1 + \varepsilon$ und außerdem auf der Hyperebene $t = 1$ vorgegeben ist.

§ 1.

Bestimmung einer regulären Funktion durch ihre Werte in einer Punktmenge.

Definition: M sei eine Punktmenge im R_n mit dem Häufungspunkt 0. Wenn in einem geeigneten Koordinatensystem mit 0 als Ursprung das $(n-1)$-tupel $\left(\frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$ gegen $(t_1, \ldots, t_{n-1})$ konvergiert, falls $(x_1, \ldots, x_n)$ die Punkte einer geeigneten, gegen 0 konvergierenden Untermenge von M durchläuft, so heiße die durch

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = t_1 : t_2 : \ldots : t_{n-1} : 1$$

gegebene Richtung eine *Häufungsrichtung von M in* 0.

Es gibt in jedem Häufungspunkt mindestens eine Häufungsrichtung.

Für die folgenden Ausführungen brauchen wir Punktmengen, die einen Häufungspunkt nicht zu speziellen Charakters haben. Die Art des Verhaltens von M in einem Häufungspunkt 0, auf die es ankommt, werde hier einfachheitshalber als „Allgemeinheit" von M in 0 bezeichnet. Wir nennen eine Punktmenge schlechthin „allgemein", wenn es einen Punkt gibt, in dem sie allgemein ist und definieren die Allgemeinheit durch Induktion über die Dimensionszahl wie folgt:

1. Eine Punktmenge im R_1 ist allgemein in 0, wenn 0 Häufungspunkt ist.

2. Eine Punktmenge M im R_n ist allgemein in einem Punkte 0, wenn 0 Häufungspunkt von M ist und wenn es eine Hyperebene E (die nicht durch 0 geht) gibt, so daß die Schnittpunkte der Häufungsrichtungen in 0 mit E eine allgemeine Punktmenge in E bilden[4])[5]).

Hilfssatz: *M sei eine Punktmenge im R_n, die in 0 allgemein ist. Sind dann die Werte einer Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ in den Punkten von M gegeben, so sind die Werte aller Ableitungen von f in 0 eindeutig bestimmt, soweit sie in einer Umgebung von 0 existieren und stetig sind.*

---

[4]) Es ist dabei nicht zugelassen, daß ein und derselbe Punkt mehrfach gezählt wird.

[5]) Speziell für $n = 2$ gilt: Eine Punktmenge M in der Ebene ist allgemein, wenn es eine gegen einen Punkt 0 konvergierende Teilmenge M' von M gibt, so daß die Schnittpunkte von $0P$ mit dem Einheitskreis um 0 eine Punktmenge von der Ordnung 2 bilden, wo P die Punkte von M' durchläuft.

Beweis: Durch Induktion über die Dimensionszahl n und über die Ordnung r der betrachteten Ableitung. Der Hilfssatz sei schon bewiesen für Funktionen von weniger als n Variablen. Für Funktionen von n Variablen sei schon bewiesen, daß die Ableitungen von $f(x_1, \ldots, x_n)$ bis zur $(r-1)$-ten Ordnung eindeutig durch die Werte von f in M bestimmt sind. Sei dann $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine r-mal stetig differenzierbare Funktion, die in M gegeben ist. Um zu zeigen, daß die r-ten Ableitungen in 0 eindeutig bestimmt sind, können wir ohne Beweis der Ableitung annehmen, daß die Werte von f in M verschwinden. Sei E eine Hyperebene derart, daß die Schnittpunkte mit den Häufungsrichtungen in 0 eine allgemeine Punktmenge in E bilden; wir können das Koordinatensystem so gelegt denken, daß E die Hyperebene $x_n = 1$ wird. Nach Induktionsvoraussetzung verschwinden die Ableitungen von f bis zur $(r-1)$-ten Ordnung, so daß nach der Taylorschen Formel

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{r!} x_1^r f_{x_1 x_1 \ldots x_1}(\Theta x_1, \Theta x_2, \ldots, \Theta x_n)$$
$$+ \ldots + \frac{1}{r!} x_n^r f_{x_n x_n \ldots x_n}(\Theta x_1, \ldots, \Theta x_n) \quad (0 \leqq \Theta \leqq 1).$$

Wenn nun $(x_1, \ldots, x_n)$ die Punkte einer gegen 0 konvergierenden Teilmenge von M durchläuft, für die

$$\lim\left(\frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) = (t_1, \ldots, t_{n-1}),$$

so folgt

$$0 = \frac{1}{r!} t_1^r f_{x_1 \ldots x_1}(0, \ldots, 0) + \ldots + \frac{1}{r!} f_{x_n \ldots x_n}(0, \ldots, 0).$$

Die rechte Seite kann als ein Polynom P in $t_1, \ldots, t_{n-1}$ aufgefaßt werden; P verschwindet, wenn $(t_1, \ldots, t_{n-1}, 1)$ Schnittpunkt von E mit einer Häufungsrichtung ist. Also verschwindet $P(t_1, \ldots, t_{n-1})$ in einer allgemeinen Punktmenge in E und damit verschwinden nach Induktionsvoraussetzung über n auch alle Ableitungen von P in einem bestimmten Punkte, d. i. P verschwindet identisch und folglich auch die Koeffizienten von P, die die r-ten Ableitungen von f in 0 darstellen.

Die Fälle $r = 0$ und $n = 1$ lassen sich mühelos erledigen, womit der Induktionsschluß vollständig gemacht ist.

Eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ heiße *regulär* in einem reellen, offenen Gebiet G, wenn sie in der Umgebung jedes Punktes von G durch eine Potenzreihe dargestellt wird. Dann gilt:

$f(x_1, \ldots, x_n)$ ist durch Vorgabe seiner Werte in einer allgemeinen in G enthaltenen Punktmenge M eindeutig in G bestimmt.

Denn durch Vorgabe der Werte von f in M sind alle Ableitungen von f in einem Punkte von G, wo M sich allgemein verhält, eindeutig

bestimmt; damit ist *ein* Funktionselement der analytischen Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ bestimmt und damit alle[6]).

Eine reguläre Funktion kann sehr wohl schon durch Vorgabe ihrer Werte in einer nicht allgemeinen Punktmenge bestimmt sein, nur gibt es kein einfaches Kriterium dafür, wann das der Fall ist[7]). So ist eine reguläre Funktion im R_n nicht durch ihre Werte in einer Hyperebene bestimmt, dagegen manchmal schon durch ihre Werte auf einem eindimensionalen Kurvenbogen, wie das folgende Beispiel lehrt.

Eine Kurve C im R_n sei in Parameterdarstellung gegeben durch

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{\varphi} \sin 2\pi\alpha_1 \varphi \\ x_2 &= e^{\varphi} \sin 2\pi\alpha_2 \varphi \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} &= e^{\varphi} \sin 2\pi\alpha_{n-1} \varphi \\ x_n &= e^{\varphi}, \end{aligned}$$

wo die Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ rational unabhängig sind. M sei eine unendliche Menge von Punkten auf dieser Kurve, die alle auf ein Intervall

$$|\varphi| \leqq A$$

beschränkt sind. Ist dann eine für

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq n\, e^{2A} \tag{2}$$

reguläre Funktion $f(x_1 \ldots x_n)$ nur in den Punkten um M gegeben, so ist sie eindeutig für alle $(x_1, \ldots, x_n)$ in (2) bestimmt.

Denn auf C ist f eine reguläre Funktion von φ für $-\infty < \varphi < A$; da f für unendlich viele φ aus einem beschränkten Intervall verschwindet, verschwindet es für alle φ auf C, insbesondere für große negative φ. Nun bilden die Punkte von C eine im Ursprung allgemeine Punktmenge; denn

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : \ldots : x_n &= \sin 2\pi\alpha_1\varphi : \ldots : \sin 2\pi\alpha_{n-1}\varphi : 1 \\ &= \sin 2\pi\overline{\alpha_1\varphi} : \sin 2\pi\overline{\alpha_2\varphi} : \ldots : \sin 2\pi\overline{\alpha_{n-1}\varphi} : 1, \end{aligned}$$

wenn $\bar{x} = x - [x]$ gesetzt ist; das $(n-1)$-tupel $(\overline{\alpha_1\varphi}, \ldots, \overline{\alpha_{n-1}\varphi})$ kann durch geeignete Wahl von φ mit beliebiger Genauigkeit gleich einem gegebenen $(n-1)$-tupel $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ mit $0 \leqq a_i \leqq 1$ gemacht werden, selbst wenn φ auf stark negative Werte beschränkt ist[8]); d. h. alle Rich-

[6]) Vgl. Osgood: Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, § 24, 25.

[7]) D. h. es gibt vollständige Punktmengen im Sinne der Definition von S. 542, die nicht allgemein sind. Die Menge des folgenden Beispiels ist allerdings nicht für *alle* sie enthaltenden offenen Bereiche vollständig.

[8]) Man wähle ein α so, daß $\frac{1}{\alpha}$ rational unabhängig von $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ ist; dann kann man φ sogar auf ganzzahlige Vielfache von α beschränken. Vgl. Perron: Irrationalzahlen, Satz 56a und 64.

tungen $t_1 : t_2 : \ldots : t_{n-1} : 1$ mit $|t_i| \leqq 1$ sind Häufungsrichtungen in 0. f ist so in einer allgemeinen Punktmenge und daher nach dem Vorhergehenden überall eindeutig bestimmt.

§ 2.

Abhängigkeiten zwischen den Kurvenintegralen einer stetigen Funktion.

G sei ein abgeschlossenes Gebiet im R_n, von dem wir, um die Ideen zu fixieren, annehmen, daß es von einer endlichen Anzahl stückweise glatter Hyperflächen begrenzt wird. Es liege eine Familie von Hyperflächen $\Sigma^b_{a_1 \ldots a_r}$ vor, die von $(r+1)$ Parametern $a_1, \ldots, a_r$, b abhängt und den folgenden Bedingungen genügt:

1. $\Sigma^b_{a_1 \ldots a_r}$ werde implizit durch eine Gleichung

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r) = b$$

gegeben, wo φ eine eindeutige stetig differenzierbare Funktion aller Veränderlichen ist und $\varphi, \varphi_{x_1}, \ldots, \varphi_{x_n}$ regulär in $a_1, \ldots, a_r$ sind, für $(x_1, \ldots, x_n)$ in G, $(a_1, \ldots, a_r)$ in Γ und $|b| \leqq B$, wo B eine Konstante und Γ ein bestimmtes Gebiet des $(a_1 \ldots a_r)$-Raumes bezeichnet.

2. Die Hyperflächen $\Sigma^b_{a_1 \ldots a_r}$ mögen für feste $a_1, \ldots, a_r$ G schlicht überdecken, d. h. für festes $(a_1, \ldots, a_r)$ aus Γ soll genau eine Hyperfläche $\Sigma^b_{a_1 \ldots a_r}$ mit $|b| \leqq B$ durch einen vorgegebenen Punkt von G gehen.

3. $\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi^2_{x_i} \neq 0$ in G.

4. $\Sigma^b_{a_1 \ldots a_r}$ habe mit jedem der endlich vielen Randhyperflächenstücke von G entweder nur eine $(r-2)$-dimensionale Mannigfaltigkeit gemeinsam, oder das ganze Randstück.

Sei dann $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine beliebige stetige Funktion in G, die wir außerhalb G identisch $= 0$ festsetzen, und $Q(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r)$ eine beliebige Funktion, die stetig in $(x_1, \ldots, x_n)$ und regulär in $a_1, \ldots, a_r$ für $(x_1, \ldots, x_n)$ in G und $(a_1, \ldots, a_r)$ in Γ ist, g bezeichne das Integral von f über $\Sigma^b_{a_1 \ldots a_r}$ mit der Belegung Q:

$$g(a_1, \ldots, a_r, b) = \int\limits_{\Sigma^b_{a_1 \ldots a_r}} f(x_1, \ldots, x_n)\, Q(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r)\, do.$$

Dann gilt:

Die Funktion $g(a_1, \ldots, a_r, b)$ ist eindeutig für alle $(a_1, \ldots, a_r)$ in Γ und b mit $|b| \leqq B$ bestimmt, wenn sie nur für die $(a_1, \ldots, a_r)$ einer allgemeinen Menge M aus Γ und alle $|b| \leqq B$ gegeben ist.

Zum Beweise bilden wir den Ausdruck

(3) $F(a_1, \ldots, a_r, \alpha)$

$$= \int_G f(x_1, \ldots, x_n) Q(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r) \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i}^2}\, e^{i\alpha\varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r)} d x_1 \ldots d x_n,$$

der für irgendein $(a_1, \ldots, a_r)$ aus Γ und alle α definiert ist. Führt man

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r) = b$$

als neue Integrationsvariable ein, so folgt[9])

$$(4) \qquad F(a_1, \ldots, a_r, \alpha) = \int_{-B}^{+B} d b \int_{\Sigma^b_{a_1 \ldots a_r}} e^{i\alpha\varphi} f Q\, d o$$

$$= \int_{-B}^{+B} e^{i\alpha b} g(a_1, \ldots, a_r, b)\, d b.$$

Wenn also g für $|b| \leqq B$ und alle $(a_1, \ldots, a_r)$ aus M gegeben ist, so ist damit F für dieselben $(a_1, \ldots, a_r)$ und alle α bekannt, d. h. in einer allgemeinen Punktmenge des $a_1 \ldots a_r\, \alpha$-Raumes.

Andererseits ist F eine reguläre Funktion von allen Argumenten für $(a_1 \ldots a_r)$ in Γ und beliebige α. F ist ja durch (3) in einer komplexen Umgebung jedes $(a_1, \ldots, a_r)$ aus Γ erklärt; um einzusehen, daß F regulär analytisch ist, hat man nur die Existenz der Ableitung von G nach jeder der Variablen $a_1, \ldots, a_r$, α sicher zu stellen[10]); man kann aber offenbar in (3) die Ableitungen von F einfach durch Differenzieren unter den Integralzeichen bilden, da Q, $e^{i\alpha\varphi}$, $\sqrt{\Sigma \varphi_{x_i}^2}$ regulär analytisch sind (der letztere Ausdruck nach Voraussetzung 3. für eine komplexe Umgebung der Punkte $(a_1, \ldots, a_r, \alpha)$, für die $(a_1, \ldots, a_r)$ in Γ liegt. Da also F regulär und in einer allgemeinen Punktmenge des $(a_1, \ldots, a_r\, \alpha)$-Raumes gegeben ist, ist es durch die Vorgaben eindeutig für alle $(a_1 \ldots a_r)$ aus Γ und alle α bestimmt.

Dann ist aber auch $g(a_1, \ldots, a_r, b)$ für alle $(a_1 \ldots a_r)$ aus Γ bestimmt; denn wegen (4) kennt man für ein solches $(a_1 \ldots a_r)$ schon alle Fourierkoeffizienten von g, als Funktion von b betrachtet, und g hängt stückweise stetig von b ab. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Zur Illustration des Satzes diene folgendes Beispiel: $d_1, d_2, d_3, \ldots$ möge irgendeine unendliche Folge von Richtungen in der Ebene bezeichnen. f sei eine stetige Funktion in einem Gebiet G der xy-Ebene, die außerhalb G gleich 0 gesetzt werde. Ist dann das Integral von f über alle Geraden, die eine der Richtungen $d_1, d_2, \ldots$ haben, gegeben

---

[9]) Vgl. Courant, Differential- und Integralrechnung Bd. II, S. 245.

[10]) Vgl. loc. cit. [8]) S. 6.

so ist auch das Integral von f über alle anderen Geraden bestimmt (und damit übrigens f selbst). Dies folgt aus dem eben Bewiesenen, wenn man z. B. $Q = 1$, $\varphi = ax + y$ setzt.

§ 3.
Anwendung auf zeitartige Randwertprobleme für die Darbouxsche Gleichung.

Wir wenden den Satz des vorigen Paragraphen speziell auf Kugelintegrale an. Man erhält eine einfachere Übersicht über die Verhältnisse, wenn man die Kugelintegrale einer Funktion als Lösungen einer partiellen Differentialgleichung wie folgt interpretiert.

Sei $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ eine Lösung der „Darbouxschen" Gleichung

$$u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n} - \frac{n-1}{t} u_t - u_{tt} = 0 \tag{5}$$

und zweimal stetig differenzierbar in dem Kegelgebiet

$$\sqrt{\sum_i (x_i - x_i^0)^2} \leqq t_0 - t, \qquad t \geqq 0. \tag{6}$$

Dann ist für $(x_1, \ldots, x_n, t)$ in (6)

$$u(x_1, \ldots, x_n, t) = \frac{1}{\omega_n t^{n-1}} \int\limits_{\Omega^t_{x_1 \ldots x_n}} u(y_1, \ldots, y_n, 0)\, do \tag{7}$$

wo $\Omega^t_{x_1 \ldots x_n}$ die Oberfläche der Hyperkugel vom Radius t um den Punkt $(x_1, \ldots, x_n)$ des $y_1 \ldots y_n$-Raumes bezeichnet und ω_n der Flächeninhalt von $\Omega^1_{0 \ldots 0}$ ist[11]). Man verifiziert im übrigen leicht die Umkehrung, daß für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(y_1 \ldots y_n) = u(y_1, \ldots, y_n, 0)$ der Ausdruck (7) eine Lösung von (5) darstellt.

Es liege dann eine r-parametrige Schar von *zeitartigen analytischen* Kurven $S_{a_1 \ldots a_r}$ vor, die alle durch dieselben zwei Punkte P_0, P_1 gehen mögen, und *ganz oberhalb* der $x_1 \ldots x_n$-Ebene liegen. Die Kurven seien in Parameterdarstellung durch

$$\begin{aligned} x_1 &= \Phi_1(\tau, a_1, \ldots, a_r), \quad x_2 = \Phi_2(\tau, a_1, \ldots, a_r), \\ \ldots, \quad x_n &= \Phi_n(\tau, a_1, \ldots, a_r), \\ t &= \Psi(\tau, a_1, \ldots, a_r) \end{aligned} \tag{8}$$

gegeben, wo

1. $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \Psi$ reguläre Funktionen von $a_1, \ldots, a_r, \tau$ für $0 \leqq \tau \leqq 1$ und $(a_1, \ldots, a_r)$ in Γ sind,

[11]) Für einen Beweis dieses Satzes verweise ich auf die Dissertation von Herrn Asgeirsson und auf den zweiten Band der „Methoden der Math. Physik" von R. Courant, wo auch der Zusammenhang der Darbouxschen Gleichung mit der Wellengleichung ausführlich diskutiert wird.

2. $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, Ψ sich für $\tau = 0$ und beliebige $(a_1, \ldots, a_r)$ aus Γ auf die Koordinaten von P_0 und für $\tau = 1$ auf die Koordinaten von P_1 reduzieren,

$$(0 < \Psi\,(0, a_1, \ldots, a_r) < \Psi\,(1, a_1, \ldots, a) < t_0),$$

3.

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \tau}\right)^2 < \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tau}\right)^2. \tag{9}$$

Unter einer „allgemeinen" Schar von Kurven $S_{a_1 \ldots a_r}$ verstehen wir eine solche, für die $(a_1, \ldots, a_r)$ eine allgemeine Punktmenge bilden.

Dann gilt: Ist eine in (6) zweimal stetig differenzierbare Lösung u von (5) auf den Kurven einer allgemeinen Schar von Kurven $S_{a_1 \ldots a_r}$ für $0 \leqq \tau \leqq 1$ gegeben, so ist sie auf allen Kurven $S_{a_1 \ldots a_r}$ für $0 \leqq \tau \leqq 1$ eindeutig bestimmt. D. h. u ist dann auf dem zeitartigen $(r+1)$-dimensionalen Flächenstück bekannt, das mit Hilfe der Parameter $a_1, \ldots, a_r$ für $0 \leqq \tau \leqq 1$, $(a_1, \ldots, a_r)$ in Γ durch (8) gegeben wird.

Beweis: Wir bemerken zunächst, daß die Punkte einer Kurve $S_{a_1 \ldots a_r}$ mit $\tau < \tau_0$ gänzlich innerhalb des Kegels

$$\sqrt{(x_1 - \Phi_1(\tau_0))^2 + (x_2 - \Phi_2(\tau_0))^2 + \cdots + (x_n - \Phi_n(\tau_0))^2} + t \leqq \Psi(\tau_0)$$

liegen. Denn $S_{a_1 \ldots a_r}$ liegt wegen (9) sicher in einer gewissen Umgebung von $\tau = \tau_0$ innerhalb des Kegels; würde $S_{a_1 \ldots a_r}$ den Kegel in einem Punkte τ mit $0 \leqq \tau < \tau_0$ schneiden, so sei R der Schnittpunkt mit dem größten τ; dann würde $S_{a_1 \ldots a_r}$ mit wachsendem τ in R den Kegel von außen nach innen durchsetzen; dann könnte aber nicht (9) in R erfüllt sein.

Mit dem Wert von u in einem Punkte $(x_1, \ldots, x_n, t)$ ist das Integral von $u(y_1, y_2, \ldots, y_n, 0)$ über die Hyperkugel $\Omega^t_{x_1 \ldots x_n}$ des $y_1 \ldots y_n$-Raumes gegeben. Den Punkten $(x_1, \ldots, x_n, t)$ der Kurve $S_{a_1 \ldots a_r}$ mit $0 \leqq \tau \leqq 1$ entspricht eine Schar von Kugeln im $y_1 \ldots y_n$-Raum. Diese Kugeln liegen wegen der Zeitartigkeit von $S_{a_1 \ldots a_r}$ nach dem eben Bewiesenen ineinander und überdecken den Raum zwischen den beiden P_1 und P_2 entsprechenden Kugeln schlicht. Somit kann man unmittelbar auf die Integrale über diese Kugelscharen den Satz von § 2 anwenden, wenn G mit dem Raum zwischen den P_0 und P_1 entsprechenden Kugeln, f mit $u(y_1, \ldots, y_n, 0)$ und Q mit 1 identifiziert wird. Man hat sich nur noch zu vergewissern, daß diese Kugelscharen durch eine Gleichung

$$\varphi\,(y_1, \ldots, y_n, a_1, \ldots, a_r) = \tau$$

gegeben werden, wo φ regulär in $a_1, \ldots, a_r$ und $\sum_{i=1}^{n} \varphi_{y_i}^2 \neq 0$ ist. Nun werden die Punkten von $S_{a_1 \ldots a_r}$ entsprechenden Kugeln durch

$$H = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \Phi_i(\tau, a_1, \ldots, a_r))^2 - \Psi(\tau, a_1, \ldots, a_r)^2 = 0 \tag{10}$$

gegeben; diese Gleichung läßt sich für $(y_1, \ldots, y_n)$ in G eindeutig nach τ auflösen; τ wird dann eine reguläre Funktion der anderen Größen, da die Gleichung $H_\tau = 0$ oder

$$-\sum_{i=1}^{n} (y_i - \Phi_i) \frac{\partial \Phi_i}{\partial \tau} = \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}$$

wegen (9) und (10) nur die Lösung

$$y_i = \Phi_i, \quad \Psi = 0$$

hat und in den Punkten von $S_{a_1 \ldots a_r}$ für $0 \leqq \tau \leqq 1$ immer $\Psi > 0$ gilt. Aus denselben Gründen ist auch

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \tau}{\partial y_i}\right)^2 = \frac{\sum (y_i - \Phi_i)^2}{\left(\Psi_\tau + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \tau} (y_k - \Phi_k)\right)^2}$$

regulär und $\neq 0$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Es sind also schon die Werte von u auf irgend unendlich vielen zeitartigen analytischen Kurven einer einparametrigen analytischen Schar (mit einer zeitartigen Häufungskurve und zwei gemeinsamen Punkten) voneinander abhängig.

Sei andererseits eine n-parametrige analytische Schar von zeitartigen Kurven von P_0 nach P_1 vorgelegt, die einen gewissen, sich von P_0 nach P_1 erstreckenden, Teil T des $x_1 \ldots x_n$ t-Raumes überdecken. Wenn u dann auf einer allgemeinen Schar von diesen Kurven vorgegeben ist, so ist es in dem ganzen charakteristischen Doppelkegel mit den Spitzen P_0 und P_1 eindeutig bestimmt. Denn dann ist u zunächst in T eindeutig bestimmt; wenn dann P ein beliebiger Punkt in dem Doppelkegel ist, so kann man eine analytische Schar von zeitartigen durch P_0 und P_1 gehenden Kurven konstruieren, so daß unendlich viele der Kurven in T liegen und eine durch P geht; dann ist u auf allen Kurven dieser Schar und daher auch in P bestimmt.

Die Anzahl der Parameter der Kurvenschar hat hier keine ausschlaggebende Rolle. Es kann sein (vgl. das Beispiel S. 554), daß u durch die Vorgabe in den Punkten einer einparametrigen Kurvenschar (also auf einem zweidimensionalen Flächenstück) in einem $(n+1)$-dimensionalen Raumstück eindeutig bestimmt ist.

Wir haben bisher immer ausdrücklich vorausgesetzt, daß die Punkte, in denen u vorgegeben war, oberhalb der $x_1 \ldots x_n$-Ebene lagen. Wir werden jetzt sehen, daß wesentlich andere Verhältnisse vorliegen, sobald u auf Kurven, die diese Ebene treffen, vorgegeben ist.

Es liege jetzt eine r-parametrige Familie von zeitartigen analytischen Kurven vor, die alle durch einen und denselben Punkt P gehen und alle die $x_1 \ldots x_n$-Ebene treffen; o. B. d. A. nehmen wir an, daß P die Koordinaten $x_1 = \ldots = x_n = 0$, $t = 1$ hat und führen auf den Kurven t als Parameter τ ein. Dann sei $S_{a_1 \ldots a_r}$ durch

(11) $$x_1 = \Phi_1(t, a_1, \ldots, a_r), \ldots, \quad x_n = \Phi_n(t, a_1, \ldots, a_r)$$

gegeben, wo

1. $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ reguläre Funktionen für $(a_1, \ldots, a_r)$ in Γ und $0 \leqq t \leqq 1$ sind,
2. $\Phi_i(1, a_1, \ldots, a_r) = 0$ für $i = 1, \ldots, n$,
3. $\sum\limits_{i=1}^{n} \Phi_i^2 < 1$.

Die Kugeln $\Omega^t_{x_1 \ldots x_n}$ im $y_1 \ldots y_n$-Raum überdecken dann schlicht das Kugelgebiet

(12) $$y_1^2 + \cdots + y_n^2 \leqq 1,$$

wenn $(x_1, \ldots, x_n, t)$ eine Kurve $S_{a_1 \ldots a_r}$ durchläuft; aber sie ziehen sich für $t \to 0$ auf einen Punkt zusammen.

Die $S_{a_1 \ldots a_r}$ entsprechende Kugelschar wird durch

(13) $$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \Phi_i(t, a_1, \ldots, a_r))^2 = t^2$$

gegeben. Für positives t ist hieraus t als reguläre Funktion von $y_1, \ldots, y_n$, $a_1, \ldots, a_r$ in der Form

(14) $$t = \varphi(y_1, \ldots, y_n, a_1, \ldots, a_r)$$

darstellbar; in der Umgebung von $t = 0$ hängt t aber nicht regulär von diesen Größen ab. Wir können jedoch den Satz von § 2 doch noch anwenden, nachdem wir uns von der Harmlosigkeit der Singularität von t überzeugt haben. Die Gleichung (13) hat für

$$y_i = \Phi_i(0, a_1, \ldots, a_r)$$

und kleine t nur die Doppelwurzel $t = 0$. Auf Grund des Weierstrassschen Vorbereitungssatzes[12]) ist dann in einer Umgebung von $t = 0$

$$t = A + \sqrt{B},$$

wo A und B reguläre Funktionen von $y_1, \ldots, y_n, a_1, \ldots, a_r$ in einer Umgebung von $y_i = \Phi_i(0, a_1, \ldots, a_r)$ bedeuten. B denken wir nach

[12]) Vgl. loc. cit. [6]) S. 69 ff.

Potenzen der $(y_i - \Phi_i(0, a_1, \ldots, a_r))$ mit von $a_1, \ldots, a_r$ abhängigen Koeffizienten entwickelt. Aus Formel (13) kann man[13]) die Anfangsglieder dieser Entwicklung erschließen und findet

$$B = q + \text{(höhere Glieder)},$$

wo q die quadratische Form

$$(15) \qquad q = \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^{n} (\Phi_i^{0\prime})^2\right) \sum_{k=1}^{n} (y_k - \Phi_k^0)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \Phi_i^{0\prime} (y_i - \Phi_i^0)\right)^2}{1 - \sum_{i=1}^{n} (\Phi_i^{0\prime})^2}$$

bezeichnet $\left(\Phi_i^0 \text{ und } \Phi_i^{0\prime} \text{ bedeuten } \Phi_i \text{ und } \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \text{ für } t = 0\right)$. Wir merken uns von dem Ausdruck für q nur, daß q eine positiv definite Form in den $(y_i - \Phi_i^0)$ ist; dabei haben wir wieder die Zeitartigkeit der $S_{a_1 \ldots a_r}$ benutzt, derentwegen $1 - \sum_{i=1}^{n} (\Phi_i^{0\prime})^2 > 0$ ist.

Jetzt bezeichne G das Kugelgebiet (12), φ die Funktion (14). Dann ist leicht einzusehen, daß für stetiges $f(y_1, \ldots, y_n)$

$$(16) \quad F(a_1, \ldots, a_r, \alpha) = \int_G e^{i\alpha\varphi} \varphi^3 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varphi_{y_i}^2}\, f(y_1, \ldots, y_n)\, d y_1, \ldots, d y_n$$

wieder eine reguläre Funktion ist. Denn man kann die komplexe Differentiation nach $a_1, \ldots, a_r, \alpha$ unter dem Integralzeichen ausführen, auch in der Umgebung der kritischen Stelle $y_1 = \Phi_1^0, \ldots, y_n = \Phi_n^0$; dazu ist nur nötig zu bemerken, daß wenn $\varrho^2 = \sum_i (y_i - \Phi_i^0)^2$ gesetzt wird, in der Nähe von $(y_1, \ldots, y_n) = (\Phi_1^0, \ldots, \Phi_n^0)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = O\left(\frac{1}{\sqrt{B}}\right) = O\left(\frac{1}{\varrho}\right), \quad \frac{\partial \varphi_{y_i}}{\partial a_k} = O\left(\frac{1}{\sqrt{B^3}}\right) = O\left(\frac{1}{\varrho^3}\right), \quad \varphi = O(\varrho),$$

$$\sqrt{\sum_i \varphi_{y_i}^2} = \frac{1}{1 + \sum_i \Phi_i' \frac{y_i - \Phi_i}{t}} = O(1), \quad \frac{1}{\sqrt{\sum_i \varphi_{y_i}^2}} = O(1).$$

Es folgt so, daß F bestimmt ist, wenn es für alle α und eine allgemeine Menge von Punkten $(a_1, \ldots, a_r)$ gegeben ist. Da

$$F(a_1, \ldots, a_r, \alpha) = \int_0^1 e^{i\alpha b} b^3 \Big(\int_{\Omega^b_{x1 \ldots x_n}} f\, d o \Big) d b$$

$$= \omega_n \int_0^1 e^{i\alpha b} b^{3+n} u(x_1, \ldots, x_n, b)\, d b,$$

---

[13]) Z. B. durch Vergleich der Ausdrücke für $\lim \frac{\partial t}{\partial y_i}$ für $y_i \to \Phi_i(0, a_1, \ldots, a_r)$.

wo für $x_1, \ldots, x_n$ die Werte an der durch (11) gegebenen Stelle zu nehmen sind, kann man daraus den entsprechenden Eindeutigkeitssatz für die Kugelintegrale von f ableiten:

Liegt eine r-parametrige analytische Schar von zeitartigen Kurvenstücken $S_{a_1 \ldots a_r}$ im $x_1 \ldots x_n$, t-Raum vor, die alle von einem Punkte P zur $x_1 \ldots x_n$-Ebene führen, und ist $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ auf einer Teilschar von $S_{a_1 \ldots a_r}$, für die die $(a_1, \ldots, a_r)$ eine allgemeine Menge bilden, gegeben, so ist u auf allen $S_{a_1 \ldots a_r}$, also im allgemeinen auf einem $(r+1)$-dimensionalen Flächenstück, bestimmt. (Damit ist auch

$$u(x_1, \ldots, x_n, 0) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

für $\Sigma x_i^2 \leqq 1$ bestimmt, d. h. in diesem Falle haben wir unsere Integralgleichung auch aufgelöst.)

Liegt insbesondere eine n-parametrige analytische Schar von zeitartigen Kurven vor (von P zur $x_1 \ldots x_n$-Ebene führend), die einen gewissen Teil des $x_1 \ldots, x_n$, t-Raumes überdecken und ist u auf einer allgemeinen Teilschar von diesen gegeben, so ist u in allen Punkten innerhalb des von P ausgehenden charakteristischen Kegels eindeutig bestimmt. Insbesondere ist z. B. u eindeutig in dem von P ausgehenden charakteristischen Kegel bestimmt, wenn es in einer $(n+1)$-dimensionalen Umgebung des Lotes von P auf die $x_1 \ldots x_n$-Ebene gegeben ist.

Es ist aber gar nicht nötig, u auf einer allgemeinen Kurvenschar, die aus einer n-parametrigen Schar ausgewählt ist, vorzugeben, um es in einem vollen $(n+1)$-dimensionalen Raumteil zu haben. Sei z. B. eine Geradenschar mit dem Parameter a, wie folgt, gegeben:

$$\begin{aligned} x_\nu &= (t-1)\, e^a \sin 2\pi \alpha_\nu a \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, n-1, \\ x_n &= (t-1)\, e^a, \end{aligned} \tag{17}$$

wo $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ rational unabhängige reelle Zahlen seien. Sei u eine Lösung von (5), die in dem Kegel

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqq (1-t)^2 \tag{18}$$

zweimal stetig differenzierbar ist. Wenn u auf irgend unendlich vielen dieser Strecken, die Parameterwerten in einem beschränkten Intervall

$$-A \leqq a \leqq -\tfrac{1}{2}\log n - \varepsilon$$

entsprechen mögen, gegeben ist, so ist u eindeutig im ganzen Kegel (18) bestimmt.

Zum Beweise betrachten wir die n-parametrige Schar aller Geraden $S_{a_1 \ldots a_n}$, die durch

$$x_\nu = (t-1)\, a_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

mit $\Sigma a_\nu^2 < 1$ gegeben werden. $F(a_1, \ldots, a_n, \alpha)$ sei die entsprechende durch (16) gegebene Funktion (hier ist übrigens φ leicht explizit anzugeben). F ist nach Voraussetzung für die durch

$$a_\nu = e^a \sin 2\pi\alpha_\nu a \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, n-1,$$
$$a_n = e^a$$

gegebenen $(a_1, \ldots, a_n)$ und alle α gegeben. Nach S. 545 ist die reguläre Funktion F dadurch eindeutig bestimmt, und damit auch u in dem Kegel (18).

u ist also z. B. eindeutig in dem $(n+1)$-dimensionalen Gebiet (18) bestimmt, wenn es auf dem zweidimensionalen Flächenstück vorgegeben ist, das die Parameterdarstellung

$$x_\nu = (t-1)e^a \sin 2\pi\alpha_\nu a \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1),$$
$$x_n = (t-1)e^a$$

für $0 \leqq t \leqq 1$, $-\frac{1}{2}\log n - 2\varepsilon \leqq a \leqq -\frac{1}{2}\log n - \varepsilon$ hat.

§ 4.

Bestimmtheit einer Funktion durch ihre Einheitskugelintegrale.

Als weitere Anwendung, oder genauer als Anwendung der vorhergehenden Anwendung, werde die Bestimmung einer Funktion durch ihre Einheitskreisintegrale ausgeführt. Eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ ist noch nicht bestimmt, wenn man ihre Integrale über alle Hyperkugeln vom Radius 1 kennt. Sie ist es nicht einmal dann, wenn man noch die Werte der Funktion selbst innerhalb einer bestimmten Kugel vom Radius 1 kennt. Ehe wir zu unserer eigentlichen Anwendung kommen, beweisen wir noch diese letzte Behauptung durch Beispiele für den Fall $n = 2$.

Bezeichne ν eine ganze Zahl mit $|\nu| \geqq 2$, $P_\nu(x)$ ein Polynom vom Grade $\leqq |\nu|$, das keine Glieder 0-ter und erster Ordnung in x enthält und gerade bzw. ungerade in x ist, je nachdem ν gerade oder ungerade ist; J_ν sei die Besselsche Funktion und $\pm\alpha_i$ seien die Wurzeln der Besselschen Funktion J_0. Bilden wir dann[14])

$$f_\nu(x, y) = f_\nu(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$
$$= e^{i\nu\varphi}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' (-1)^n P_\nu\left(\frac{1}{n}\right) J_0(\pi n)\left[\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{\pi n - \alpha_\mu} + \frac{1}{\alpha_\mu}\right)\frac{J_\nu(\alpha_\mu r)}{J_0'(\alpha_\mu)}\right]\right),$$

so verschwindet $f_\nu(x, y)$ für $r^2 = x^2 + y^2 \leqq 1$ und ebenso verschwinden die Integrale von f_ν über alle Kreise vom Radius 1. (Dasselbe gilt dann natürlich für jede geeignet konvergente Linearkombination der f_ν.) Außerdem verschwindet f_ν nicht identisch.

---

[14]) Man wird auf diesen Ausdruck durch ähnliche Überlegungen wie l. c. [3]) S. 515 geführt.

Wir skizzieren hier nur den Beweis für diese Feststellung. Wir betrachten für reelles r den Ausdruck

$$H_\nu(r) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' (-1)^n P_\nu\left(\frac{1}{n}\right) J_0(\pi n) \left[\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{\pi n - \alpha_\mu} + \frac{1}{\alpha_\mu}\right) \frac{e^{i\alpha_\mu r}}{J_0'(\alpha_\mu)} \right].$$

(Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist gleichmäßig konvergent und beschränkt in n und r.) H_ν ist mit ν gerade bzw. ungerade in r. Durch gliedweises Integrieren folgt sofort

$$\int_{-1}^{+1} \frac{H_\nu(r+t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \equiv 0. \tag{19}$$

Andererseits gilt für $|r| \leqq 1$

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{s-\alpha_\mu} + \frac{1}{\alpha_\mu}\right) \frac{e^{i\alpha_\mu r}}{J_0'(\alpha_\mu)} = \frac{e^{irs}}{J_0(s)} - 1\ ^{15)}.$$

Daher ist für $|r| \leqq 1$

$$H_\nu(r) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' (-1)^n P_\nu\left(\frac{1}{n}\right) \left(e^{i\pi n r} - J_0(\pi n)\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{\nu} A_n B_n(r) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' (-1)^n P_\nu\left(\frac{1}{n}\right) J_0(\pi n),$$

wenn $P_\nu(x) \equiv \sum_{\mu=2}^{\nu} A_\mu x^\mu$ ist und B_n die mit den Bernoullischen nahe verwandten *Polynome*

$$B_\mu(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{(-1)^n e^{i\pi n x}}{n^\mu}$$

bezeichnet. Danach reduziert sich also $H_\nu(r)$ für $|r| \leqq 1$ auf ein nicht identisch verschwindendes Polynom Q_ν vom Grade $\leqq |\nu|$, das mit ν gerade bzw. ungerade ist. $H_\nu(r)$ kann nicht für *alle* r mit einem Polynom übereinstimmen, weil dann aus (19) $H_\nu \equiv 0$ folgen würde.

Es ist nun

$$\int_0^{2\pi} H_\nu(x\cos\psi + y\sin\psi)\, e^{i\nu\psi}\, d\psi$$

$$= e^{i\nu\varphi} \int_0^{2\pi} H_\nu(r\cos\psi)\, e^{i\nu\psi}\, d\psi = 2\pi i^\nu f_\nu(x, y).$$

---

[15]) Für einen Beweis dieser Identität verweise ich auf l. c.[3]), § 3. Man kann sie übrigens auch direkt aus der Entwicklung von $J_0(s\,x)$ nach den $J_0(\alpha_n x)$ erschließen.

Folglich ist das Integral von f_ν über einen Einheitskreis mit Mittelpunkt (ξ, η)

$$\int_0^{2\pi} f_\nu(\xi + \cos\chi, \eta + \sin\chi)\, d\chi$$

$$= \frac{1}{\pi i^\nu} \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{+1} \frac{H_\nu(\xi\cos\psi + \eta\sin\psi + y)}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = 0$$

nach (19); ebenso für $|r| \leqq 1$

$$f_\nu(x, y) = \frac{1}{2\pi i^\nu} e^{i\nu\varphi} \int_0^{2\pi} Q_\nu(r\cos\psi)\cos\nu\psi\, d\psi = 0,$$

da der Grad von $Q_\nu \leqq |\nu|$ ist.

Würde andererseits f_ν identisch verschwinden, so folgte aus

$$2\pi i^\nu f_\nu(x, y) = e^{i\nu\varphi} \int_0^{\pi} H_\nu(r\cos\psi)\cos\nu\psi\, d\psi,$$

daß H_ν *für alle* r mit einem Polynom vom Grade $\leqq \nu$ übereinstimmen müßte, was nicht der Fall ist[16]).

Wir werden nun im Gegensatz dazu zeigen:

Eine stetige Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ ist eindeutig bestimmt für

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqq A^2 \qquad (A > 1),$$

wenn

1. das Einheitskugelintegral $\Omega^1_{x_1 \ldots x_n}$ von f für

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqq (A-1)^2;$$

2. $f(x_1, \ldots, x_n)$ selbst für

$$\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \leqq 1 + \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

bekannt ist[17]).

Zum Beweise nehmen wir o. B. d. A. an, daß die Vorgaben verschwinden. $F(x_1, \ldots, x_n, r)$ bezeichne das Integral von f über $\Omega^r_{x_1 \ldots x_n}$.

---

[16]) Sei nämlich $S(r) = \int_0^{\pi} H_\nu(r\cos\psi)\cos\nu\psi\, d\psi$. Für gerades ν ist $S \equiv 0$ gleichbedeutend mit einer linearen Differentialgleichung der Ordnung $\frac{\nu}{2}$ für den Ausdruck $\int_0^{\pi} H_\nu(r\cos\psi)\sin^\nu\psi\, d\psi$, durch den H_ν eindeutig bestimmt ist. Für ungerades ν gilt derselbe Sachverhalt für $H_\nu^*(x) = x H_\nu(x)$.

[17]) Daraus folgt, daß es Punkte mit $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \leqq 1 + \varepsilon$ gibt, in denen $f_\nu(x, y)$ nicht verschwindet.

Dann sei also $F(x_1, \ldots, x_n, 1) = 0$ für $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqq (A-1)^2$ und $f = 0$ für $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqq 1 + \varepsilon$. Offenbar ist auch

$$F(x_1, \ldots, x_n, r) = 0$$

für

$$|r| \leqq 1 + \varepsilon - \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Es besteht nun die Identität

$$(20) \qquad \int\limits_{\Omega^r_{x_1 \ldots x_n}} d o_\xi \int\limits_{\Omega^1_{x_1+\xi_1 \ldots x_n+\xi_n}} f(y_1, \ldots, y_n)\, d o_y$$

$$= \frac{\omega_{n-1}}{r} \int\limits_{r-1}^{r+1} F(x_1, \ldots, x_n, \varrho) \left(1 + \left(\frac{r^2+1-\varrho^2}{2r}\right)^2\right)^{\frac{n-3}{2}} \varrho\, d\varrho;$$

man verifiziert sie leicht, indem man sich überlegt, daß die linke Seite nur von den Mittelwerten von f auf den Kugeln um $(x_1, \ldots, x_n)$ abhängt; man kann dann zur Bildung des Ausdrucks (20) $f(y_1, \ldots, y_n)$ von vornherein durch die Funktion $\frac{F(x_1, \ldots, x_n, \varrho)}{\omega_n \varrho^{n-1}}$ ersetzen, wo $\varrho = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$.

Nun sei $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = R < \varepsilon$. Dann ist

$$(21) \qquad F(x_1, \ldots, x_n, r) = 0$$

für

$$-1 - (\varepsilon - R) \leqq r \leqq 1 + (\varepsilon - R).$$

Aus (20) folgt für alle $x_1, \ldots, x_n, r$

$$(22) \qquad 0 = \int\limits_{r-1}^{r+1} F(x_1, \ldots, x_n, \varrho) \left(1 + \left(\frac{r^2+1-\varrho^2}{2r}\right)^2\right)^{\frac{n-3}{2}} \varrho\, d\varrho.$$

Diese Gleichung können wir als eine Integralgleichung für F als Funktion von r betrachten, die wir leicht auf eine Folge von Volterraschen Integralgleichungen reduzieren können [18]). Sei nämlich zunächst $\varepsilon - R < r < 2 + (\varepsilon - R)$. Dann folgt aus (21) und (22) die Volterrasche Gleichung erster Art

$$0 = \int\limits_{1+\varepsilon-R}^{1+r} F(x_1, \ldots, x_n, \varrho) \left(1 + \left(\frac{r^2+1-\varrho^2}{2r}\right)^2\right)^{\frac{n-3}{2}} \varrho\, d\varrho$$

[18]) Vgl. das analoge Verfahren l. c. [3]), S. 507—510.

für F. Diese Gleichung kann auf eine Gleichung zweiter Art reduziert werden[19]) und hat daher nur die identisch verschwindende Lösung. Daher ist $F = 0$ auch für

$$1 + (\varepsilon - R) \leqq r \leqq 3 + (\varepsilon - R).$$

Daraus folgt dann wieder, daß sich (22) für

$$2 + (\varepsilon - R) \leqq r \leqq 4 + (\varepsilon - R)$$

auf die Volterrasche Gleichung

$$0 = \int\limits_{3+(\varepsilon-R)}^{1+r} F\left(1 + \left(\frac{r^2+1-\varrho^2}{2r}\right)^2\right)^{\frac{n-3}{2}} \varrho\, d\varrho$$

reduziert und daß infolgedessen F für

$$3 + (\varepsilon - R) \leqq r \leqq 5 + (\varepsilon - R)$$

verschwindet u. s. f.

Man schließt so, daß $F(x_1, \ldots, x_n, r) = 0$ für $0 \leqq r \leqq A - \varepsilon$ und $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \leqq \varepsilon$. D. i. das Integral von f über jede Kugel vom Radius $\leqq A - \varepsilon$ und Mittelpunkt in dem Gebiet $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqq \varepsilon^2$ verschwindet. Daraus können wir mit Hilfe der Bemerkung von S. 554 schließen, daß f überall im Gebiet $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqq A^2$ verschwindet. Damit ist die Behauptung bewiesen.

---

[19]) Für ungerades n durch Differentiation (die Gleichung ist in diesem Falle äquivalent mit einer elementaren Differentialgleichung für F, da der Kern ein Polynom ist) und für gerades n durch eine einfache Integraltransformation (halbmalige Differentiation), die von Volterra in seinen „Leçons sur les Equations Intégrales" angegeben ist (S. 60—61).

(Eingegangen am 5. 3. 1935.)

Über die v. Neumannschen fastperiodischen Funktionen auf einer Gruppe.

Von

Franz Rellich in Marburg.

J. v. Neumann hat in der Arbeit ‚Almost periodic functions in a group I' (Transactions Am. Math. Soc. **36** (1934), S. 445–492) den Begriff „fastperiodische Funktion auf einer Gruppe" eingeführt und für solche Funktionen unter anderem ein vollständiges Analogon zu dem H. Bohrschen Approximationssatz für die klassischen fastperiodischen Funktionen aufgestellt und bewiesen. Zum Beweise dieses Approximationssatzes zieht v. Neumann ein Eigenwertproblem heran, das dem von H. Weyl im Falle der gewöhnlichen (stetigen) fastperiodischen Funktionen benutzten Eigenwertproblem analog ist, und beweist für dieses Eigenwertproblem die Existenz eines vollständigen Systems von Eigenelementen auf spezielle und sehr bemerkenswerte Weise. Hier soll gezeigt werden, daß sich dieses Eigenwertproblem sehr einfach als das Eigenwertproblem eines linearen vollstetigen Operators in einem verallgemeinerten Hilbertschen Raume auffassen läßt; die Existenz des gesuchten vollständigen Systems von Eigenelementen folgt dann unmittelbar aus einem allgemeinen, kürzlich von mir bewiesenen Satz über solche vollstetigen Operatoren. Auch im einzelnen ergeben sich einige Vereinfachungen. Die beim Beweis benutzten Definitionen und Grundtatsachen aus der v. Neumannschen Theorie sind in § 1 zusammengestellt[1]).

In § 3 folgt eine Bemerkung mit dem Ziel, den Entwicklungssatz nach den Eigenelementen eines vollstetigen Operators zu verschärfen. Der so (für abstrakte Räume) verschärfte Entwicklungssatz gestattet z. B., im konkreten Fall eines Funktionenraumes die *gleichmäßige* Konvergenz der Entwicklung nach Eigenfunktionen zu erkennen, während die übliche abstrakte Theorie unmittelbar nur die Konvergenz „im Mittel" liefert.

---

[1]) Vgl. auch B. L. v. d. Waerden, Gruppen von linearen Transformationen. Ergebn. d. Math. und ihrer Grenzgebiete **4**, Berlin 1935, insb. S. 57–63, wo eine Vereinfachung des v. Neumannschen Beweises in anderer Richtung gegeben wird.

§ 1.

Definitionen und Sätze aus der v. Neumannschen Theorie[2]).

1. Die komplexwertige Funktion $f(x)$ auf einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ (mit den Elementen $x, y, a, b, \ldots$) heißt fastperiodisch, wenn es zu jedem Folgenpaar a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ aus G Teilfolgen a_{n_i}, b_{n_i} ($n_i \to \infty$ mit $i \to \infty$) gibt, so daß $f(a_{n_i} x)$ und $f(x b_{n_i})$ gleichmäßig in x konvergiert[3]).

2. Jede fastperiodische Funktion $f(x)$ ist dem Betrage nach gleichmäßig beschränkt.

Mit f und g ist auch

3. $\alpha f(x) + \beta g(x)$ (α, β beliebig komplex) und

4. $f(x)\, g(x)$ fastperiodisch.

5. Konvergiert die Folge fastperiodischer Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots$ gleichmäßig in x, dann gibt es eine fastperiodische Funktion $f(x)$, gegen die die Folge gleichmäßig konvergiert.

6. Zu jeder fastperiodischen Funktion $f(x)$ gibt es eindeutig eine Zahl $A = \underset{x}{M}\{f(x)\}$, zu der für jedes $\varepsilon > 0$ Gruppenelemente $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ und nichtnegative Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ mit

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu = 1$$

derart existieren, daß

$$|\alpha_1 f(a_1 x) + \ldots + \alpha_n f(a_n x) - A| \leqq \varepsilon$$

und

$$|\beta_1 f(x b_1) + \ldots + \beta_n f(x b_n) - A| \leqq \varepsilon$$

für alle x aus $\mathfrak{G}$ gilt.

Für fastperiodisches f, g, h gilt

7. $\underset{x}{M}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha \underset{x}{M}\{f(x)\} + \beta \underset{x}{M}\{g(x)\}$; α, β beliebig komplex.

8. $\underset{x}{M}\{f(x)\} > 0$, wenn $f(x) \geqq 0$ und $f(x) \not\equiv 0$.

9. $\underset{x}{M}\{f(xa)\} = \underset{x}{M}\{f(x)\}$, $\underset{x}{M}\{1\} = 1$.

10. Bezeichnung: $f \times g\,(x) = \underset{y}{M}\{f(xy^{-1})\, g(y)\} = \underset{y}{M}\{f(y)\, g(y^{-1}x)\}$; gelegentlich kürzer $f \times g$ statt $f \times g\,(x)$.

11. $u(x) = f \times g\,(x)$ ist eine fastperiodische Funktion.

12. $(f \times g) \times h = f \times (g \times h)$ (assoziatives Gesetz).

13. $f \times g\,(1) = g \times f\,(1)$.

---

[2]) Vgl. v. Neumann, l. c., Kap. I, S. 447—456, und Theorem 24, S. 471.

[3]) Vgl. S. Bochner, Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. Math. Annalen 96 (1927), S. 119—147.

14. Man betrachte die Gesamtheit H aller beschränkten, irreduziblen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$. Die Menge aller Darstellungen aus H, die einer festen Darstellung aus H äquivalent ist, heiße eine Klasse. Man bilde die Gesamtheit aller Klassen $\mathfrak{C}$. Jede Darstellung von H liegt genau in einer Klasse $\mathfrak{C}$. Jede Klasse $\mathfrak{C}$ enthält eine unitäre Darstellung $((D_{\varrho\sigma}(x;\mathfrak{C})))$. Die Gesamtheit aller $((D_{\varrho\sigma}(x;\mathfrak{C})))$ heißt ein unitäres Repräsentantensystem; die Matrixelemente $D_{\varrho\sigma}(x;\mathfrak{C})$ sind fastperiodische Funktionen auf $\mathfrak{G}$.

15. Es sei $s(\mathfrak{C})$ der Grad der in 14. erklärten Matrix $((D_{\varrho\sigma}(x;\mathfrak{C})))$. Dann bilden die Funktionen $D_{\varrho\sigma}(x;\mathfrak{C})\sqrt{s(\mathfrak{C})}$ ein normiertes Orthogonalsystem in folgendem Sinne:

$$\underset{x}{M}\left\{D_{\varrho\sigma}(x;\mathfrak{C})\sqrt{s(\mathfrak{C})}\cdot\overline{D_{\varrho'\sigma'}(x;\mathfrak{C}')\sqrt{s(\mathfrak{C}')}}\right\}=\begin{cases}1 & \text{für } \mathfrak{C}=\mathfrak{C}',\ \varrho=\varrho',\ \sigma=\sigma',\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

§ 2.

Der v. Neumannsche Approximationssatz.

Gegeben sei eine Gruppe $\mathfrak{G}$ und ein unitäres Repräsentantensystem $((D_{\varrho\sigma}(x;\mathfrak{C})))$ (vgl. § 1. 14), so daß die Funktionen $D_{\varrho\sigma}(x;\mathfrak{C})\sqrt{s(\mathfrak{C})}$ im Sinne von § 1. 15 ein normiertes Orthogonalsystem bilden. *Dann ist* 1. *dieses Orthogonalsystem im Raum $\mathfrak{F}$ der auf $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Funktionen vollständig, d. h. es gibt zu jedem $f(x)$ aus $\mathfrak{F}$ eine abzählbare Folge $D_{\varrho\sigma}(x;\mathfrak{C}^{(\nu)})$, $\nu=1,2,\ldots$, so daß mit $f_\nu=\underset{x}{M}\{f(x)\overline{D_{\varrho\sigma}(x;\mathfrak{C}^{(\nu)})\sqrt{s(\mathfrak{C}^{(\nu)})}}\}$ die Parsevalsche Gleichung $\underset{x}{M}\{f(x)\overline{f(x)}\}=\sum\limits_{\nu}f_\nu\bar f_\nu$ gilt;* 2. *läßt sich jede fastperiodische Funktion durch eine endliche Linearkombination dieses Orthogonalsystems gleichmäßig approximieren.*

Beweis. I. Die Gesamtheit $\mathfrak{F}$ aller fastperiodischen Funktionen auf $\mathfrak{G}$ ist 1. ein linearer Raum (§ 1. 3); $u=0$ bedeutet $u\equiv 0$. 2. Durch $(u,v)=\underset{x}{M}\{u(x)\overline{v(x)}\}$ ist in $\mathfrak{F}$ ein „inneres Produkt" erklärt mit den Eigenschaften $(u,v)=\overline{(v,u)}$, $(\alpha u+\alpha_1 u_1, v)=\alpha(u,v)+\alpha_1(u_1,v)$ für beliebige komplexe Zahlen α,α_1, $(u,u)>0$ für $u\neq 0$ (folgt aus § 1. 4, 6–8). Wir setzen $|u|=\sqrt{(u,u)}$ und schreiben

$$u^n\to u,\ n\to\infty,\quad\text{wenn}\quad \lim_{n\to\infty}|u^n-u|=0.$$

II. Zu jeder (im folgenden festgehaltenen) Funktion $f(x)$ aus $\mathfrak{F}$ wird ein (linearer) Operator F erklärt, welcher der Funktion $u(x)$ aus $\mathfrak{F}$ die Funktion $v(x)=f\times u(x)=\underset{y}{M}\{f(xy^{-1})u(y)\}$ aus $\mathfrak{F}$ (§ 1. 10, 11) zuordnet: $Fu=v$.

III. Vollstetigkeit. Zur Erklärung der Vollstetigkeit benutzen wir den Begriff der schwach konvergenten Folge: eine Folge $g^1, g^2, \ldots$ von Elementen aus $\mathfrak{F}$ heißt schwach konvergent, wenn 1. $(g^n, g^n) \leqq K$ mit festem K für alle n und wenn 2. $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} (h, g^n - g^m) = 0$ für jedes h aus $\mathfrak{F}$. Dann heißt ein (linearer) Operator R in $\mathfrak{F}$ vollstetig[4]), wenn es zu jeder schwach konvergenten Folge $g^1, g^2, \ldots$ aus $\mathfrak{F}$ ein φ aus $\mathfrak{F}$ gibt mit $R g^n \to \varphi$, $n \to \infty$. Behauptung: der Operator F in $\mathfrak{F}$ ist vollstetig. Beweis: die Folge $F g^n = f \times g^n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, konvergiert sogar gleichmäßig in x; sonst gäbe es nämlich ein $\varepsilon > 0$, natürliche Zahlen n_i, m_i (mit $n_i \to \infty$, $m_i \to \infty$ für $i \to \infty$) und Gruppenelemente x_i mit

$$A_i = |\underset{y}{M}\{f(x_i y^{-1})(g^{n_i}(y) - g^{m_i}(y))\}| \geqq \varepsilon, \qquad i = 1, 2, \ldots.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei die Folge der x_i schon so ausgesiebt, daß die Folge $f(x_i y^{-1})$ mit $i \to \infty$ gleichmäßig gegen ein $h(y)$ aus $\mathfrak{F}$ strebt (Fastperiodizität von $f(x)$ und § 1. 5). Dann ist $A_i \leqq B_i + C_i$ mit[5])

$$B_i = |\underset{y}{M}\{[f(x_i y^{-1}) - h(y)](g^{n_i}(y) - g^{m_i}(y))\}|$$

$$\leqq \sqrt{\underset{y}{M}\{|f(x_i y^{-1}) - h(y)|^2\}} \cdot 2\sqrt{K} \to 0, \quad \text{wenn} \quad i \to \infty;$$

$$C_i = |\underset{y}{M}\{h(y)(g^{n_i}(y) - g^{m_i}(y))\}| = \overline{(h, g^{n_i} - g^{m_i})} \to 0, \quad \text{wenn} \quad i \to \infty;$$

Widerspruch zu $B_i + C_i \geqq A_i \geqq \varepsilon$.

In den folgenden Schritten IV—VIII wird vorausgesetzt $f(x) = \overline{f(x^{-1})}$. Setzt man allgemein $u^*(x) = \overline{u(x^{-1})}$, so ist also $f(x) = f^*(x)$ und es wird $(u, v) = u \times v^*(1)$, $(u \times v)^* = v^* \times u^*$.

IV. F ist hermitesch, d. h. $(F u, v) = (u, F v)$ für alle u, v aus $\mathfrak{F}$. Beweis: $(F u, v) = (f \times u) \times v^*(1)$. Nach § 1. 13 daraus $(F u, v) = v^* \times (f \times u)(1)$ und $= (v^* \times f) \times u(1)$ wegen § 1. 12. Wegen $f = f^*$ wird

$$(F u, v) = (f \times v)^* \times u(1) = u \times (f \times v)^*(1).$$

Also $(F u, v) = (u, F v)$.

---

[4]) Man kann für die Vollstetigkeit eines (linearen) Operators R in einem Raum $\mathfrak{F}$ auch folgende äquivalente Definition geben: R heißt vollstetig, wenn in jeder unendlichen Menge von Elementen u aus $\mathfrak{F}$ mit $(u, u) \leqq 1$ eine unendliche Folge u^n liegt, für die $R u^n \underset{n \to \infty}{\to} \varphi$ gilt, mit φ aus $\mathfrak{F}$. Beide Definitionen sind äquivalent, weil man aus jeder unendlichen Menge von Elementen u eines Raumes $\mathfrak{F}$, für die $(u, u) \leqq 1$ gilt, eine schwachkonvergente Folge u^n herausgreifen kann.

[5]) Unter Berücksichtigung der Schwarzschen Ungleichung $|(u, v)| \leqq |u|\,|v|$ und der Ungleichung $\sqrt{(g^{n_i} - g^{m_i}, g^{n_i} - g^{m_i})} \leqq 2\sqrt{K}$.

V. Da F in $\mathfrak{F}$ vollstetig (III) und hermitesch (IV) ist, gibt es[6]) in $\mathfrak{F}$ eine abzählbare Folge von Elementen $\varphi^1, \varphi^2, \ldots$ mit $|\varphi^\nu| = 1$, $(\varphi^\nu, \varphi^\mu) = 0$ für $\nu \neq \mu$, so daß gilt: 1. $F\varphi^\nu = \lambda_\nu \varphi^\nu$, $\lambda_\nu \neq 0$ reell; $\lambda_\nu \to 0$, $\nu \to \infty$, falls die Folge $\varphi^1, \varphi^2, \ldots$ unendlich ist. 2. $\sum\limits_{\nu=1}^{n} (F u, \varphi^\nu)\, \varphi^\nu \to F u$, $n \to \infty$ bzw. $\sum\limits_{\nu=1}^{N} (F u, \varphi^\nu) = F u$, wenn die Folge $\varphi^1, \varphi^2, \ldots$ aus endlich vielen, N, Elementen besteht; u beliebig in $\mathfrak{F}$.

VI. Es gilt sogar

$$(1) \qquad F u = \underset{y}{M} \{f(x y^{-1})\, u(y)\} = \sum_\nu (F u, \varphi^\nu)\, \varphi^\nu(x) = \sum_\nu (u, \varphi^\nu)\, \lambda_\nu \varphi^\nu(x),$$

wobei die Summe rechts im Sinne gleichmäßiger Konvergenz in x zu verstehen ist. Das könnte man leicht direkt beweisen. Es scheint mir aber aus prinzipiellen Gründen interessant, daß diese gleichmäßige Konvergenz bereits aus III folgt, wo gezeigt wurde, daß $F g^n$ bei $n \to \infty$ für jede schwach konvergente Folge g^n gleichmäßig in x konvergiert; das wird in § 3 näher ausgeführt.

VII. Setzt man in (1) speziell $u(y) = f(y)$, $x = 1$ und beachtet $f(x) = \overline{f(x^{-1})}$, so wird

$$\underset{y}{M} \{|f(y)|^2\} = \sum_\nu (f, \varphi^\nu)\, \lambda_\nu \varphi^\nu(1) = \sum_\nu (f, \varphi^\nu) \underset{y}{M} \{f(y^{-1})\, \varphi^\nu(y)\} = \sum_\nu (f, \varphi^\nu)\, \overline{(f, \varphi^\nu)}$$

(Parsevalsche Gleichung für das Orthogonalsystem φ^ν).

VIII. Nach V. 1 ist

$$\underset{y}{M} \{f(x y^{-1})\, \varphi^\nu(y)\} = \lambda_\nu \varphi^\nu(x),$$

wobei $\lambda_\nu = \lambda_{\nu+1} = \ldots = \lambda_{\nu+h-1}$ genau h-facher Eigenwert sei. Da wegen $\lambda_\nu \varphi^\nu(x a) = \underset{y}{M} \{f(x a y^{-1})\, \varphi^\nu(y)\} = \underset{y}{M} \{f(x y^{-1})\, \varphi^\nu(y a)\}$ auch $\varphi^\nu(x a)$ zum Eigenwert λ_ν gehört, muß

$$\varphi^{\nu+k}(x a) = \sum_{i=0}^{h-1} D_{ik}^{(\nu)}(a)\, \varphi^{\nu+i}(x), \quad k = 1, 2, \ldots, h-1$$

sein. Offensichtlich ist $D_{ik}^{(\nu)}(a) = \underset{x}{M} \{\varphi^{\nu+k}(x a)\overline{\varphi^{\nu+i}(x)}\}$, also[5]) $|D_{ik}^{(\nu)}(a)| \leqq 1$. Die (eindeutig bestimmten) $D_{ik}^{(\nu)}(a)$ bilden daher eine beschränkte Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$. Wegen $\varphi^{\nu+k}(x) = \sum\limits_{i=0}^{h-1} D_{ik}^{(\nu)}(x)\, \varphi^{(\nu+i)}(1)$ läßt sich jedes φ^ν als endliche Linearkombination der $D_{ik}^{(\nu)}(x)$ und daher auch der

---

[6]) F. Rellich, Spektraltheorie in nicht separablen Räumen, Math. Annalen 110 (1934), S. 342—356, insbes. Satz 4, S. 348. Vgl. auch die vorliegende Arbeit, § 3, wo der zitierte Satz verschärft wird. In der genannten Arbeit wird für die Vollstetigkeit die oben Anm. [4]) gegebene Definition zugrunde gelegt.

$D_{\varrho\sigma}(x;\mathfrak{C})$ des Repräsentantensystems (§ 1.14) schreiben. Daher gilt die Parsevalsche Gleichung auch mit dem Orthogonalsystem $D_{\varrho\sigma}(x;\mathfrak{C})\,(s(\mathfrak{C}))^{1/2}$ (§ 1.15). Damit ist der Vollständigkeitssatz bewiesen für fastperiodische Funktionen mit $f(x) = \overline{f(x^{-1})}$.

IX. Sei $f(x)$ eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{F}$. Setzt man

$$f(x) = \omega(x) + i\chi(x), \quad \omega(x) = \frac{f(x) + \overline{f(x^{-1})}}{2}, \quad \chi(x) = \frac{f(x) - \overline{f(x^{-1})}}{2i},$$

so gilt wegen $\omega(x) = \overline{\omega(x^{-1})}$, $\chi(x) = \overline{\chi(x^{-1})}$ die Parsevalsche Gleichung mit dem Orthogonalsystem $D_{\varrho\sigma}(x;\mathfrak{C})\sqrt{s(\mathfrak{C})}$ für ω und χ, also auch für $f(x)$. *Damit ist der Vollständigkeitssatz im vollen Umfang bewiesen.*

X. Nach VI (insbesondere Gleichung (1)) und der in IX angegebenen Zerlegung $f = \omega + i\chi$ läßt sich jede Funktion $Fu = f \times u$ (f, u beliebige fastperiodische Funktionen) gleichmäßig durch eine Linearkombination der $D_{\varrho\sigma}(x;\mathfrak{C})$ approximieren. Dasselbe gilt aber bereits für *jede* fastperiodische Funktion $f(x)$, weil es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $u(x)$ gibt, mit dem $|f \times u(x) - f(x)| \leqq \varepsilon$ ist für alle x. Der Beweis für diese Tatsache (unter Benutzung von Schlußweisen von S. Bochner und N. Wiener) sei nur der Vollständigkeit halber wörtlich wie bei v. Neumann angeführt: Man setze

$$e(y) = \underset{x \text{ in } \mathfrak{G}}{\text{Ob. Grenze}}\, |f(xy^{-1}) - f(x)|$$

und $H(t) = 1 - \frac{t}{\varepsilon}$ für $0 \leqq t \leqq \varepsilon$, $H(t) = 0$ für $t > \varepsilon$. Man zeigt leicht, daß $e(y)$ und damit auch $w(y) = H(e(y))$ fastperiodisch ist. Aus $e(y) > \varepsilon$ folgt $w = 0$. Daher $|f(xy^{-1}) - f(x)| \leqq \varepsilon$, wenn $w(y) \neq 0$ oder $|f(xy^{-1})\,w(y) - f(x)\,w(y)| \leqq \varepsilon\, w(y)$ für alle y. Daraus durch Mittelbildung $|f \times w(x) - f(x)c| \leqq \varepsilon c$ mit $c = \underset{y}{M}\{w(y)\}$; $c > 0$ wegen $w(y) \geqq 0$, $w(1) = 1$ (§ 1. 8). Setzt man $u(y) = \frac{w(y)}{c}$, so wird $|f \times u(x) - f(x)| \leqq \varepsilon$, wie behauptet war.

Damit ist der v. Neumannsche Approximationssatz vollständig bewiesen.

§ 3.

Eine Verschärfung des Begriffes Vollstetigkeit.

Es sei $\mathfrak{A}$ ein abstrakter Raum mit den Eigenschaften:

1. $\mathfrak{A}$ ist ein linearer Raum.

2. In $\mathfrak{A}$ ist zu zwei Elementen u, v ein inneres Produkt (u, v) so definiert, daß gilt

$$(u, v) = \overline{(v, u)},$$

$(\alpha u + \alpha' u', v) = \alpha (u, v) + \alpha' (u', v)$, α, α' komplex; $(u, u) > 0$ für $u \neq 0$; $\sqrt{(u, u)} = |u|$ und $u^n \to u, n \to \infty$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} |u^n - u| = 0$.

3. Zu jedem u aus $\mathfrak{A}$ gibt es eine reelle nicht negative Zahl $\|u\|$ derart, daß $|u| \leqq k \|u\|$ für alle u aus $\mathfrak{A}$ mit derselben Schranke k gilt.

$u^n \Longrightarrow u$ bedeute $\lim\limits_{n\to\infty} \|u^n - u\| = 0$.

Es sei A ein in $\mathfrak{A}$ erklärter linearer Operator, der in dem folgenden Sinne *vollstetig* ist: zu jeder schwachkonvergenten Folge g^n aus $\mathfrak{A}$ gibt es ein φ aus $\mathfrak{A}$ mit $A g^n \Longrightarrow \varphi$.

Nach dieser Definition ist A auch im üblichen Sinne vollstetig[7]), d. h. es gilt auch $A g^n \to \varphi$; das folgt unmittelbar aus

$$|A g^n - \varphi| \leqq k \|A g^n - \varphi\|.$$

Ist daher A außerdem hermitesch, dann gibt es abzählbar viele orthogonale, normierte Elemente $\varphi^1, \varphi^2, \ldots$ aus $\mathfrak{A}$, für die gilt:

1. $A \varphi^n = \lambda_n \varphi^n$, $\lambda_n \neq 0$ reell.

2. $\sum\limits_{\nu=1}^{n} (A u, \varphi^\nu) \varphi^\nu \to A u$ für alle u aus $\mathfrak{A}$. *Dazu kommt als Verschärfung:*

3. Es gilt sogar

$$\sum_{\nu=1}^{n} (A u, \varphi^\nu) \varphi^\nu \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} A u \text{ [8]}).$$

Beweis. Die Folge $g^n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} (u, \varphi^\nu) \varphi^\nu$, $n = 1, 2, \ldots$ ist schwachkonvergent wegen $(g^n, g^n) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} |(u, \varphi^\nu)|^2 \leqq (u, u)$ und

$$|(h, g^n - g^m)|^2 = \Big|\sum_{\nu=n+1}^{m} (h, \varphi^\nu)(u, \varphi^\nu)\Big|^2 \leqq \sum_{\nu=n+1}^{m} |(h, \varphi^\nu)|^2 \ (u, u) \to 0, \ n, m \to \infty.$$

Also gibt es ein φ aus $\mathfrak{A}$ mit $A g^n \Longrightarrow \varphi$, d. h.

$$\sum_{\nu=1}^{n} (u, \varphi^\nu) A \varphi^\nu = \sum_{\nu=1}^{n} (A u, \varphi^\nu) \varphi^\nu \Longrightarrow \varphi,$$

also auch $\sum\limits_{\nu=1}^{n} (A u, \varphi^\nu) \varphi^\nu \to \varphi$, also $\varphi = A u$, also $\sum\limits_{\nu=1}^{n} (A u, \varphi^\nu) \varphi^\nu \Longrightarrow A u$, w. z. b. w.

Beispiele. 1. Die Gesamtheit aller auf einer Gruppe $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Funktionen $f(x)$ bildet einen Raum $\mathfrak{A}$, wenn gesetzt wird $(f, g) = \underset{x}{M} \{f(x) \overline{g(x)}\}$ und $\|f\| = \underset{x \text{ in } \mathfrak{G}}{\text{Ob. Grenze}} |f(x)|$; $u^n \Longrightarrow \varphi$ bedeutet

[7]) Vgl. Anm. [4]) und [6]).

[8]) Die Folge $\varphi^1, \varphi^2, \ldots$ wird unendlich vorausgesetzt, weil sonst die Verschärfung nichts besagt.

dann die gleichmäßige Konvergenz der Folge $u^n(x)$ gegen $\varphi(x)$. Daraus folgt unmittelbar die in § 2, VI behauptete gleichmäßige Konvergenz der Reihe (1).

2. Die Gesamtheit aller in $0 \leqq t \leqq 1$ komplexwertigen stetigen Funktionen ist ein Raum $\mathfrak{A}$, wenn gesetzt wird $(f, g) = \int\limits_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$ und $\|f\| = \underset{0 \leqq t \leqq 1}{\mathrm{Max}} |f(t)|$. Setzt man $Ku = \int\limits_0^1 k(s,t)\,u(t)\,dt$ mit stetigem $k(s,t) = \overline{k(t,s)}$, so ist der lineare Operator K vollstetig in dem verschärften Sinne. Also ist jede „quellenmäßig" darstellbare Funktion Ku *gleichmäßig* nach den Eigenfunktionen des Kernes $k(s,t)$ entwickelbar.

(Eingegangen am 3. 4. 1935.)

Über die Lösungen des Duffingschen Schwingungsproblems bei großen Parameterwerten.

Von

Rudolf Iglisch in Aachen.

Unter dem (verallgemeinerten) Duffingschen Problem verstehe ich hier die Untersuchung der Lösungen der ersten Randwertaufgabe im Intervall $\langle 0, \pi \rangle$ der mit zwei reellen Parametern α und β versehenen gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(1) \qquad \ddot{x}(t) + \alpha^2 \sin x(t) = -\beta f(t)$$

(Gleichung der erzwungenen Pendelschwingungen), wo $f(t)$ (die Form der erzwingenden Kraft) eine beliebige (z. B. stetige) vorgegebene Funktion ist. Betrachtet man die lineare Gleichung, wo also in (1) $\sin x(t)$ durch $x(t)$ zu ersetzen ist, so hat das zugehörige erste Randwertproblem für $\alpha^2 \neq n^2$ (n ganz) stets genau eine Lösung, für $\alpha^2 = n^2$ dagegen entweder überhaupt keine oder eine einparametrige Schar von Lösungen. Das Verhalten der nichtlinearen Gleichung (1) ist völlig anders. Auf vielfache Weise ist bewiesen worden, daß sie für jedes Parameterpaar α^2, β mindestens eine Lösung besitzt[1]). — Für große Werte je eines der beiden Parameter α^2 und β kann man hier zwei wichtige Aussagen machen.

Hält man β fest und läßt den Parameter α^2 über alle Grenzen wachsen, so wird man, im Gegensatz zur linearen Gleichung, vermuten, daß in Gleichung (1) der große Wert von α^2 den Einfluß von β überwiegt, daß also die Zahl der Lösungen des Duffingschen Problems über alle Grenzen wächst wie die Anzahl der zu dem Problem gehörigen freien Pendelschwingungen ($f(t) \equiv 0$), d. h. wie $2[\alpha]$, wenn man die identisch verschwindende Lösung nicht berücksichtigt. Tatsächlich konnte ich folgenden Satz zeigen[2]):

Zu jeder noch so kleinen positiven Zahl δ gibt es bei festem β eine positive Zahl α_0^2 derart, daß Gleichung (1) für $\alpha^2 \geqq \alpha_0^2$ mindestens $N = 2 \cdot [\alpha(1-\delta)]$ Lösungen besitzt. Mindestens je zwei davon verschwinden im Innern des Intervalls $(0, \pi)$ genau ν-mal für $\nu = 0, 1, 2, \ldots,$

---

[1]) Vgl. z. B. Rudolf Iglisch, Zur Theorie der Schwingungen (1. Mitt.), Monatsh. f. Math. u. Phys. 37 (1930), S. 325—342, insbesondere § 3.

[2]) § 6 der in Anm. [1]) zitierten Arbeit.

$[(1-\delta)\alpha]-1$. — Der Satz wurde übrigens vorher schon von Herrn Hammerstein abgeleitet, jedoch mit der Mindestzahl $\frac{\alpha}{3}$ statt N [3]).

Läßt man bei festem α^2 den Parameter β genügend groß werden, so habe ich beim *speziellen* Duffingschen Problem, wo auf der rechten Seite von (1) $f(t)$ durch $\sin t$ zu ersetzen ist, gezeigt, daß die nichtlineare Gleichung sich einfacher verhält als die lineare; sie besitzt nämlich bei festem α^2 zu jedem genügend großen β genau eine (und zwar einfach zählende) Lösung [4]). — Der dort gegebene Beweis soll in vorliegender Note so erweitert werden, daß die Eindeutigkeit und Einfachheit der Lösung der ersten Randwertaufgabe von (1) für genügend große Werte von β sichergestellt wird, wofern nur die rechte Seite $f(t)$ folgender Bedingung genügt: Die (durch zweimalige Quadratur berechenbare) Lösung $X(t)$ der ersten Randwertaufgabe in $\langle 0, \pi\rangle$ von

$$\ddot{X}(t) = -f(t)$$

möge nur endlich viele Stellen t_0 mit horizontaler Tangente besitzen. — Diese Bedingung läßt sich noch stark mildern, was aber nicht die Absicht dieser Note ist. Daß sie nicht ganz aufgegeben werden kann, zeigt ein Gegenbeispiel am Ende der Arbeit; dort werden Funktionen $f(t)$ konstruiert, für die es zu jedem beliebigen festen Wert von α^2, der nur größer sein muß als Eins, Zahlenfolgen β_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ gibt mit $\beta_\nu \to \infty$, für die das erste Randwertproblem von (1) immer wieder mehr als eine Lösung besitzt. — Die im Verlauf der Überlegungen benutzten Abschätzungen mit möglichst guten Schranken zu versehen, war nicht mein Bestreben.

§ 1.

Die Beweismethode.

Da für $\alpha^2 < 1$ Gleichung (1) für alle Werte von β genau eine (und zwar einfache) Lösung besitzt [5]) und eine Änderung der Lösungsanzahl bei wachsendem α^2 und festem β nur eintreten kann, wenn bei einem kleinsten Wert α^2 einmal das erste Randwertproblem von

$$\ddot{\varphi}(t) + \alpha^2 \cos x(t)\, \varphi(t) = 0 \tag{2}$$

für $\varphi(t)$ lösbar ist ($x(t)$ bedeutet eine zu dem Parameterpaar α^2, β gehörende Lösung von (1)), so braucht nur folgendes gezeigt zu werden, um unseren Satz für den Parameterwert α_1^2 und genügend großes $\beta \geqq \beta_1$

[3]) A. Hammerstein, Eine nichtlineare Randwertaufgabe, Jahresber. d. D. Math.-Ver. **39** (1930), S. 59—64.

[4]) § 4 der in Anm. [1]) zitierten Arbeit.

[5]) Vgl. z. B. § 3 der in Anm. [1]) genannten Arbeit.

sicherzustellen: Ist $\beta \geqq \beta_1$ und $\alpha^2 \leqq \alpha_1^2$, so verschwindet die Lösung $\varphi(t)$ des Anfangswertproblems von (2) mit $\varphi(0) = 0, \dot\varphi(0) = 1$ erst hinter $t = \pi$.

Die Lösung dieser Aufgabe scheint zunächst deshalb schwierig, weil mit wachsendem β auch z. B. das Maximum des Betrages von $x(t)$ über alle Grenzen wächst; eine explizite Abschätzung dafür findet sich in § 6. Das starke Anwachsen von $x(t)$ verursacht ja einen anscheinend sehr unangenehmen häufigen Zeichenwechsel der Funktion $\cos x(t)$ in (2). Aber gerade dieses Vorkommnis läßt sich zur Führung des Beweises ausnutzen, den ich jetzt in mehreren Schritten erbringen will. Und zwar will ich zunächst von dem Problem (1) völlig absehen und die an (2) geknüpfte Behauptung bei genügend großem β_1 vorerst sicherstellen für die Gleichung

$$(3) \qquad \ddot\varphi(t) + \alpha^2 \cos(\beta X(t))\,\varphi(t) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \dot\varphi(0) = 1,$$

indem ich zunächst über $X(t)$ außer der unwesentlichen und bisweilen auch aufgegebenen Voraussetzung $X(0) = 0 = X(\pi)$ gewisse Zusatzvoraussetzungen einführe, die später gemildert werden.

§ 2.

Der einfachste Fall.

Ich beweise jetzt folgenden Satz: Unter der Voraussetzung

$$(4) \qquad \ddot X(t) < 0 \text{ im Innern von } (0, \pi)$$

gibt es zu jedem α_1^2 eine positive Zahl β_1 derart, daß die Lösung $\varphi(t)$ von (3) für $\alpha^2 \leqq \alpha_1^2$ und $\beta \geqq \beta_1$ erst hinter $t = \pi$ verschwindet.

Da gemäß (4) $\dot X(t)$ nur an einer einzigen Stelle t^* verschwindet, genügt es zu zeigen, daß $\dot\varphi(t)$ für $0 \leqq t \leqq t^*$ positiv ist. Dann zeigt der gleiche Gedankengang, angewandt auf Gleichung (3) mit $\varphi^*(t^{**}) = 0$, $\dot\varphi^*(t^{**}) = -1$ $(\pi \geqq t^{**} > t^*)$, daß $\dot\varphi^*(t) < 0$ ist für $t^* \leqq t \leqq t^{**} \leqq \pi$; es kann demnach nicht $\varphi(t)$ vor $t = \pi$ verschwinden.

Dieser Beweis läßt sich in folgenden Schritten erbringen:

1. $\varphi(t)$ liegt sicher stets unter der Lösung $\mathsf{X}(t)$ von

$$\ddot{\mathsf{X}} - \alpha_1^2 \mathsf{X} = 0, \quad \mathsf{X}(0) = 0, \quad \dot{\mathsf{X}}(0) = 1.$$

Es ist aber

$$\mathsf{X}(t) = \frac{1}{\alpha_1} \operatorname{Sin} \alpha_1 t;$$

daher gilt sicher für $0 \leqq t \leqq \pi$

$$(5) \qquad \varphi(t) \leqq A = \frac{\operatorname{Sin} \alpha_1 \pi}{\alpha_1}.$$

2. Ich markiere bis t^* hin bei festem β alle t-Werte $t = t_\nu$, für die

$$\beta \cdot X(t_\nu) = \frac{4\nu - 1}{2}\pi \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

ist, d. h. $\cos\beta X(t)$ von negativen zu positiven Werten übergeht. Außerdem sei $t_0 = 0$. Wegen (4) wächst die Intervallbreite $t_\nu - t_{\nu-1}$ mit ν. Das breiteste Intervall ist daher das t^* enthaltende bzw. das vorangehende. Zufolge (4) geht es mit wachsendem β gegen Null. Man kann also zu jeder beliebigen positiven Zahl l eine Zahl $\beta(l)$ finden, derart daß $t_\nu - t_{\nu-1} \leqq l$ für alle ν, wofern nur $\beta \geqq \beta(l)$.

3. Die Lösung von

$$\ddot{\psi} + \alpha_1^2 \psi = 0$$

mit $\psi(0) = a$ und $\dot{\psi}(0) = b$ ist

$$\psi(t) = \frac{b}{\alpha_1}\sin\alpha_1 t + a\cos\alpha_1 t.$$

Ich will untersuchen, wie lange sicher $\dot{\psi}(t) > 0$ gilt, wenn $b \geqq 1$ und $0 \leqq a \leqq A$ (aus (5)) vorausgesetzt wird. $\dot{\psi}(t) > 0$ gilt sicher, solange neben $t \leqq \frac{\pi}{2\alpha_1}$

$$\cos\alpha_1 t - A\alpha_1 \sin\alpha_1 t > 0$$

gilt, d. h.

$$t < \frac{1}{\alpha_1}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{A\alpha_1}. \tag{6}$$

4. Wähle ich jetzt die unter 2. aufgetretene Zahl l kleiner als die in (6) auftretende Schranke, so ist das zugehörige $\beta(l)$ als β_1 brauchbar. Dazu zeige ich durch vollständige Induktion folgende beiden Sätze: a) Aus $\dot{\varphi}(t_{\nu-1}) \geqq 1$ (für $\nu = 1$ erfüllt) folgt $\dot{\varphi}(t_\nu) > 1$. b) Im ganzen Intervall $(t_{\nu-1}, t_\nu)$ ist $\dot{\varphi}(t) > 0$. — Satz b) folgt unmittelbar aus Nr. 3. Zum Beweis von Satz a) ziehe man den wohlbestimmten Punkt t_ν^* heran, für den im Innern des betrachteten Intervalls $\cos\beta X(t) = 0$ wird. Wegen (4) ist $t_\nu^* - t_{\nu-1} < t_\nu - t_\nu^*$[6]). Daher nimmt, wie ein Blick auf (3) zeigt, die Tangente von $\varphi(t)$ vor t_ν^* um weniger ab, als sie nach t_ν^* wieder zunimmt; verstärkt wird dies Anwachsen der Tangente noch durch das in Satz b) ausgesprochene monotone Anwachsen von $\varphi(t)$.

Damit ist aber unser eingangs des Paragraphen aufgestellter Satz bewiesen.

Bemerkung: Derselbe Beweis liefert, daß für $\beta \geqq \beta_2$ und $0 \leqq t \leqq t^*$

$$\dot{\varphi}(t) \geqq 1 - \eta$$

mit beliebig kleinem η erreicht werden kann bei genügend großem β_2.

---

[6]) Da diese Beziehung für $\nu = 1$ nicht gilt, setze man hier am besten $\dot{\varphi}(0)$ ein wenig größer als 1 voraus.

§ 3.

Die Polygonapproximation.

Ich beweise jetzt folgenden Satz: Zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl β_3 derart, daß bei $\beta \geqq \beta_3$ für die Lösung des Anfangswertproblems (3) an allen Stellen t_ν, wo $\cos(\beta X(t))$ von negativen Werten durch Null zu positiven Werten übergeht, $\dot{\varphi}(t_\nu) \geqq 1 - \varepsilon$ ist, im übrigen aber stets $\dot{\varphi}(t) > 0$ gilt, wofern nur $\dot{X}(t) > \delta > 0$ vorgelegt ist und $\ddot{X}(t)$ existiert. — Der gleiche Beweis gilt übrigens auch für den Fall $\dot{X}(t) < -\delta < 0$.

1. Zum Beweise verbinde ich die erwähnten Punkte $t_\nu, \beta X(t_\nu)$ geradlinig. Das gibt einen Polygonzug, dessen Seitenzahl von der Ordnung β ist; ist nämlich $X(\pi) - X(0) \leqq M$, so gilt für die Seitenzahl s

$$s \leqq 1 + \frac{\beta M}{2\pi}. \tag{7}$$

2. Ich betrachte jetzt ein beliebiges Intervall J_ν von $t_{\nu-1}$ bis t_ν und beweise, daß sich dort $\beta X(t)$ von der Polygonseite $Y_\nu(t)$ höchstens um einen Betrag der Ordnung $\frac{1}{\beta^2}$ in horizontaler Richtung unterscheidet. — Für diesen Horizontalabstand werde ich eine zu große Schranke erhalten, wenn ich statt $\beta X(t)$ diejenige Funktion $Z(t)$ betrachte, für die

$$Z(t_{\nu-1}) = \beta\, X(t_{\nu-1}) = \beta c_\nu, \qquad \dot{Z}(t_{\nu-1}) = \beta \dot{X}(t_{\nu-1}) = \beta a_\nu$$

und

$$\ddot{Z}(t) = -\operatorname{Max} \beta\, |\ddot{X}(t)| = -\beta b_\nu$$

(im betrachteten Intervall) ist, und statt $Y_\nu(t)$ die Gerade $U(t)$, die durch $U(t_{\nu-1}) = \beta c_\nu$ und $\dot{U}(t_{\nu-1}) = \beta a_\nu$ definiert ist, und wenn ich den Horizontalabstand zwischen $U(t)$ und $Z(t)$ in der Höhe $\beta c_\nu + 2\pi$ berechne. Es ist also

$$U(t) = \beta\,[c_\nu + a_\nu(t - t_{\nu-1})],$$
$$Z(t) = \beta\,[c_\nu + a_\nu(t - t_{\nu-1}) - \tfrac{1}{2} b_\nu (t - t_{\nu-1})^2].$$

Sei t_ν^* der t-Wert, an dem $Z(t)$ um 2π gewachsen ist, also

$$t_\nu^* - t_{\nu-1} = \frac{a_\nu}{b_\nu} - \frac{a_\nu}{b_\nu}\sqrt{1 - \frac{4\pi b_\nu}{a_\nu^2 \beta}} = \frac{2\pi}{a_\nu \beta} + \frac{2\pi^2 b_\nu}{a_\nu^3 \beta^2} + O\left(\frac{1}{\beta^3}\right).$$

Der Horizontalabstand von $Z(t)$ und $U(t)$ in der Höhe $\beta c_\nu + 2\pi$ ist

$$\frac{2\pi^2 b_\nu}{a_\nu^3 \beta^2} + 0\left(\frac{1}{\beta^3}\right) < \frac{3\pi^2 b_\nu}{a_\nu^3 \beta^2} \tag{8}$$

(für nicht zu kleines β).

3. Ich betrachte wieder das t-Intervall J_ν zwischen $t_{\nu-1}$ und t_ν. Da seine Breite kleiner ist als $\frac{2\pi}{\beta\delta}$, läßt sich nach dem Muster der Überlegungen in § 2 eine Zahl β_1 derart angeben, daß in diesem ganzen Intervall für

$\alpha^2 \leqq \alpha_1^2$ und $\beta \geqq \beta_1$ $\dot\varphi(t) > 0$ ist, falls $\dot\varphi(t_\nu) \geqq 1 - 2\eta$ ausfällt mit beliebigem $\eta < \frac{1}{2}$. Ich brauche jetzt also nur noch solche Intervalle zu betrachten, für die am Intervallende $\dot\varphi(t_\nu) < 1$ ist. Für das erste dieser Intervalle ist dann $\dot\varphi(t_{\nu-1}) \geqq 1$. Ich betrachte gleich den Fall eines Intervalles, für das

$$\dot\varphi(t_{\nu-1}) \geqq 1 - \eta$$

ist. Ich behaupte, daß bei genügend großem β dann $\dot\varphi(t_\nu)$ höchstens von der Ordnung $\frac{1}{\beta^2}$ kleiner sein kann als $\dot\varphi(t_{\nu-1})$. Da die Breite des Intervalls kleiner ist als $\frac{2\pi}{\beta\delta}$, kann $\dot\varphi(t_{\nu-1})$ die Zahl 1 auch höchstens um eine Zahl der Ordnung $\frac{1}{\beta}$ übertreffen, es gilt also etwa (bei genügend großem β)

$$1 + \eta \geqq \dot\varphi(t_{\nu-1}) \geqq 1 - \eta. \tag{9}$$

Wäre etwa in J_ν stets $\ddot X(t) \leqq 0$, so würde nach § 2 folgen, daß $\dot\varphi(t_\nu) > \dot\varphi(t_{\nu-1})$ ist. Die größtmögliche Verkleinerung von $\dot\varphi(t_\nu)$ gegenüber $\dot\varphi(t_{\nu-1})$ werde ich erhalten, wenn in dem Intervall J_ν durchweg $\ddot X(t) \geqq 0$ ist. Es genügt, diesen Fall allein zu betrachten. Dann ist $X(t)$ gerade um π gewachsen bei einem Wert $\bar t_\nu$, der von der Mitte von J_ν höchstens um die Schranke (8) entfernt liegt, und zwar rechts davon.

Ich zeichne nun im Intervall von $\bar t_\nu$ bis t_ν (bzw. ein Stück höchstens von der Breite $6\pi^2 b_\nu : a_\nu^3 \beta^2$ darüber hinaus) den am Punkte $\bar t_\nu$ gespiegelten vorderen Teil der Kurve $\beta X(t)$, den ich nach der Spiegelung mit $\beta \bar X(t)$ bezeichnen will. Ersichtlich ist die größte Horizontalentfernung zwischen $\beta X(t)$ und $\beta \bar X(t)$ dort kleiner als

$$\frac{6\pi^2 b_\nu}{a_\nu^3 \beta^2}. \tag{10}$$

Ich merke noch an, daß infolge $\dot\varphi(t_\nu) < 1$ erst recht $\dot\varphi(\bar t_\nu) < 1$ gilt, da in $\bar t_\nu$ $\varphi(t)$ innerhalb J_ν die flachste Tangentenneigung besitzt.

Ich verfolge jetzt von $\bar t_\nu$ ausgehend die Lösung $\varphi(t)$ von (3) nach wachsenden und fallenden t-Werten bis t_ν bzw. $t_{\nu-1}$ hin. Das bedeutet, daß ich für $\tau \geqq 0$ neben

$$\ddot\varphi(\bar t_\nu + \tau) + \alpha^2 \cos\beta X(\bar t_\nu + \tau)\,\varphi(\bar t_\nu + \tau) = 0 \tag{11}$$

bei vorgegebenem $\varphi(\bar t_\nu) = A > 0$ und $\dot\varphi(\bar t_\nu) = B > 0$ (was sich wegen (9) und der kleinen Breite von J_ν erreichen läßt) noch

$$\ddot\psi(\bar t_\nu + \tau) - \alpha^2 \cos\beta \bar X(\bar t_\nu + \tau)\,\psi(\bar t_\nu + \tau) = 0 \tag{12}$$

untersuche mit $\psi(\bar t_\nu) = A$ und $\dot\psi(\bar t_\nu) = -B$. Dabei ist ersichtlich $\dot\psi(2\bar t_\nu - t_{\nu-1}) = -\dot\varphi(t_{\nu-1})$. Es ist also zu zeigen:

$$\dot\varphi(t_\nu) + \dot\psi(2\bar t_\nu - t_{\nu-1}) > -\frac{D}{\beta^2} \tag{13}$$

mit passender Konstanten D.

4. Ich teile jetzt das τ-Intervall von 0 bis $t_\nu - \bar{t}_\nu$ in Teile T_ν der Größe (10) auf. (Die Teilung braucht am Ende nicht aufzugehen.) Sei τ^* derjenige τ-Wert, der dem Wert $t = t_{\nu-1} + \frac{3}{4}(t_\nu - t_{\nu-1})$ entspricht. Dann wachsen $|\cos\beta X(t)|$ und $|\cos\beta \bar{X}(t)|$ gleichzeitig für

$$\tau \leqq \tau^* \tag{14}$$

und nehmen beide monoton ab für

$$\tau \geqq \tau^* + \frac{6\pi^2 b_\nu}{a_\nu^3 \beta^2}. \tag{15}$$

Die höchstens zwei Intervalle T_ν, die Punkte aus dem Intervall zwischen (14) und (15) enthalten, streiche ich zunächst fort und betrachte nun die restlichen Intervalle T_ϱ ($\varrho = 1 \ldots N$), für die (14) gilt. In einem solchen T_ϱ ist sicher $|\cos\beta \bar{X}(t)| < |\cos\beta X(t)|$. Daher folgt aus (11) und (12) leicht mit $\tau_0 = N \cdot \frac{6\pi^2 b_\nu}{a_\nu^3 \beta^2}$

$$\dot{\varphi}(\bar{t}_\nu + \tau_0) > -\dot{\psi}(\bar{t}_\nu + \tau_0).$$

Jetzt betrachte ich diejenigen Intervalle $\bar{T}_\sigma$, für deren sämtliche τ-Werte

$$\tau^* + \frac{6\pi^2 b_\nu}{a_\nu^3 \beta^2} < \tau \leqq t_\nu - \bar{t}_\nu$$

gilt ($\sigma = 1 \ldots \bar{N}$). In einem solchen $\bar{T}_\sigma$ ist sicher $\mathrm{Max}|\beta X(t)|$ kleiner als $\mathrm{Min}|\beta \bar{X}(t)|$ in $\bar{T}_{\sigma+2}$. Ich lasse nun für $\beta X(t)$ die Intervalle $\bar{T}_{\bar{N}}$ und $\bar{T}_{\bar{N}-1}$ unberücksichtigt, für $\beta \bar{X}(t)$ dagegen $\bar{T}_1$ und $\bar{T}_2$. Die restlichen $\bar{N} - 2$ Intervalle numeriere ich jetzt so, daß in beiden Fällen der Summationsindex σ von 1 bis $\bar{N} - 2$ geht, und zwar soll dabei die Variable τ von τ_0 bis $\tau_0 + (\bar{N} - 2) \cdot \frac{6\pi^2 b_\nu}{a_\nu^3 \beta^2} = \tau_1$ laufen. Um diese Modifikation des Problems anzudeuten, will ich die zugehörigen Lösungen von (11) bzw. (12), die ich vorhin bis τ_0 hin gewonnen habe, bei der Weiterverfolgung über τ_0 hinaus mit $\varphi^*(\bar{t}_\nu + \tau)$ bzw. $\psi^*(\bar{t}_\nu + \tau)$ bezeichnen. Wie vorhin folgt erst recht

$$\dot{\varphi}^*(\bar{t}_\nu + \tau_1) > -\dot{\psi}^*(\bar{t}_\nu + \tau_1).$$

5. Was können nun die bisher ausgelassenen Intervalle an dem Resultat verändern? Bei Gleichung (11) sind höchstens fünf Intervalle unberücksichtigt geblieben; nämlich $\bar{T}_{\bar{N}-1}$, $\bar{T}_{\bar{N}}$, ferner die zwei Intervalle, die Punkte aus dem Intervall zwischen (14) und (15) enthalten, und eventuell noch ein Intervallstück vor t_ν, wenn die Einteilung nicht aufging. Durch deren Mitberücksichtigung würde

$$\dot{\varphi}(t_\nu) > \dot{\varphi}^*(\bar{t}_\nu + \tau_1)$$

folgen.

Bei der Gleichung (12) ist außer den fünf analogen Intervallen auch noch das Stück von $\beta \overline{X}(t)$ hinter t_ν unberücksichtigt geblieben, das höchstens die Länge eines T_ν hat. Die Gesamtlänge der unberücksichtigten Intervalle ist damit höchstens

$$\frac{36\,\pi^2 b_\nu}{a_\nu^3 \beta^2}. \tag{16}$$

Daraus kann man folgern, daß die Differenz

$$|\dot\psi(2\bar t_\nu - t_{\nu-1}) - \dot\psi^*(\bar t_\nu + \tau_1)|$$

von der Ordnung $\frac{1}{\beta^2}$ ist. Es ist nämlich für $0 \leqq \tau \leqq \tau_1$ mit

$$\psi^*(\bar t_\nu + \tau) - \psi(\bar t_\nu + \tau) = \Psi(\tau),$$

$$\ddot\Psi(\tau) - \alpha^2(\cos\beta\overline{X}^*(\bar t_\nu + \tau)\,\psi^*(\bar t_\nu + \tau) - \cos\beta\overline{X}(\bar t_\nu + \tau)\,\psi(\bar t_\nu + \tau)) = 0,$$

woraus durch Anwendung des Mittelwertsatzes leicht die Existenz einer allgemeingültigen (auch von ν unabhängigen) Zahlenschranke B folgt, derart daß

$$|\dot\Psi(\tau_1)| < B\cdot\frac{1}{\beta^2} \tag{17}$$

ist. Denn weil für $\tau \leqq \tau_1$ unter Beachtung der maximalen τ-Verschiebung (16)

$$|\cos\beta\overline{X} - \cos\beta\overline{X}^*| < M\,\frac{36\,\pi^2 b_\nu}{a_\nu^3 \beta}$$

ist, wo M eine obere Schranke für $\dot X(t)$ bedeutet, erhält man für $\tau \leqq \tau_1$ bei Beachtung von (5) eine Majorante $\mathsf{X}(\tau)$ für $\Psi(\tau)$ (gleichzeitig $\dot{\mathsf{X}}(\tau)$ für $\dot\Psi(\tau)$) durch Lösung der Gleichung

$$\ddot{\mathsf{X}}(\tau) - \alpha_1^2\,\mathsf{X}(\tau) = \alpha_1^2\,M A\,\frac{36\,\pi^2 b_\nu}{a^3 \beta}, \quad \mathsf{X}(0) = 0 = \dot{\mathsf{X}}(0).$$

Man erhält

$$\dot{\mathsf{X}}(\tau) = \frac{M A\, 36\,\pi^2 b_\nu \alpha_1}{a_\nu^3 \beta}\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_1 \tau$$

und somit als obere Schranke für das ganze Intervall, wegen

$$\tau_1 \leqq \frac{\pi}{\beta\delta},$$

$$\dot{\mathsf{X}}(\tau_1) < B\,\frac{1}{\beta^2}$$

mit passender endlicher Zahl B, die auch von ν unabhängig ist, wenn man

$$\left|\frac{b_\nu}{a_\nu^3}\right| < C \tag{18}$$

mit endlichem C innerhalb $(0, \pi)$ voraussetzt. (Das ist wegen $a_\nu > \delta$ keine neue Voraussetzung.) Damit hätten wir (17) als richtig erkannt. —

$\dot{\psi}(t)$ ist jetzt hinter $\bar{t}_\nu + \tau_1$ noch weiter zu verfolgen um ein Intervall höchstens der Länge (16) und nimmt dort (wegen $|\dot{\psi}(t)| < 1 + \eta$) dem Betrage nach höchstens um

$$\frac{36\pi^2 b_\nu^2}{a_\nu^3 \beta^2}(1+\eta)$$

zu. Da $|b_\nu|$ beschränkt ist, so gibt es also schließlich eine von ν unabhängige Zahl D, derart daß

$$|\dot{\psi}(2\bar{t}_\nu - t_{\nu-1}) - \dot{\psi}^*(\bar{t}_\nu + \tau_1)| < \frac{D}{\beta^2}$$

ist; das liefert die Richtigkeit von (13).

6. Da die Anzahl der Intervalle J_ν infolge der Form des gegebenen $X(t)$ kleiner ist als $E \cdot \beta$ ($E =$ const., vgl. (7)) und $\dot{\varphi}(0) = 1$ vorausgesetzt war, folgt aus (13) sofort, daß für den letzten Teilpunkt t_{N^*} im Intervall $\langle 0, \pi \rangle$

$$\dot{\varphi}(t_{N^*}) > 1 - \frac{ED}{\beta}$$

ist, falls man von vornherein $\eta \geqq \frac{ED}{\beta}$ gewählt hat. Infolge $\pi - t_{N^*} < \frac{2\pi}{\beta\delta}$ kann sich die Tangentenneigung bis π hin nur von der Ordnung $\frac{1}{\beta}$ verkleinern. Es gibt also eine Konstante F, derart daß

$$\dot{\varphi}(\pi) > 1 - \frac{F}{\beta} \tag{19}$$

ausfällt.

Bemerkung. Macht man β_3 genügend groß, so kann man für alle t aus $\langle 0, \pi \rangle$ erreichen

$$\dot{\varphi}(t) \geqq 1 - \eta \tag{20}$$

mit beliebigem $0 < \eta \leqq 1$.

§ 4.

Die allgemeine Gleichung (3).

Jetzt ist es leicht, folgenden Satz zu beweisen: Unter der Voraussetzung, daß $\ddot{X}(t)$ überall existiert und $\dot{X}(t)$ nur an endlich vielen Stellen verschwindet, gilt im ganzen Intervall $\langle 0, \pi \rangle$ für die Lösung $\varphi(t)$ von (3) $\dot{\varphi}(t) > 0$, falls $\beta \geqq \beta_4$ ist mit genügend großem β_4.

Nach der Schlußbemerkung des vorigen Paragraphen muß man offenbar nur zeigen, wie man über die Umgebung der endlich vielen Stellen $t_1, t_2, \ldots, t_n$ hinwegkommt, für die $\dot{X}(t_\nu) = 0$ ist. Ich grenze um sie Intervalle der Breite ε_ν ab, derart daß außerhalb dieser Intervalle stets $\dot{X}(t) \geqq \delta$ ist. Mit $\delta \to 0$ gehen alle $\varepsilon_\nu \to 0$. In einem Intervall

der Breite ε_ν ändert sich aber nach (3) und (5) die Tangente von $\varphi(t)$ um weniger als $\pm\alpha_1^2\varepsilon_\nu A$. Damit ist der Beweis geliefert.

Bemerkung: Wieder könnte man stets $\dot\varphi(t) \geqq 1-\eta$ erreichen mit beliebigem $0<\eta\leqq 1$.

§ 5.

Erledigung der Differentialgleichung (1).

Bezeichne jetzt $X(t)$ die durch zweimalige Quadratur berechenbare Lösung von

(21) $$\ddot X(t) = -f(t), \quad X(0) = 0 = X(\pi).$$

$\dot X(t)$ verschwinde nur an endlich vielen Stellen $t_1, \ldots, t_n$. Durch Einführung der Greenschen Funktion

$$G(t,\tau) = \begin{cases} t\left(1-\frac{\tau}{\pi}\right) & \text{für } t\leqq\tau, \\ \tau\left(1-\frac{t}{\pi}\right) & \text{für } \tau\leqq t \end{cases}$$

wird aus (1)

(22) $$x(t) - \alpha^2\int_0^\pi G(t,\tau)\sin x(\tau)\,d\tau = \beta X(t);$$

daraus entsteht durch Differentiation nach t

$$\dot x(t) + \alpha^2\int_0^\pi \frac{\tau}{\pi}\sin x(\tau)\,d\tau - \alpha^2\int_t^\pi \sin x(\tau)\,d\tau = \beta\dot X(t)$$

und dies liefert die Abschätzung

$$|\dot x(t) - \beta\dot X(t)| \leqq \tfrac{3}{2}\pi\alpha_1^2.$$

Wählt man β groß genug, so kann man erreichen, daß mit Ausnahme von n Intervallen je der Breite ε_ν um die Punkte t_ν herum $|\beta\dot X(t)| > H$ wird mit beliebig vorgegebenem H. Mit wachsendem β gehen die ε_ν dabei gegen 0. Man wähle nun etwa $H = 3\pi\alpha_1^2$; dann ist außerhalb der eben erwähnten Intervalle $|\dot x(t)| \geqq \frac{3}{2}\pi\alpha_1^2 = \delta$, und es läßt sich mit der Schlußweise des vorigen Paragraphen zeigen, daß für $\beta\geqq\beta_0$ (genügend groß) stets $\dot\varphi(t) > 0$ ausfällt für $0\leqq t\leqq\pi$. Damit ist der in der Einleitung aufgestellte Eindeutigkeitssatz bewiesen.

§ 6.

Ein gegenteiliges Beispiel.

Die Voraussetzungen über $X(t)$ lassen sich natürlich noch weitgehend mildern. Man kann etwa ruhig zulassen, daß $\dot X(t) \equiv 0$ ist auf einer Strecke des t-Intervalles, die nicht zu groß ist gegen den Wert $\frac{1}{\alpha_1^2}$ usw.

Daß man aber Einschränkungen über die Nullstellen von $X(t)$ nötig hat, zeigt das folgende Beispiel eines Randwertproblems (1), das für gegen ∞ strebende Werte von β immer wieder mehrfach zählende Lösungen besitzt.

1. Es sei $f(t)$ eine stetige, zu $\frac{\pi}{2}$ symmetrische Funktion, die für $0 \leqq t_1 < \frac{\pi}{2}$ irgendwelche positiven Werte annimmt, für $t_1 < t \leqq \frac{\pi}{2}$ aber identisch verschwindet. α^2 sei so groß gewählt, daß die Lösung von

(23) $$\ddot{\varphi}(t) + \alpha^2 \varphi(t) = 0, \quad \varphi(t_1) = 0, \quad \dot{\varphi}(t_1) = 1$$

vor $\pi - t_1$ durch Null geht.

2. Aus (22) folgt leicht, wenn $X(t)$ die Bedeutung (21) hat,

$$|x(t) - \beta X(t)| \leqq \frac{\pi^2 \alpha^2}{8}.$$

Mit wachsendem β wird also auch $\operatorname{Max}|x(t)|$ beliebig groß.

3. Ich betrachte jetzt zwischen t_1 und $\pi - t_1$ das Horizontalenstück

(24) $$x_n(t) = n \cdot \pi \qquad (t_1 \leqq t \leqq \pi - t_1),$$

wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Ferner löse ich für $0 \leqq t \leqq t_1$ mit der vorhin erklärten Funktion $f(t)$ die Differentialgleichung (1) unter den Anfangsbedingungen $\dot{x}(t_1) = 0$, $x(t_1) = n\pi$. Für kleine Werte von β und nicht zu kleines n verschwindet dieses $x(t)$ nicht im Intervall $(0, t_1)$; für genügend große Werte von β liegen Nullstellen darin. Es gibt daher mindestens einen Wert β_n (und zwar gilt $\beta_n \to \infty$ mit $n \to \infty$), für den $x(0) = 0$ ist, sonst im ganzen Intervall $x(t) > 0$. Das zu diesem β_n gehörende $x(t)$ benutze ich jetzt als $x_n(t)$ für $0 \leqq t \leqq t_1$. Im übrigen sei $x_n(t)$ definiert durch (24) und für

$$\pi - t_1 \leqq t \leqq \pi \quad \text{durch} \quad x_n(\pi - t) = x_n(t).$$

Das so erhaltene $x_n(t)$ ist Lösung von (1) für $\beta = \beta_n$ und besitzt überall eine (sogar stetige) zweite Ableitung.

Ist mit ganzzahligem m $n = 2m$, so folgt nach den bekannten Schlußweisen der Sturm-Liouvilleschen Theorie, daß die zu $x(t) = x_{2m}(t)$ gehörende Lösung $\varphi(t)$ von (2) mit $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 1$ schon vor π verschwindet, da die Lösung von (2) mit $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{Const.}$, $\dot{\varphi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ in $(0, \pi)$ Nullstellen besitzt.

Aus den Überlegungen des § 4 ist leicht ersichtlich, daß für die entsprechende Lösung $\varphi(t)$ von (2), wenn darin $x(t) = x_{2m+1}(t)$ eingetragen wird, in $\langle 0, \pi \rangle$ stets $\dot{\varphi}(t) > 0$ gilt für genügend großes $m \geqq m_0$. (Wir können uns auf positive m beschränken.)

4. Jetzt soll gezeigt werden, daß, etwa ausgehend von $x_{2m}(t)$, bei wachsendem β einmal eine Lösung $\bar{x}_m(t)$ von (1) zu einem $\bar{\beta}_m > \beta_{2m}$ gefunden werden kann, für die das erste Randwertproblem von (2) lösbar

ist; diese Lösung sei $\bar{\varphi}_m(t)$. Dann ist $\bar{x}_m(t)$ mehrfache Lösung von (1). — Nehmen wir etwa im Gegenteil an, man könnte von $x_{2m}(t)$ ausgehend bei über alle Grenzen wachsenden β-Werten die Lösung stetig fortsetzen und das zugehörige erste Randwertproblem von (2) sei nie lösbar, es läge also stets der sogenannte Hauptfall vor. Wegen der Symmetrie des Problems in bezug auf den Punkt $t = \frac{\pi}{2}$ müssen alle diese Lösungen $x(t)$ wie $x_{2m}(t)$ selbst zu $t = \frac{\pi}{2}$ symmetrisch sein, was man etwa so einsehen kann: Neben $x(t)$ ist ja auch $x(\pi - t)$ Lösung von (1). Sei jetzt $x^*(t)$ die letzte zu $\frac{\pi}{2}$ symmetrische Lösung von (1); sie gehöre etwa zu β^*. Zu $\beta^* + \delta$ gehört dann eine Lösung $x(t) = x^*(t) + \varepsilon(t)$ mit kleinem nicht zu $\frac{\pi}{2}$ symmetrischem $\varepsilon(t)$. Dann gehört dazu aber auch die davon verschiedene Lösung $x(\pi - t) = x^*(\pi - t) + \varepsilon(\pi - t)$, die gleichfalls in der Nachbarschaft von $x^*(t)$ liegt, was dem Vorliegen des Hauptfalles für $x^*(t)$ widersprechen würde.

Nach der Bemerkung 2. müßte es nun einen Wert $\beta^0 > \beta_{2m}$ geben, derart daß die bei dem geschilderten Fortsetzungsprozeß erhaltene zugehörige Lösung $x^0(t)$ die Eigenschaften $x^0\left(\frac{\pi}{2}\right) = (2m+1)\pi$ und $\dot{x}^0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ besitzt. Die zugehörige Lösung $\varphi^0(t)$ von (2) mit $\varphi^0(0) = 0$, $\dot{\varphi}^0(0) = 1$ verschwände dann aber nach 3. nicht in $(0, \pi)$, während das ursprüngliche $\varphi_{2m}(t)$ schon vor $t = \pi$ durch Null ginge. Das ist aber nur möglich, wenn zwischen β_{2m} und β^0 ein Wert $\bar{\beta}_m$ liegt, zu dem eine mehrfache Lösung $\bar{x}_m(t)$ von (1) gehört.

5. Jetzt läßt sich aber auch die Existenz von gegen ∞ strebenden Werten β beweisen, für die (1) mehr als eine Lösung besitzt. Dazu betrachte man als $\bar{x}_m(t)$ etwa stets diejenigen Lösungen von (1), für die die zugehörige Lösung $\bar{\varphi}_m(t)$ des ersten Randwertproblems (2) in $(0, \pi)$ nicht verschwindet. Jetzt ist leicht zu sehen — wenigstens solange α^2 nur wenig größer als 1 ist —, daß bei beliebig klein vorgegebenem $\varepsilon > 0$ unter der Annahme $\psi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \bar{\varphi}_m\left(\frac{\pi}{2}\right) = \psi_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$ in $(0, \pi)$ stets gelten muß

$$\psi_1(t) \leqq \bar{\varphi}_m(t) \leqq \psi_2(t) \tag{25}$$

— wo $\psi_1(t)$ und $\psi_2(t)$ gleich zu erklärende Funktionen sind —, wofern nur $t_1 < \delta$ ist bei genügend kleinem $\delta > 0$. Erklärung von $\psi_1(t)$ und $\psi_2(t)$: Unter $y_1(t)$ bzw. $y_2(t)$ will ich diejenigen freien Pendelschwingungen, d. h. Lösungen von

$$\ddot{y}(t) + \alpha^2 \sin y(t) = 0,$$

verstehen, für die $\dot{y}_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und $y_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ gilt und für die die Lösungen $\psi_\nu(t)$ von

$$\ddot{\psi}_\nu(t) + \alpha^2 \cos y_\nu(t)\, \psi_\nu(t) = 0 \qquad (\nu = 1, 2) \tag{26}$$

mit den Randwerten

$$\psi_1(\varepsilon) = 0 = \psi_1(\pi - \varepsilon) \quad \text{bzw.} \quad \psi_2(-\varepsilon) = 0 = \psi_2(\pi + \varepsilon)$$

zwischen diesen Randwerten nicht verschwinden[7]). — Der Beweis unserer Behauptung ergibt sich leicht daraus, daß $\bar{x}_m(t) - 2m\pi$ für $t_1 \leqq t \leqq \pi - t_1$ selbst eine freie Pendelschwingung ist mit

$$\dot{\bar{x}}_m\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{und} \quad -\pi < \bar{x}_m\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2m\pi < \pi$$

und daß $\bar{\varphi}_m(0) = 0 = \bar{\varphi}_m(\pi)$ sein muß, während $\bar{\varphi}_m(t) \neq 0$ zwischen 0 und π gilt. (Übrigens könnte man auch die Gültigkeit der Beziehung $y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) < \left|\bar{x}_m\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2m\pi\right| < y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$ feststellen.)

Jetzt folgt leicht, daß in der zu $\bar{x}_m(t)$ gehörenden Verzweigungsgleichung die Schmidtsche Größe $L_2 \neq 0$ erreicht werden kann. Diese ist ja bis auf einen von Null verschiedenen Faktor gleich[8])

$$\int_0^\pi \bar{\varphi}_m^3(t) \sin \bar{x}_m(t)\, dt. \tag{27}$$

Daß dieser Ausdruck von Null verschieden gemacht werden kann, ist etwa so zu sehen: Sei $y(t)$ schlechthin diejenige freie Pendelschwingung mit $\dot{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und $y\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, für die Gleichung (26) eine Lösung $\psi(t)$ (schlechthin) besitzt mit $\psi(0) = 0 = \psi(\pi)$ und $\psi(t) \neq 0$ für $0 < t < \pi$; wieder sei $\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \bar{\varphi}_m\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Für $\alpha^2 = 1$ ist dieses $y(t) \equiv 0$, mithin für ein passend gewähltes, von jetzt an festgehaltenes α^2 ein wenig größer als 1, so daß die einzige Nullstelle von $y(t)$ in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ einen beliebig kleinen festen Wert ξ besitzt. Ersichtlich ist dann infolge der geometrischen Konfiguration

$$\int_0^\pi \psi^3(t) \sin y(t)\, dt = \eta > 0. \tag{28}$$

---

[7]) Vgl. dazu R. Iglisch, Zur Theorie der Schwingungen (2. Mitt.), Monatsh. f. Math. u. Phys. 39 (1932), S. 173—220, insbesondere § 5.

[8]) Vgl. R. Iglisch, Reelle Lösungsfelder der elliptischen Differentialgleichung $\Delta u = F(u)$ und nichtlinearer Integralgleichungen, Math. Annalen 101 (1929), S. 98—119, insbesondere § 6. Eine Verschärfung der dort gegebenen Sätze und eine wesentliche Vereinfachung des Beweisganges erscheint demnächst im Jahresber. D. Math.-Ver. unter dem Titel: „Einfacher Beweis, daß beim Duffingschen Schwingungsproblem die freien Pendelschwingungen nicht Verzweigungslösungen sein können".

Wählt man nun die früher eingeführte Größe ε, und damit auch δ, klein genug, so sind die Ausdrücke (27) und (28) — eventuell vom Vorzeichen abgesehen — um weniger als $\frac{\eta}{2}$ verschieden, so daß auch der Ausdruck (27) einen von Null verschiedenen Wert erhält für alle m.

Jetzt betrachte ich die zu $\bar{x}_m(t)$ benachbarten Lösungen der Gleichung (1) für $\beta = \bar{\beta}_m + \varrho$ mit beliebig kleinem ϱ. Gehört dazu eine zu $\bar{x}_m(t)$ benachbarte Lösung $x(t)$, so gehört dazu wegen $L_1 \neq 0$ noch eine zweite. Daß aber entweder für positives oder für negatives ϱ mindestens eine Lösung $x(t)$ existiert, folgt aus unserem in 4. geführten Existenzbeweis der Funktion $\bar{x}_m(t)$.

Damit haben wir auch Gleichungen der Form (1) angegeben, bei denen zu gegen ∞ strebenden Werten von β immer wieder mehr als eine Lösung vorhanden ist.

(Eingegangen am 23. 3. 1935.)

On rational normal ruled surfaces.

Von

B. Ramamurti in Annamalainagar (Indien).

Veronese had shown that the rational normal ruled surface V_2^{n-1} in S_n can be generated by the lines of intersection of homologous primes of $(n-1)$ projectively related pencils of primes[1]). Every prime[2]) cuts V_2^{n-1} along a rational norm curve C^{n-1}, and the existence on V_2^{n-1} of rational norm curves of lower order also, had been pointed out. These curves are called 'Leitkurven' and the spaces containing them are called 'Sekantenräume'. Further Segre[3]) had proved by synthetic methods that every V_2^{n-1} in S_n contains a unique leit-curve of the lowest order m, where $m \leqq \frac{n}{2} - 1$ or $\frac{n-1}{2}$ according as n is even or odd, with a single exception in the case $m = \frac{n-1}{2}$, where there are ∞^1 curves of the lowest order m.

The object of this note is, first of all, to establish the following fundamental theorem.

Theorem 1. *With reference to a rational norm curve C^n in S_n, the totality of binary n-ics, having a given binary $(n-1)$-ic as a first polar, can be represented by the points of a rational normal ruled surface V_2^{n-1} on which C^n is a leit-curve i. e. a curve intersecting every generator at a single point.*

This theorem enables us to study any V_2^{n-1} by means of a leit-curve C^n on it, and obtain the above results of Segre by the method of binary apolarity. The method provides a simple covariant specification with respect to C^n of the secant-spaces of V_2^{n-1}, and correlates the theory of the leit-curves of V_2^{n-1} with the theory of binary forms apolar to a given form of order $(n-1)$.

1.

If a rational norm curve C^n in S_n is regarded as the carrier of a binary variable x, any binary n-ic a_x^n can be represented either by the

[1]) Veronese, Math. Annalen 19 (1882), S. 224—229.

[2]) A 'Prime' in S_n is a flat space of $(n-1)$ dimensions. It is the equivalent of 'Hyperebene' in German.

[3]) Encycl. Math. Wiss. III C 7, § 30. S. 900. Also Bertini, Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume (Wien 1924), S. 336.

prime containing the n points on C^n given parametrically by a_x^n or by the unique point of intersection of the osculating primes of C^n at these points. Let us denote the prime and the point by $\overline{a_x^n}$ and a_x^n respectively. Then if a_x^n and b_x^n are apolar, the prime $\overline{a_x^n}$ (the point a_x^n) is incident with the point b_x^n (the prime $\overline{b_x^n}$).

We shall now prove Theorem 1. Let b_x^{n-1} be the given $(n-1)$-ic, and $\alpha_{1,x}^{n-1}, \alpha_{2,x}^{n-1}, \ldots, \alpha_{n-1,x}^{n-1}$ be $(n-1)$ linearly independent forms apolar to b_x^{n-1}. If a form a_x^n be such that $a_x^{n-1} a_\lambda \equiv b_x^{n-1}$, then $a_x^{n-1} a_\lambda$ is apolar to all the forms $\alpha_{r,x}^{n-1}$ and hence a_x^n is apolar to all the forms $(\lambda x)\alpha_{r,x}^{n-1}$. Hence the point a_x^n lies on the line of intersection of the $(n-1)$ primes $\overline{(\lambda x)\alpha_{r,x}^{n-1}}$. Conversely if a_x^n be any point on the line of intersection, a_x^n is apolar to every $\alpha_{r,x}^{n-1}(\lambda x)$ so that $a_x^{n-1} a_\lambda$ is apolar to all the forms $\alpha_{r,x}^{n-1}$ and hence $a_x^{n-1} a_\lambda \equiv b_x^{n-1}$ [4]). Hence the binary forms a_x^n whose first polars with respect to λ are identical with b_x^{n-1} form a pencil represented by the line of intersection of the $(n-1)$ primes $\alpha_{r,x}^{n-1}(\lambda x)$. Each of these primes belongs to one of the $(n-1)$ pencils of primes, whose axial S_{n-2}'s are secant-spaces of C^n determined by the binary forms $\alpha_{1,x}^{n-1}, \ldots, \alpha_{n-1,x}^{n-1}$, and the primes are homologous since each is determined in its pencil by the point λ of C^n through which it passes. Hence as λ varies, the line of intersection of the $(n-1)$ primes generates a rational normal ruled surface V_2^{n-1} which is then the locus of points a_x^n having b_x^{n-1} as a first polar. Obviously it contains C^n and every generator intersects C^n at a single point. Thus Theorem 1 follows.

2.

Theorem 2. *Any rational normal ruled surface V_2^{n-1} in S_n is related as in Theorem 1 to a leit-curve C^n on it, and thus determines, and is determined by, a binary $(n-1)$-ic.*

It is well known[5]) that a rational norm curve C^n can be generated by the points of intersection of corresponding primes of n projectively related pencils of primes. Hence if we take any set of $(n-1)$ pencils generating V_2^{n-1}, and one other projectively related to the former, we get C^n as the locus of the points of intersection of any generator of V_2^{n-1}

---

[4]) Here we have to omit the binary form $(\lambda x)^n$ corresponding to the point λ on C^n, since its first polar with respect to λ vanishes identically. Hence in Theorem 1, the locus sought is strictly speaking the assemblage of points on the V_2^{n-1} other than the points on C^n.

[5]) Veronese, loc. cit., S. 219.

with the corresponding prime of the adjoined pencil. Obviously C^n is a leit-curve. Taking any leit-curve C^n, the axial S_{n-2}'s of any $(n-1)$ pencils of primes by means of which V_2^{n-1} may be generated must also be secant-spaces of C^n, and the homologous primes in these pencils are those containing a generator of V_2^{n-1} and hence a point of C^n. Hence the surface is identical with that determined as in Theorem 1 by the unique binary $(n-1)$-ic, apolar to the $(n-1)$-ics determined by the above $(n-1)$ secant-S_{n-2}'s of C^n.

We shall now specify the secant-spaces of various demensions.

Theorem 3. *If a V_2^{n-1} determines, with reference to a leit-curve C on it, the binary form b_x^{n-1}, the secant-spaces S_{r-1} of V_2^{n-1} $(r \leqq n-1)$ are the secant-S_{r-1}'s of C^n cutting out on it point-sets given parametrically by binary forms α_x^r apolar to b^{n-1}.*

If $\alpha_x^r \equiv \alpha_{1,x} \cdot \alpha_{2,x} \ldots \alpha_{r,x}$ is apolar to b_x^{n-1}, it is well known that constants $K_1, K_2, \ldots, K_r$ can be found so that

$$(1) \qquad b_x^{n-1} \equiv K_1 \alpha_{1,x}^{n-1} + K_2 \alpha_{2,x}^{n-1} + \ldots + K_r \alpha_{r,x}^{n-1}.$$

Any point on the secant-space α_x^r of C^n represents an n-ic apolar to α_n^r, and hence it can be expressed in the form

$$(2) \qquad a_x^n \equiv y_1 \alpha_{1,x}^n + y_2 \alpha_{2,x}^n + \ldots + y_r \alpha_{r,x}^n.$$

The point a_x^n will lie on V_2^{n-1} if its first polar with respect to some value λ, be identical with b_x^{n-1}. Hence

$$(3) \qquad y_1 \cdot \alpha_{1,\lambda} \alpha_{1,x}^{n-1} + y_2 \cdot \alpha_{2,\lambda} \alpha_{2,x}^{n-1} + \ldots + y_r \cdot \alpha_{r,\lambda} \alpha_{r,x}^{n-1}$$

must be identical with (1).

Hence

$$(4) \qquad \frac{y_1 \cdot \alpha_{1,\lambda}}{K_1} = \frac{y_2 \cdot \alpha_{2,\lambda}}{K_2} = \frac{y_r \cdot \alpha_{r,\lambda}}{K_r}.$$

If $y_1, y_2, \ldots, y_r$ be regarded as the coordinates of the point in the secant-space S_{r-1} and λ as a parameter, (4) is a familiar parametric representation of a norm curve of S_{r-1} passing through the vertices of the simplex of reference which in this case are the points on C^n. Hence the section of V_2^{n-1} by the S_{r-1} is a rational norm curve, which is also a leit-curve since there is a unique point on it for every λ.

Conversely if C_{r-1} is a leit-curve on V_2^{n-1}, the secant-space S_{r-1} containing it must also be a secant-space of C^n, and let α_x^r give parametrically the points of intersection. Then we take any point on the leit-curve C^{r-1} other than the points of intersection with C^n [6]. If this

[6]) See note [4]).

represents with respect to C^n the binary form a_x^n, then a_x^n must be apolar to α_x^r. Further since it lies on V_2^{n-1}, $a^{n-1}a_\lambda \equiv b_x^{n-1}$ for some λ. Hence b_x^{n-1} must be apolar to α_x^r. Thus Theorem 3 is proved.

If $b_x^{n-1} \equiv \alpha_{1,x}\alpha_{2,x}\ldots\alpha_{n-1,x}$, then the perfect powers in the linear ∞^{n-2} system of $(n-1)$-ics apolar to b_x^{n-1} are $\alpha_{1,x}^{n-1}, \ldots, \alpha_{n-1,x}^{n-1}$. Hence from Theorem 3, it follows, that the osculating S_{n-2}'s at the points $\alpha_{1,x}, \ldots, \alpha_{n-1,x}$ are secant-S_{n-2}'s of V_2^{n-1}. Thus we have

Corollary 1. *The binary $(n-1)$-ic determined by a V_2^{n-1} with reference to a leit-curve C^n on it, may also be specified to be the $(n-1)$-ic, which gives parametrically the $(n-1)$-points on C^n, the osculating S_{n-2}'s at which are secant-spaces of V_2^{n-1}.*

3.

We shall now take up minimal leit-curves. From (3) it depends upon forms of lowest order apolar to b_x^{n-1}. The apolarity of α_x^r $(r \leqq n-1)$ and b_x^{n-1} amounts to $(n-r)$ conditions so that there are ∞^{2r-n} apolar forms α_x^r, forming a linear system. Hence, in general, when n is even there is a unique form of the lowest order $\frac{n}{2}$. If n is odd, the lowest order is $\frac{n+1}{2}$, and there are ∞^1 forms of this order, forming a pencil. But in special cases there may be apolar forms of lower order. If W_r represents the covariant of b_x^{n-1} whose leading term is the semi-invariant

$$\begin{vmatrix} b_0\, b_1 \ldots b_r \\ b_1\, b_2 \ldots b_{r+1} \\ \vdots \\ b_r\, b_{r+1} \quad b_{2r} \end{vmatrix}$$

and if in the series of covariants $W_0, W_1, W_2 \ldots$ (the last one being $W_{\frac{n-1}{2}}$ or $W_{\frac{n}{2}-1}$ according as n is odd or even), the covariant W_r is the *first* to vanish identically, there is a unique apolar form of order r; and conversely[7]). Since an apolar form of order r determines a leit-curve C^{r-1} we have, from Theorem 3 and its corollary:

Theorem 4. *Any rational normal ruled surface V_2^{n-1} in S_n contains a unique minimal leit-curve of order m, where $m \leqq \frac{n}{2} - 1$ or $\frac{n-1}{2}$, accord-*

[7]) Gundelfinger, Gött. Nachr. 1883, S. 115—121. Symbolically, if

$$b_x^{n-1} \equiv b_{0,x}^{n-1} \equiv b_{r,x}^{n-1},$$

$$W_r(x) = (b_0\, b_1)^2 \ldots (b_0\, b_r)^2 \ldots (b_{r-1}\, b_r)^2\, b_{0x}^{n-2r-1} \ldots b_{r,x}^{n-2r-1}.$$

ing as n is even or odd, except if n is odd and $m = \frac{n-1}{2}$, in which case there are ∞^1 leit-curves of order m. If b_x^{n-1} gives parametrically the points of a leit-curve C^n on V_2^{n-1}, the osculating S_{n-2}'s at which are secant-spaces of V_2^{n-1}, the necessary and sufficient condition that V_2^{n-1} should have a minimal leit-curve of order r is the vanishing of the covariant W_{r+1} of b_x^{n-1}.

4.

The minimal leit-curve for a rational normal ruled surface V_2^3 in S_4 is of order 1. Hence there is a unique straight line on the surface intersecting every generator and this is called the directrix[8]). From Theorem 3, this must be a secant of any leit-curve C^4. If the points of intersection be given parametrically by α_x^2, then from Theorem 3 α_x^2 must be apolar to b_x^3, the cubic determined by the surface with respect to C^4. Hence α_x^2 must be the Hessian of b_x^3. Thus we have from the above, and Corollary 1, Theorem 3:

Theorem 5. *Taking a leit-curve C^4 on a rational normal cubic surface V_2^3 in S_4, if b_x^3 gives parametrically the points on C^4 the osculating planes at which are secant-spaces of V_2^3, then the directrix of V_2^3 is the secant of C^4 cutting out the points on C^4 given parametrically by the Hessian of b_x^3.*

In S_3 the generators of a rational normal ruled surface V_2^2 are the lines of one regulus A of a quadric, the lines of the other regulus B being the ∞^1 minimal straight lines on it. Any leit-curve C^3 is a space cubic curve cutting every line of regulus A at a single point. From Theorem 3 and its corollary, it follows that the lines of the other regulus B must be secants of C^3, cutting out on C^3 pairs of points given parametrically by the pencil of quadratics apolar to b_x^2, the points of contact of the two tangents of C^3 which belong to the regulus B. This result is well-known in the geometry of a space cubic curve[9]).

[8]) Veronese, loc. cit., S. 230.

[9]) See for example Meyer, Apolarität und rationale Kurven (Tübingen 1883), S. 56.

(Eingegangen am 20. 2. 1935.)

Über Gleitverbiegungen.

Von

Eduard Rembs in Berlin.

Als Gleitverbiegungen bezeichnen wir hier im Anschluß an Liebmann [1]) analytische Verbiegungen einer konvexen ebenrandigen Flächenkalotte, bei denen der Rand eben bleibt. Daß Kalotten, deren sphärisches Bild ganz im Innern einer Halbkugel liegt, Gleitverbiegungen nicht zulassen, ist leicht einzusehen. Man braucht also nur Kalotten mit einem über die Halbkugel übergreifenden sphärischen Bild zu untersuchen.

Zur Entscheidung der Frage nach der Existenz bedingter analytischer Verbiegungen überhaupt denkt man sich die Fläche $\mathfrak{x}_0(u,v)$ in eine Schar $\mathfrak{x}(u,v;t)$ von Biegungsflächen eingebettet, etwa $\mathfrak{x}_0(u,v) = \mathfrak{x}(u,v;0)$ und die Schar nach t entwickelt. Man untersucht dann die erste, zweite, ... Annäherung, die „Verbiegungen erster, zweiter, ... Stufe." Es kann sein, daß schon die Betrachtung der Verbiegungen erster Stufe, der „infinitesimalen Verbiegungen", über die endliche Unverbiegbarkeit entscheidet. Dann liegt ein „Problem erster Stufe" vor. Dahin gehört die Unverbiegbarkeit der Eiflächen. Der Verfasser hat ferner ein Problem zweiter Stufe [2]) angegeben: Die „Flächenrinnen" mit einer ebenen geschlossenen konvexen Leitkurve sind in erster Stufe verbiegbar, in zweiter aber nicht. In dieser Arbeit wird nun gezeigt, daß das einfachste Gleitverbiegungsproblem, das der Kugelkalotten, ein Problem dritter Stufe darstellt. (§ 1). Nach Liebmann gibt es nämlich abzählbar viele genau angebbare Kugelkalotten, die infinitesimale Gleitverbiegungen zulassen; sie sind natürlich alle größer als die Halbkugel. Nur diese kommen in Betracht, wenn die Frage nach der Existenz endlicher Gleitverbiegungen aufgeworfen wird. Wir zeigen nun, daß sie alle auch Gleitverbiegungen zweiter Stufe, aber keine dritter Stufe, und daher auch keine endlichen Gleitverbiegungen zulassen. Zum Beweise werden die zu Liebmanns infinitesimalen Gleitverbiegungen gehörigen Verbiegungen zweiter und dritter Stufe, soweit hier erforderlich, explizit angegeben.

---

[1]) Münch. Ber. 1920, S. 21.

[2]) Math. Zeitschr. 36, S. 110.

Die Ausdehnung der in § 1 behandelten Frage führt schon bei Kalotten von Rotationsflächen, die von einem Breitekreis begrenzt sind, in der dritten Stufe zu wenig übersichtlichen Formeln. Dagegen läßt sich nachweisen (§ 2), daß für alle Rotationseiflächen die Verhältnisse bei den beiden ersten Stufen denen bei der Kugel ganz analog sind. Der Beweis wird durch eine Untersuchung der Änderungen geführt, die die Halbmesser der Breitekreise bei infinitesimaler Verbiegung erfahren.

In einer demnächst im Crelleschen Journal erscheinenden Arbeit hat der Verfasser gezeigt, daß die infinitesimalen Gleitverbiegungen der Kugelkalotten auch als besonderer Fall der dritten Randwertaufgabe der Potentialtheorie angesehen werden können. Die dort angewandte Methode ist dadurch bemerkenswert, daß sie zugleich eine Deutung für die in der Weierstraßschen Darstellung der Minimalflächen auftretende willkürliche Funktion liefert.

§ 1.

Gleitverbiegungen bei der Kugel.

Zur Behandlung unserer Aufgabe wählen wir die folgende Darstellung der Kugel:

$$x = \frac{\cos v}{\operatorname{Cos} u}; \quad y = \frac{\sin v}{\operatorname{Cos} u}; \quad z = \operatorname{Tg} u. \tag{1}$$

Die großen Buchstaben deuten die Hyperbelfunktionen an. Die gesuchten Verbiegungsgrößen sollen im Südpol ($u = -\infty$) regulär sein. Es fragt sich, ob es solche Verbiegungen gibt, bei denen die Änderungen der z-Koordinate $\operatorname{Tg} u$ längs eines (nördlichen) Breitekreises alle konstant sind. Da also die Änderungen der andern Koordinaten hier kein Interesse haben, wählen wir eine von Liebmann vorgeschlagene Methode, bei der eben nur die Änderungen der einen Koordinate in Betracht gezogen zu werden brauchen. Wir stellen die Boursche Gleichung auf, der die Koordinaten aller mit (1) isometrischen Flächen genügen müssen, setzen darin $f = \operatorname{Tg} u + R$, $R = \varepsilon A + \varepsilon^2 B + \varepsilon^3 C$ und erhalten so partielle lineare Differentialgleichungen für die Änderungen A, B, C von $z = \operatorname{Tg} u$.

Die Fundamentalgrößen erster Ordnung von (1) sind

$$E = G = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 u}; \quad F = 0,$$

und die Boursche Gleichung hat daher folgende Gestalt:

$$(f_{11} f_{22} - f_{12}^2) + \operatorname{Tg} u (-f_1 f_{11} + f_1 f_{22} - 2 f_2 f_{12}) \\ + (1 - 2 \operatorname{Tg}^2 u)(f_1^2 + f_2^2) - \frac{1}{\operatorname{Cos}^4 u} = 0,$$

wobei die Indizes 1, 2 Differentiation nach u bzw. v andeuten. Setzt man

$$f = \operatorname{Tg} u + R,$$

so erhält man eine Gleichung für R:

$$(R_{11}R_{22}-R_{12}^2)$$

$$+\operatorname{Tg}u\left\{-\left(\frac{1}{\operatorname{Cos}^2 u}+R_1\right)R_{11}+\left(-\frac{1}{\operatorname{Cos}^2 u}+R_1\right)R_{22}-2R_2R_{12}\right\}$$

$$+(1-2\operatorname{Tg}^2 u)(R_1^2+R_2^2)+\frac{2}{\operatorname{Cos}^4 u}R_1=0.$$

Sie hat natürlich u. a. die Lösung $R = 0$.

Wir setzen

$$R=\varepsilon A+\varepsilon^2 B+\varepsilon^3 C+\ldots$$

und erhalten dadurch Gleichungen für A, B, C, zunächst:

$$-\operatorname{Sin}u\,(A_{11}+A_{22})+\frac{2}{\operatorname{Cos}u}A_1=0. \tag{2}$$

Die von Liebmann entdeckten infinitesimalen Gleitverbiegungen haben die Zusatzgröße

$$A=\varphi(u)\cdot\sin nv;$$

dabei ist φ eine Funktion von u allein, die wegen (2) der Gleichung

$$\operatorname{Sin}2u\,(-\varphi''+n^2\varphi)+4\varphi'=0$$

genügen muß. (Striche bedeuten Differentiation nach u.) Die Gleichung hat nämlich die auf der ganzen Kugel (für alle u) mit Ausnahme des Nordpols ($u=\infty$) reguläre Lösung:

$$\varphi=\frac{e^{nu}}{\operatorname{Cos}u}\{(n-1)e^{u}-(n+1)e^{-u}\},$$

die an dem Breitekreis

$$e^{2u}=\frac{n+1}{n-1} \tag{3}$$

verschwindet. Dort ist also auch $A = 0$. Zu jedem ganzzahligen $n > 1$ gehört eine Kalotte, die infinitesimale Gleitverbiegungen zuläßt, und durch (3) wird der Breitekreis angegeben, der sie begrenzt. Diese Kalotten sind die einzigen, die für unsere weitere Untersuchung in Betracht kommen[3]). Die Gleitbreitekreise haben den Äquator (für $n \to \infty$) als Häufungskurve.

Wir gehen nun zur zweiten Stufe über. Die Gleichung für B lautet:

$$-\frac{\operatorname{Sin}u}{\operatorname{Cos}^3 u}(B_{11}+B_{22})+\frac{2}{\operatorname{Cos}^4 u}B_1+(A_{11}A_{22}-A_{12}^2)$$

$$+\operatorname{Tg}u\,(-A_1A_{11}+A_1A_{22}-2A_2A_{12})+(1-2\operatorname{Tg}^2u)(A_1^2+A_2^2)=0.$$

Da hier $A=\varphi\cdot\sin nv$ zu setzen ist, kommen für B nur Funktionen der folgenden Form in Betracht:

$$B=\psi(u)+\chi(u)\cos 2nv.$$

[3]) Es sei hier auf die Dresdener Dissertation von E. Weichelt (1933) aufmerksam gemacht; sie behandelt Kugelverbiegungen erster und zweiter Stufe, die in beiden Polen singulär werden und bei denen der Äquator eben bleibt.

Die Gleichung für B spaltet sich dadurch in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen, eine für ψ und eine für χ, nämlich:

$$\begin{aligned}- \operatorname{Sin} 2u\, \psi'' + 4\psi' + \frac{n^2 e^{2nu}}{2} \{(n^2-1)^2(-e^{4u} + 2 - e^{-4u}) \\ + 4(n-1)^2 e^{2u} + 4(n+1)^2 e^{-2u}\} = 0\end{aligned}$$

und

$$\operatorname{Sin} 2u(-\chi'' + 4n^2\chi) + 4\chi' - 4e^{2nu}(n^4 - n^2) = 0. \tag{4}$$

Man vergleiche die letztere mit der für φ. Die verkürzte Gleichung stimmt mit der für φ überein, nur hat dort φ den Faktor n^2, hier χ den Faktor $4n^2$. Die im Südpol reguläre Lösung der zu (4) gehörigen verkürzten Gleichung verschwindet daher an dem durch $e^{2u} = \frac{2n+1}{2n-1}$ bestimmten Breitekreis, aber nicht an dem Breitekreis (3). Gerade darum aber läßt sich aus irgendeiner im Südpol regulären Lösung von (4), die etwa in (3) nicht verschwindet, eine in (3) verschwindende Lösung von (4) erhalten durch Addition einer geeigneten Lösung der zu (4) gehörigen verkürzten Gleichung.

Zusatzgrößen zweiter Stufe, die zu Liebmannschen Gleitverbiegungen gehören, waren zuerst von Lagally bestimmt, aber nicht veröffentlicht worden. Sie lieferten keine Gleitverbiegungen zweiter Stufe[4]). Die hier folgenden Gleitverbiegungen zweiter Stufe sind aus den Formeln Lagallys, in dessen Manuskript der Verfasser Einblick nehmen durfte, nach dem eben angegebenen einfachen Verfahren ermittelt worden. Das gilt insbesondere für χ. Denn das Verhalten von ψ am Gleitbreitenkreis ist belanglos, da ψ ja nur von u abhängt und in B rein additiv auftritt. Es stimmt denn auch mit der entsprechenden, von Lagally nur in Hyperbelfunktionen geschriebenen Größe bis auf einen konstanten Faktor überein.

Die Werte für ψ und χ sind:

$$\begin{aligned}\psi &= -\frac{e^{2nu}}{8 \operatorname{Cos} u}\{(n^2-n)^2 e^{3u} + (n-1)^2(n^2+4n)e^u \\ &\qquad - (n+1)^2(n^2-4n)e^{-u} - (n^2+n)^2 e^{-3u}\}, \\ \chi &= -\frac{(n^3-n)e^{2nu}}{2\operatorname{Cos} u}\{(n-1)e^u - (n+1)e^{-u}\}.\end{aligned}$$

Ziemlich mühsam gestaltet sich die Bestimmung von C. Da es aber über die ganze Frage entscheidet, sollen doch die hauptsächlichen Gleichungen angegeben werden. Zunächst ist

$$\begin{aligned}&-\frac{\operatorname{Sin} u}{\operatorname{Cos}^3 u}(C_{11} + C_{22}) + \frac{2}{\operatorname{Cos}^4 u} C_1 + (A_{11}B_{22} + B_{11}A_{22} - 2A_{12}B_{12}) \\ &+ \operatorname{Tg} u(-A_1 B_{11} - B_1 A_{11} + A_1 B_{22} + B_1 A_{22} - 2A_2 B_{12} - 2B_2 A_{12}) \\ &\qquad + (1 - 2\operatorname{Tg}^2 u)(2A_1 B_1 + 2A_2 B_2) = 0.\end{aligned}$$

[4]) Vgl. Math. Zeitschr. 18, S. 323. (Lagally verwendet eine andere Bestimmungsmethode.)

Wegen $A = \varphi \sin n v$; $B = \psi + \chi \cos 2 n v$ kommen nur Lösungen

$$C = \sigma \cdot \sin n v + \tau \cdot \sin 3 n v$$

in Frage, wo σ und τ Funktionen von u allein sind. τ ließe sich zwar den Forderungen der Aufgabe entsprechend bestimmen, nicht aber σ. Man findet:

$$\operatorname{Sin} 2u(-\sigma'' + n^2\sigma) + 4\sigma' + \frac{n(n^3-n)^2 e^{3nu}}{4}\{P(u,n) + P(-u,-n)\} = 0$$

mit der Abkürzung

$$P(u,n) = (n-1)(n+2)e^{6u} - \frac{2(n-1)(3n^2+4n+3)}{n+1}e^{4u} - \frac{n^3-4n^2-7n+6}{n+1}e^{2u} + (6n^2-14).$$

Die verkürzte Gleichung enthält bei σ den Faktor n^2. Wenn es also *eine* im Südpol reguläre Lösung gibt, die am Breitekreis (3) nicht verschwindet, so verschwindet keine. Eine solche Lösung ist aber

$$\sigma = \frac{(n^3-n)^2 e^{3nu}}{16 \operatorname{Cos} u}\{Q(u,n) + Q(-u,-n)\} \tag{5}$$

mit

$$Q = \frac{n^2-n}{2(n+1)}e^{5u} + \frac{-10n^4+3n^3+4n^2+3n}{2(n+1)^2(2n+1)}e^{3u} + \frac{-6n^3-5n^2+14n+3}{(n+1)(2n+1)}e^{u}.$$

Setzt man nämlich in (5) $e^u = \frac{n+1}{n-1}$ ein, so findet man, daß σ dort für kein $n > 1$ verschwindet. Das bedeutet aber, daß es überhaupt keine Kugelkalotten gibt, die Gleitverbiegungen gestatten.

§ 2.

Gleitverbiegungen bei beliebigen Rotationseiflächen.

Die Rotationseifläche liege in der Gestalt vor:

$$x = r(u)\cos v; \quad y = r(u)\sin v; \quad z = z(u); \tag{6}$$

u sei die Bogenlänge des Meridians, $u = 0$ der Südpol. Dann ist an den Polen $z' = r'' = 0$, im Innern überall $z' > 0$, $r'' < 0$, südlich des Äquators $r' > 0$, $z'' > 0$, nördlich $r' < 0$, $z'' < 0$, am Äquator $r' = z'' = 0$; überall ist $k = z'r'' - r'z'' < 0$.

Die Änderungen $R(u,v)$, $Z(u,v)$, $V(u,v)$ von r, z, v müssen drei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung[5]) genügen. Setzt man sie als trigonometrische Reihen nach $\cos(nv)$, $\sin(nv)$ an, so erhält man für

[5]) Vgl. Math. Zeitschr. 35, S. 529.

die nur von u abhängigen Koeffizienten R_n, Z_n von $\cos(nv)$ bzw. $\sin(nv)$ das System gewöhnlicher Gleichungen ($n \geqq 2$):

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} r' R_n' + z' Z_n' = 0, \\ (n^2 - 1) r' R_n + r R_n' + n^2 z' Z_n = 0. \end{cases}$$

Soll $Z_n \cdot \cos(nv)$ bzw. $Z_n \cdot \sin(nv)$ an einem Breitekreis konstant sein, dann muß dort Z_n verschwinden. Da wir schon wissen, daß nur nördliche Breitekreise in Betracht kommen, muß der Verlauf von Z_n von $u = 0$ über den Äquator hinweg untersucht werden. Da die aus (7) folgende Gleichung für Z_n den Äquator $r' = 0$ als singuläre Stelle hat, untersuchen wir zweckmäßiger das Verhalten von R_n. Die Gleichung für R_n kann so geschrieben werden:

$$\text{(8)} \qquad \left(\frac{1}{z'} R_n'\right)' + \frac{(n^2-1)k}{r z'^2} R_n = 0,$$

Sie besitzt in $u = 0$ Fundamentallösungen, die sich wie u^{n+1} bzw. u^{-n+1} verhalten, entsprechend am Nordpol.

Um das Verhalten der in $u = 0$ verschwindenden Funktion R_n längs des Meridians zu ermitteln, leiten wir aus (8) zunächst vier Integralformeln ab, denen wir die für Z_n wichtigen Ergebnisse entnehmen.

1. Es ist

$$\text{(9)} \qquad R_n' = -(n^2-1) z' \int_0^u \frac{k R_n \, du}{r z'^2},$$

denn in $u = 0$ verschwindet R_n' von n-ter, z' von erster Ordnung. Aus (9) folgt, daß überall (außer in $u = 0$)

$$\text{(10)} \qquad R_n' > 0; \quad R_n > 0$$

gilt, wenn dies für kleine Werte von u der Fall ist, was wir annehmen wollen. Wegen $z' > 0$, $k < 0$ kann es nämlich kein erstes u geben, für das $R_n' = 0$ wäre, da für alle kleineren u die Funktion $R_n > 0$ ist. Wie am Südpol kann auch am Nordpol R_n nur verschwinden oder unendlich werden. Nach dem Gesagten kommt nur letzteres in Frage.

2. Die jetzt abzuleitende Formel wird, streng genommen, nicht benötigt; sie soll das Verhalten der R_n im Gegensatz zur folgenden Nummer charakterisieren.

Es sei m eine ganze Zahl $> n$ und R_m das zugehörige Integral von (8), das im Südpol regulär ist. Wir multiplizieren (8) mit R_m und die Gleichung für R_m mit R_n und subtrahieren:

$$R_m \left(\frac{1}{z'} R_n'\right)' - R_n \left(\frac{1}{z'} R_m'\right)' + \frac{(n^2 - m^2) k}{r z'^2} R_m R_n = 0.$$

Wegen des Verhaltens von R_m, R_n für $u = 0$ ergibt sich hieraus:

(11) $$R_n R'_m - R_m R'_n = (n^2 - m^2) z' \int_0^u \frac{k R_m R_n du}{r z'^2}.$$

Dies ist die Sturmsche Formel für unsern besondern Fall. Da $m > n$, $k < 0$, und da (10) für alle n gilt, entnehmen wir (11):

$$R_n R'_m - R_m R'_n > 0$$

für $u > 0$, und daher ist

(12) $$\frac{R'_m}{R_m} > \frac{R'_n}{R_n}.$$

3. Man multipliziere (8) mit $(m^2 - 1) R_m$ und die Gleichung für R_m mit $(n^2 - 1) R_n$ und subtrahiere. Man findet:

$$(m^2 - 1) R_m \left(\frac{1}{z'} R'_n\right)' - (n^2 - 1) R_n \left(\frac{1}{z'} R'_m\right)' = 0$$

und daraus

$$(m^2 - 1) R_m \frac{R'_n}{z'} - (n^2 - 1) R_n \frac{R'_m}{z'} - \int_0^u (m^2 - 1) \frac{R'_m R'_n du}{z'} + \int_0^u (n^2 - 1) \frac{R'_m R'_n du}{z'} = 0,$$

also

(13) $$(m^2 - 1) R_m R'_n - (n^2 - 1) R_n R'_m = (m^2 - n^2) z' \int_0^u \frac{R'_m R'_n}{z'} du$$

und wegen (10):

(14) $$\frac{R'_n}{(n^2 - 1) R_n} > \frac{R'_m}{(m^2 - 1) R_m}$$

für alle $u > 0$.

4. Man führe in (8) die Differentiation aus und multipliziere mit $2 r z'^2 R'_n$; die Gleichung läßt sich dann so schreiben:

(15) $$(r z' R'^2_n)' = \left(r' - \frac{3 k r r'}{z'}\right) z' R'^2_n - 2 (n^2 - 1) k R_n R'_n.$$

(Es ist $z'' = -k r'$.) U sei ein beliebiger Punkt im Innern. Wegen des Verhaltens der R_n in $u = 0$ läßt sich dann bei gegebenem $n = N$ die Konstante M so wählen, daß in $\langle 0, U \rangle$ überall

$$\frac{z' R'_N}{(N^2 - 1) R_N} < M$$

wird. Wegen (14) ist dort für alle $n > N$

$$\frac{z' R_n'}{(n^2-1) R_n} < M.$$

Dann folgt aus (15):

$$(r z' R_n'^2)' < \left| r' - \frac{3 k r r'}{z'} \right| \cdot M (n^2 - 1) R_n R_n' - 2 (n^2 - 1) k R_n R_n';$$

nur für $u = 0$ hätte das Gleichheitszeichen zu stehen.

Nun verschwinden r und z' in $u = 0$ beide von erster Ordnung. Es gibt daher eine nur von N abhängige Zahl M_1, so daß für alle u in $\langle 0, U \rangle$ die Ungleichung besteht

$$\left| r' - \frac{3 k r r'}{z'} \right| M - 2 k < 2 M_1.$$

Für jedes $n > N$ ist dann in dem genannten Intervall überall

$$(r z' R_n'^2)' < 2 (n^2 - 1) M_1 R_n R_n';$$

auch hier tritt wieder für $u = 0$ das Gleichheitszeichen ein.

Wird von 0 bis U integriert, so folgt, daß in $u = U$

$$r z' R_n'^2 < (n^2 - 1) M_1 R_n^2$$

gilt für alle $n > N$. Da U beliebig war, ist für jedes u im Innern die Zahlenfolge $\frac{R_n'^2}{(n^2-1) R_n^2}$ und also auch die Folge $\frac{R_n'}{\sqrt{n^2-1}\, R_n}$ beschränkt. Für alle Innenpunkte erhält man mithin

$$\lim_{n \to \infty} \frac{R_n'}{(n^2-1) R_n} = 0. \tag{16}$$

Was ergibt sich nun daraus über das Verhalten von Z_n? Aus (10) und der ersten Gleichung (7) folgt im Hinblick auf die Werte von z' und r': Südlich des Äquators ist $Z_n' < 0$, am Äquator $= 0$, nördlich > 0; es wird bei Annäherung an den Nordpol zugleich mit Z_n unendlich. Dann muß aber Z_n eine nördlich gelegene Nullstelle besitzen, und damit ist die Existenz infinitesimaler Gleitverbiegungen nachgewiesen.

Bezüglich der Gleitverbiegungen zweiter Stufe erinnern wir an die zur Gleichung (4) gemachten Bemerkungen. Genau wie dort wird auch hier der Beweis für die Existenz erbracht sein, wenn sich herausstellt, daß Z_n und Z_{2n} *verschiedene* Nullstellen haben. Das ergibt sich nun auf folgende Art aus der zweiten Gleichung (7), die wir (für Z_m) so schreiben:

$$Z_m = - \frac{(m^2-1) r R_m}{m^2 z'} \left(\frac{r'}{r} + \frac{R_m'}{(m^2-1) R_m} \right). \tag{17}$$

An der Nullstelle von Z_m verschwindet der Ausdruck in der Klammer, südlich davon ist er > 0. An der Nullstelle ist aber nach (14) der entsprechende Ausdruck für Z_n $(n < m)$ noch > 0. Also liegt die Nullstelle von Z_n nördlicher als die von Z_m. Mit wachsendem n rücken die Nullstellen von Z_n in Richtung auf den Äquator zu. Damit ist das Verhalten von Z_n noch genauer angegeben als notwendig war, jedenfalls aber die Existenz von Gleitverbiegungen zweiter Stufe nachgewiesen.

Aus (16) folgt schließlich, weil am Äquator $r' = 0$ ist, daß mit wachsendem n die Klammer in (17) immer näher dem Äquator verschwindet. Die Gleitbreitekreise haben also den Äquator wie bei der Kugel als Häufungskurve.

(Eingegangen am 22. 3. 1935.)

Grundzüge der Theorie der Verbände.

Von

Fritz Klein-Barmen in Wuppertal.

Inhaltsverzeichnis.

Literaturverzeichnis.

Bei Verweisen auf dieses Verzeichnis wird das in eckigen Klammern beigefügte Zeichen der Arbeit angegeben.

G. Birkhoff.

[1] On the combination of subalgebras. Proceedings of the Cambr. Phil. Soc. 29 (1933), S. 441—464.

R. Dedekind.

[W. XXVI] Über eine Erweiterung des Symbols (a, b) in der Theorie der Moduln. Ges. Werke II (1931), Abh. XXVI, S. 59—85.

[W. XXVIII] Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler. Ges. Werke II, Abh. XXVIII, S. 103—147.

[W. XXX] Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe. Ges. Werke II, Abh. XXX, S. 236—271.

F. Klein-Barmen.

[D. S.] Einige distributive Systeme in Mathematik und Logik. Jahresber. d. D. Math. Ver. 38 (1929), S. 35—40.

[A. V. I] Zur Theorie der abstrakten Verknüpfungen. Math. Annalen 105 (1931), S. 308—323.

[A. V. II] Über einen Zerlegungssatz in der Theorie der abstrakten Verknüpfungen. Math. Annalen 106 (1932), S. 114—130.

[A. V. III] Über gekoppelte Axiomensysteme in der Theorie der abstrakten Verknüpfungen. Math. Zeitschr. 37 (1933), S. 39—60.

[Verb. 1] Beiträge zur Theorie der Verbände. Math. Zeitschr. 39 (1934), S. 227—239.

E. Steinitz.

[1] Algebraische Theorie der Körper. Neu herausgegeben von R. Baer und H. Hasse. Leipzig und Berlin 1930.

Einleitung.

Es gibt in der Mathematik neben Begriffen von nur örtlicher Bedeutung auch solche, die gleichsam als konstruktive Ideen den gesamten Bereich der mathematischen Begriffs- und Gedankenwelt durchdringen und damit die Einheit des mathematischen Denkens begründen und gewährleisten. Zu diesen ursprünglichsten Begriffen gehört, um nur ein Beispiel anzuführen, der Begriff der Gruppe. Mindestens ebenso beherrschend, wenn auch in seiner Bedeutung längst nicht so erkannt, ist der Begriff des *Verbandes*. Ein Verband ist eine Menge, deren Elemente zweier Verknüpfungen fähig sind, die in formaler Hinsicht vom Typus der mengentheoretischen Operationen der Vereinigungs- und Durchschnittsbildung bzw. gewisser noch näher zu beschreibender Verallgemeinerungen dieser elementaren Operationen sind. In mehreren Arbeiten bin ich auf die Begründung der Theorie der Verbände eingegangen; dabei habe ich versucht, durch Aufweisung von Anwendungsmöglichkeiten den universalen Charakter des Verbandsbegriffes zu unterstreichen. Was ich einen Verband nenne, heißt bei Dedekind, der nicht nur zu den großen Algebraikern und Zahlentheoretikern, sondern auch zu den Klassikern der Grundlagenforschung gehört, Dualgruppe. Ich möchte aber die Dedekindsche Bezeichnung vermeiden, da ein Verband keine Gruppe in dem üblichen Sinne ist. Die schönen und leicht verständlichen Dedekindschen Untersuchungen über Dualgruppen[1]) sind leider lange Zeit ziemlich unbeachtet geblieben; ich lernte sie während der Abfassung der endgültigen Niederschrift von [A. V. III] kennen. In diesem Zusammenhang werde auch auf die kürzlich erschienene Arbeit von G. Birkhoff hingewiesen. Neben Dedekind gehört E. Schröder zu den Mitbegründern unserer Theorie. Sah der Mathematiker Dedekind den Verband zu allererst in gewissen algebraischen Bereichen, so stieß der Logiker Schröder im Urteilskalkül auf die einen Verband konstituierenden Verknüpfungen. In dieser Verschiedenheit der Ausgangsstellungen erblicke ich erneut einen Beweis für die wurzelhafte Ursprünglichkeit und Universalität des Verbandsbegriffes.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist einmal die Eingliederung der Theorie der Verbände in die allgemeine Theorie der abstrakten Beziehungen und Verknüpfungen. An zweiter Stelle soll die sich um den Begriff des Verbandes gruppierende Begriffswelt weiter ausgebaut werden.

---

[1]) Außer in den im Literaturverzeichnis angegebenen Arbeiten behandelt Dedekind die Theorie der Dualgruppen in den von ihm herausgegebenen Vorlesungen über Zahlentheorie von Dirichlet; vgl. S. 493 ff. der vierten Auflage (1894).

Bei dieser Gelegenheit spreche ich Herrn P. Bernays in Zürich, der das Manuskript der vorliegenden Arbeit vor der Drucklegung eingesehen hat, für eine Reihe von Abänderungsvorschlägen meinen besten Dank aus.

Drittens wird ein zur Veranschaulichung der Verbände sehr geeignetes Verfahren entwickelt, das der Dedekindschen Tafelmethode in mancher Hinsicht überlegen ist; insbesondere vermittelt es einen plastischen Eindruck von der Feinstruktur der Verbände. Schließlich wird in dieser Arbeit die Frage nach der Beschaffenheit derjenigen Verbände aufgeworfen, die Unterverbände eines gegebenen Verbandes sein können; teilweise wird diese Frage in den beiden letzten Paragraphen beantwortet. Allerdings sind wir von einer auch nur einigermaßen vollständigen Lösung des Problems noch weit entfernt. Das ist aber nicht so verwunderlich, wenn man bedenkt, daß auch das entsprechende Problem der bereits Disziplin gewordenen Gruppentheorie bisher unerledigt geblieben ist. Offenbar fehlt es an fruchtbaren Fragestellungen und neuen Beweismethoden.

Wir bemerken noch, daß wir, um die Darstellung möglichst lückenlos und abgerundet zu gestalten, einiges aus den früheren Untersuchungen in die vorliegende Arbeit aufgenommen haben, andererseits aber, um Wiederholungen zu vermeiden, nicht auf Fragen rein axiomatischen Charakters, also auf Fragen, die die Unabhängigkeit und Widerspruchslosigkeit der Verbandsaxiome betreffen, eingegangen sind. Zur Vermeidung von Mißverständnissen machen wir ferner ausdrücklich darauf aufmerksam, daß die betrachteten Verbände, wenn nichts anderes festgesetzt wird, hinsichtlich der Anzahl der Elemente ganz beliebig sind, also sowohl endlich als auch unendlich sein können.

§ 1.

Verbände.

Die Elemente einer Menge M seien zweier gewöhnlicher Verknüpfungen fähig, die durch $\smile$ und $\frown$ symbolisiert seien. Die Verknüpfungen seien näher bestimmt durch fünf zusätzliche *Axiome*, die folgendermaßen lauten:

I. Sind a und b zwei beliebige Elemente aus M, so gibt es ein Element c aus M, so daß gilt

$$a \smile b = c,$$

und ein Element d aus M, so daß gilt

$$a \frown b = d.$$

II. Für zwei beliebige Elemente a und b aus M gilt

$$a \smile b = b \smile a, \quad a \frown b = b \frown a.$$

III. Für drei beliebige Elemente a, b und c aus M gilt

$$(a \smile b) \smile c = a \smile (b \smile c), \quad (a \frown b) \frown c = a \frown (b \frown c).$$

IV. Für jedes Element a aus M gilt

$$a \cup a = a, \quad a \cap a = a.$$

V. Sind a und b zwei Elemente aus M, so gilt mit $a \cup b = a$ auch $a \cap b = b$ und mit $a \cap b = a$ auch $a \cup b = b$.

Erklärung 1. Eine Menge M mit zwei den Axiomen I bis V genügenden Elementverknüpfungen heiße ein *Verband* in bezug auf die beiden Verknüpfungen[2]). Eine Untermenge N von M, die ebenfalls ein Verband in bezug auf die in M erklärten Verknüpfungen ist[3]), heiße ein *Unterverband* von M; umgekehrt werde M als *Oberverband* von N bezeichnet. Insbesondere werde, wenn M und N verschieden sind, N ein *eigentlicher* Unterverband von M und M ein *eigentlicher* Oberverband von N genannt. Unter der *Ordnung* eines Verbandes werde die Anzahl seiner Elemente verstanden; je nachdem die Ordnung endlich oder unendlich ist, werde der Verband als endlich oder unendlich bezeichnet. Ist M_1 ein eigentlicher Oberverband bzw. Unterverband von M_2 und M_2 ein eigentlicher Oberverband bzw. Unterverband von M_3, so werde M_2 als *zwischen* M_1 und M_3 befindlich bezeichnet.

Die Theorie der Verbände wird, wie das Axiomensystem erkennen läßt, von einem *Dualitätsprinzip* beherrscht, insofern nämlich zu jedem Satz und zu jedem Begriff ein Gegenstück vorhanden ist, das dadurch erhalten wird, daß in dem Satz bzw. in der Begriffserklärung jedes der Symbole $\cup$ und $\cap$ durch das andere ersetzt wird.

Satz 1. *Jede der Verknüpfungen $\cup$ und $\cap$ ist hinsichtlich einer beliebigen endlichen Anzahl von Elementen sowohl kommutativ als auch assoziativ, so daß das Ergebnis der auf die n Elemente $a_1, \ldots, a_n$ ausgeübten Verknüpfung $\cup$ bzw. $\cap$ in der Form $a_1 \cup \ldots \cup a_n$ bzw. $a_1 \cap \ldots \cap a_n$, also ohne Klammern und in beliebiger Reihenfolge der Elemente geschrieben werden kann.*

Satz 2. *Für zwei beliebige Elemente a und b eines Verbandes gilt*[4])

$$(a \cup b) \cap a = a, \quad (a \cap b) \cup a = a.$$

Satz 3. *In jedem Verband M gibt es höchstens ein Element e derart, daß für alle Elemente a aus M gilt*

$$a \cap e = e \cap a = e,$$

also auch

$$a \cup e = e \cup a = a,$$

[2]) Ist kein Mißverständnis zu befürchten, so kann der Hinweis auf die Verknüpfungen unterbleiben. Entsprechendes werde auch für die weiteren Erklärungen festgesetzt.

[3]) Dazu ist notwendig und hinreichend, daß für N das Axiom I in Kraft ist.

[4]) [Verb. 1], S. 235.

und höchstens ein Element f derart, daß für alle Elemente a aus M gilt

$$a \cup f = f \cup a = f,$$

also auch

$$a \cap f = f \cap a = a.$$

Erklärung 2. Die Elemente e und f des Satzes 3 mögen *Hauptelemente* oder *Spitzen* von M heißen.

Satz 4. *Jeder endliche Verband besitzt beide Spitzen; und zwar gilt*

$$e = a_1 \cap \ldots \cap a_n, \quad f = a_1 \cup \ldots \cup a_n,$$

wenn der Verband aus den n Elementen $a_1, \ldots, a_n$ besteht.

Satz 5. *Es gibt unendliche Verbände ohne, mit einer und mit zwei Spitzen.*

Satz 6. *Aus* $a \cup b = e$ *folgt* $a = b = e$; *aus* $a \cap b = f$ *folgt* $a = b = f$.

Satz 7. *Sind M_1 und M_2 Unterverbände eines Verbandes M, so ist auch der mengentheoretische Durchschnitt von M_1 und M_2, falls er nicht leer ist, ein Unterverband von M.*

Satz 8. *Sind M_1 und M_2 Unterverbände eines Verbandes M, so gibt es einen Unterverband M_3 von M derart, daß M_3 erstens gemeinsamer Oberverband von M_1 und M_2 und zweitens Unterverband eines jeden M_1 und M_2 umfassenden Unterverbandes von M ist.*

Der Verband M_3, der gewissermaßen der engste M_1 und M_2 enthaltende Unterverband von M ist, kann als das *Kompositum* der Verbände M_1 und M_2 bezeichnet werden. Daß zwar der Durchschnitt, im allgemeinen aber nicht die Vereinigung zweier Verbände ein Verband ist, ist eine Folge des Axioms I.

Satz 9. *Ist M eine endliche oder unendliche Menge von Verbänden derart, daß je zwei Verbände aus M Unterverbände von mindestens einem Verband aus M sind, so ist auch die mengentheoretische Vereinigung aller Verbände aus M ein Verband.*

Dieser Satz entspricht einem Satz von Steinitz über die Vereinigungsmenge von Körpern. Wegen des Beweises werde auf die Steinitzsche Arbeit verwiesen [5]), da die dortigen Ausführungen mit nur geringfügigen Abänderungen für unseren Satz wirksam bleiben.

Erklärung 3. Zwei nicht notwendigerweise verschiedene Verbände M und $\overline{M}$ mögen als *zueinander symmetrisch* bezeichnet werden, wenn es eine (1, 1)-deutige Beziehung $\longleftrightarrow$ gibt derart, daß mit

$$a \longleftrightarrow \bar{a}, \quad b \longleftrightarrow \bar{b}$$

stets

$$a \cup b \longleftrightarrow \bar{a} \cap \bar{b}, \quad a \cap b \longleftrightarrow \bar{a} \cup \bar{b}$$

---

[5]) Steinitz [1], S. 12.

gilt, unter a, b Elemente aus M, unter $\bar{a}, \bar{b}$ Elemente aus $\bar{M}$ verstanden. Ein zu sich selbst symmetrischer Verband werde kurz als *symmetrisch* bezeichnet [6]).

Nicht jeder Verband ist symmetrisch; beispielsweise ist ein Verband sicher asymmetrisch, wenn er nur eine Spitze besitzt.

Erklärung 4. Zwei nicht notwendigerweise verschiedene Verbände M und M' mögen *isomorph* oder von demselben *Typus* heißen, wenn es eine (1, 1)-deutige Beziehung $\longleftrightarrow$ gibt derart, daß mit

$$a \longleftrightarrow a', \quad b \longleftrightarrow b'$$

stets

$$a \cup b \longleftrightarrow a' \cup b', \quad a \cap b \longleftrightarrow a' \cap b'$$

gilt, unter a, b Elemente aus M, unter a', b' Elemente aus M' verstanden. Die zuordnende Beziehung $\longleftrightarrow$ heiße ein *Isomorphismus*. Insbesondere heiße $\longleftrightarrow$ ein *Automorphismus*, wenn die Verbände M und M' aus denselben Elementen bestehen.

§ 2.

Die Beziehungen $\succ$ und $\prec$.

Wir führen nun zwei Beziehungen ein, die deshalb von besonderer Bedeutung sind, weil in ihnen eine Reihe von Begriffen wurzelt, ohne die die Erfassung der feineren Struktur der Verbände unmöglich ist.

Erklärung 5. Sind a und b Elemente eines Verbandes M, so bedeute $a \succ b$ bzw. $a \prec b$, daß es ein Element c in M gibt, so daß $a = b \cup c$ bzw. $a = b \cap c$ gilt

Satz 10. *Die Symbole $\succ$ und $\prec$ stellen Beziehungen in M dar.*

Satz 11. *Mit $a \succ b$ gilt $a = a \cup b$ und umgekehrt; mit $a \prec b$ gilt $a = a \cap b$ und umgekehrt.*

Satz 12. *Mit $a \succ b$ gilt $b \prec a$ und umgekehrt.*

Erklärung 6. Eine Aussage von der Form $a \succ b$ oder $a \prec b$ werde eine *Abhängigkeit* [7]) genannt. Zugleich mögen die Elemente a und b als voneinander *abhängig* bezeichnet werden. Insbesondere heiße, je nachdem $a \succ b$ oder $a \prec b$ gilt, a *Oberelement* oder *Unterelement* von b; findet überdies $a \neq b$ statt, so werde a als ein *eigentliches* Oberelement bzw. Unterelement von b bezeichnet [8]).

Daß $a \succ b$ und $b \succ c$ bzw. $a \prec b$ und $b \prec c$ gilt, werde auch durch $a \succ b \succ c$ bzw. $a \prec b \prec c$ ausgedrückt. Gilt $a \neq b$, $b \neq c$ und

---

[6]) Vgl. auch [A. V. I], § 4.

[7]) Dedekind spricht anstatt dessen von einer „Teilbarkeit".

[8]) Wegen Satz 12 sind die beiden folgenden Aussagen gleichwertig: a ist Oberelement von b; b ist Unterelement von a.

außerdem $a \succ b \succ c$ oder $a \prec b \prec c$, so werde b als *zwischen* a und c befindlich bezeichnet.

Schließlich mögen die in Erklärung 2 beschriebenen Spitzen e und f, für die, wie man sofort sieht, bei beliebigem a aus M stets $a \succ e$ und $a \prec f$ gilt, *untere* bzw. *obere* Spitze von M genannt werden. Gelegentlich bezeichnen wir auch e als *unterstes* und f als *oberstes* Element von M.

Anschließend teilen wir einige Sätze über Abhängigkeiten mit, wobei wir, was nach Satz 12 zulässig ist, die Beziehung $\succ$ in den Vordergrund stellen. Auf die einfachen Beweise gehen wir außer bei Satz 17 nicht ein.

Satz 13. *Mit $a \succ b$ und $b \succ c$ gilt $a \succ c$ und, falls $a \neq b$ oder $b \neq c$ ist, $a \neq c$*

Mit $a \succ b$ und $b \succ a$ gilt $a = b$.

Für jedes a gilt $a \succ a$.

Satz 14. *Für zwei beliebige Elemente a und b gilt*

$$a \cup b \succ a \succ a \cap b, \quad a \cup b \succ b \succ a \cap b$$

und also auch

$$a \cup b \succ a \cap b.$$

Mit $a_1 \succ b_1$ und $a_2 \succ b_2$ gilt

$$a_1 \cup a_2 \succ b_1 \cup b_2, \quad a_1 \cap a_2 \succ b_1 \cap b_2.$$

Folgerung. Mit $a \succ b$ und $a \succ c$ gilt $a \succ b \cup c$.

Mit $a \prec b$ und $a \prec c$ gilt $a \prec b \cap c$.

Satz 15. *Für drei beliebige Elemente a, b und c gilt*

$$\begin{aligned}
(a \cup b) \cap (a \cup c) &\succ a \cup [(a \cup b) \cap c],\\
a \cup [(a \cup b) \cap c] &\succ a \cup (b \cap c),\\
a \cup (b \cap c) &\succ a \cap (b \cup c),\\
a \cap (b \cup c) &\succ a \cap [(a \cap b) \cup c],\\
a \cap [(a \cap b) \cup c] &\succ (a \cap b) \cup (a \cap c).
\end{aligned}$$

Im Hinblick auf das in manchen Verbänden geltende *distributive* Gesetz merken wir die nachstehende *Folgerung* an:

Für drei beliebige Elemente a, b und c gilt

$$\begin{aligned}
(a \cup b) \cap (a \cup c) &\succ a \cup (b \cap c),\\
a \cap (b \cup c) &\succ (a \cap b) \cup (a \cap c).
\end{aligned}$$

Satz 16. *Für drei beliebige Elemente a, b und c gilt*

$$\begin{aligned}
(a \cup b) \cap (a \cup c) \cap (b \cup c) &\succ [(a \cap b) \cup c] \cap (a \cup b),\\
[(a \cap b) \cup c] \cap (a \cup b) &\succ [(a \cup b) \cap c] \cup (a \cap b),\\
[(a \cup b) \cap c] \cup (a \cap b) &\succ (a \cap b) \cup (a \cap c) \cup (b \cap c).
\end{aligned}$$

Von Dedekind[9]) rührt die folgende Fassung der zweiten in Satz 16 aufgestellten Abhängigkeit her: Ist $g \succ h$ und c beliebig, so gilt

$$(h \smile c) \frown g \succ (g \frown c) \smile h.$$

Satz 17. *Aus*

$$x = a \smile y, \quad y = b \frown x, \quad a \succ b$$

folgt

$$x = a, \quad y = b.$$

Aus

$$x = a \smile y, \quad y = b \frown x, \quad a \prec b$$

folgt

$$x = y.$$

Beweis. α) Wegen $x \succ a \succ b$ gilt $b = b \frown x$, woraus $y = b$ und weiter $x = a$ folgt.

β) Wegen $b \succ a$ und $b \succ y$ gilt $b \succ a \smile y$, also $b \succ x$, $x = b \frown x$, $x = y$.

§ 3.

Beispiele von Verbänden.

Im folgenden sollen einige der in den früheren Arbeiten betrachteten Beispiele verallgemeinert werden, wobei bemerkt werde, daß diesen Realisierungen ganz unabhängig davon, daß sie das in den vorhergehenden Paragraphen errichtete Gebäude als bewohnbar erweisen und mit Leben erfüllen, eine selbständige Bedeutung zukommt. Den Ausgang unserer Überlegungen bilden die folgenden Begriffe:

α) Die *Vereinigung* $V(a, b, \ldots)$ und der *Durchschnitt* $D(a, b, \ldots)$ der *Mengen* $a, b, \ldots$;

β) Das *kleinste gemeinschaftliche Vielfache* $v(a, b, \ldots)$ und der *größte gemeinschaftliche Teiler* $t(a, b, \ldots)$ der *Größen* $a, b, \ldots$. Dabei seien unter „Größen" entweder natürliche Zahlen oder Ideale aus einem Zahlkörper oder Polynome in beliebig vielen Veränderlichen verstanden.

Diese Begriffe finden Verwendung bei der Bildung der nachstehend beschriebenen Mengen.

Erklärung 7α. Eine Menge M von Mengen heiße eine *V-Menge* bzw. *D-Menge*, wenn mit je zwei Mengen a und b aus M auch $V(a, b)$ bzw. $D(a, b)$ Element von M ist. Eine Menge von Mengen, die sowohl eine V-Menge als auch eine D-Menge ist, heiße eine *(V, D)-Menge*.

Erklärung 7β. Eine Menge M von Größen heiße eine *v-Menge* bzw. *t-Menge*, wenn mit je zwei Größen a und b aus M auch $v(a, b)$ bzw. $t(a, b)$ Element von M ist. Eine Menge von Größen, die sowohl eine v-Menge als auch eine t-Menge ist, heiße eine *(v, t)-Menge*.

---

[9]) Dedekind [W. XXX], S. 239.

Diese Mengen lassen sich als Sonderfälle allgemeinerer Mengen auffassen, wie anschließend gezeigt werden soll.

Erklärung 8α. Eine Menge M von Mengen heiße eine *O-Menge*, wenn mit je zwei Mengen a und b aus M mindestens eine gemeinsame Obermenge $O(a, b)$ von a und b Element von M ist [10]). Ist M eine O-Menge, sind a und b Elemente von M und sind

$$O_1(a, b),\ O_2(a, b),\ \ldots$$

die der Menge M als Elemente angehörenden gemeinsamen Obermengen von a und b, so werde der Durchschnitt $D(O_1, O_2, \ldots)$ dieser Obermengen mit $V_M(a, b)$ bezeichnet [11]). Eine O-Menge M heiße eine *V_M-Menge*, wenn mit je zwei Mengen a und b aus M auch $V_M(a, b)$ Element von M ist.

Eine Menge M von Mengen heiße eine *U-Menge*, wenn mit je zwei Mengen a und b aus M mindestens eine gemeinsame Untermenge $U(a, b)$ von a und b Element von M ist. Ist M eine U-Menge, sind a und b Elemente von M und sind

$$U_1(a, b),\ U_2(a, b),\ \ldots$$

die der Menge M als Elemente angehörenden gemeinsamen Untermengen von a und b, so werde die Vereinigung $V(U_1, U_2, \ldots)$ dieser Untermengen mit $D_M(a, b)$ bezeichnet. Eine U-Menge M heiße eine *D_M-Menge*, wenn mit je zwei Mengen a und b aus M auch $D_M(a, b)$ Element von M ist.

Eine Menge M von Mengen, die sowohl eine V_M-Menge als auch eine D_M-Menge ist, heiße eine *(V_M, D_M)-Menge*.

Satz 18α. *Hinreichend und notwendig dafür, daß eine endliche D-Menge M eine V_M-Menge ist, ist der Umstand, daß M eine O-Menge ist. Hinreichend und notwendig dafür, daß eine endliche V-Menge M eine D_M-Menge ist, ist der Umstand, daß M eine U-Menge ist.*

Satz 19α. *Hinreichend, aber nicht notwendig dafür, daß eine endliche O-Menge M eine V_M-Menge ist, ist der Umstand, daß M eine D-Menge ist. Hinreichend, aber nicht notwendig dafür, daß eine endliche U-Menge M eine D_M-Menge ist, ist der Umstand, daß M eine V-Menge ist.*

Beweis. Es genügt, den ersten Teil der Behauptung zu beweisen. Daß die angegebene Bedingung hinreichend ist, ist klar; daß sie nicht notwendig ist, zeigt das folgende Beispiel. Es seien

$$a_0, a_1, \ldots, a_n \tag{1}$$

nichtleere Punktmengen derart, daß die Mengen

$$a_1, \ldots, a_n$$

[10]) Eine O-Menge ist z. B. die Menge M des Satzes 9.

[11]) Dabei kommt es zunächst nicht darauf an, ob $D(O_1, O_2, \ldots)$ Element von M ist oder nicht.

Untermengen von a_0 und zu je zweien elementfremd sind. Dann ist die Menge M, die die Punktmengen (1) zu Elementen hat, sowohl eine O-Menge als auch eine V_M-Menge, aber für $n \geqq 2$ keine D-Menge.

Satz 20α. *Für $n \leqq 5$ ist jede Menge M, die n Mengen zu Elementen hat und die zugleich eine O-Menge und eine U-Menge ist, eine (V_M, D_M)-Menge.*

Der einfache Beweis werde übergangen. Daß bereits für $n = 6$ die Verhältnisse anders liegen, zeigt das folgende Beispiel. Es seien $p_1, \ldots, p_5$ verschiedene Punkte. Elemente von M seien die sechs Punktmengen

$$\begin{gathered}(p_1),\\ (p_1, p_2), \quad (p_1, p_3),\\ (p_1, p_2, p_3, p_4), \quad (p_1, p_2, p_3, p_5),\\ (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5).\end{gathered}$$

Ersichtlich ist M sowohl eine O-Menge als auch eine U-Menge. Für

$$a = (p_1, p_2), \quad b = (p_1, p_3)$$

ist aber nicht $V_M(a, b)$ Element von M, während für

$$a = (p_1, p_2, p_3, p_4), \quad b = (p_1, p_2, p_3, p_5)$$

nicht $D_M(a, b)$ Element von M ist.

Anmerkung. Der Begriff der (V_M, D_M)-Menge ist nicht nur mengentheoretisch, sondern auch praktisch wegen der überaus vielfachen Anwendungsmöglichkeiten von Bedeutung. Insbesondere begegnet man dem Sonderfall der (V_M, D_M)-Mengen auf Schritt und Tritt in der Algebra; als Elemente treten dabei Gruppen, Körper, Moduln und andere Zahlenbereiche auf. Ebenfalls gibt die Geometrie Veranlassung zur Bildung derartiger Mengen. Schließlich können auch Verbände Elemente von (V_M, D_M)-Mengen sein.

Satz 21α. *Es sei M eine (V_M, D_M)-Menge. Dann kann M als ein Verband aufgefaßt werden, insofern nämlich $a \cup b$ mit $V_M(a, b)$ und $a \cap b$ mit $D_M(a, b)$ identifiziert werden kann*[12]. *Bei dieser Interpretation gibt $a \succ b$ an, daß a Obermenge von b ist.*

In ganz entsprechender Weise lassen sich die in Erklärung 7β beschriebenen Mengen verallgemeinern.

Erklärung 8β. Eine Menge M von Größen heiße eine *o-Menge*, wenn mit je zwei Größen a und b aus M mindestens ein gemeinschaft-

---

[12]) Natürlich kann $a \cup b$ auch mit $D_M(a, b)$ und $a \cap b$ mit $V_M(a, b)$ identifiziert werden.

liches Vielfaches $o(a, b)$ von a und b Element von M ist. Ist M eine o-Menge, sind a und b Elemente von M und sind

$$o_1(a, b), \quad o_2(a, b), \ \ldots$$

die der Menge M als Elemente angehörenden gemeinschaftlichen Vielfachen von a und b, so werde der größte gemeinschaftliche Teiler $t(o_1, o_2, \ldots)$ dieser Vielfachen mit $v_M(a, b)$ bezeichnet. Eine o-Menge M heiße eine *v_M-Menge*, wenn mit je zwei Größen a und b aus M auch $v_M(a, b)$ Element von M ist.

Eine Menge M von Größen heiße eine *u-Menge*, wenn mit je zwei Größen a und b aus M mindestens ein gemeinschaftlicher Teiler $u(a, b)$ von a und b Element von M ist. Ist M eine u-Menge, sind a und b Elemente von M und sind

$$u_1(a, b), \quad u_2(a, b), \ \ldots$$

die der Menge M als Elemente angehörenden gemeinschaftlichen Teiler von a und b, so werde das kleinste gemeinschaftliche Vielfache $v(u_1, u_2, \ldots)$ dieser Teiler mit $t_M(a, b)$ bezeichnet. Eine u-Menge M heiße eine *t_M-Menge*, wenn mit je zwei Größen a und b aus M auch $t_M(a, b)$ Element von M ist.

Eine Menge M von Größen, die sowohl eine v_M-Menge als auch eine t_M-Menge ist, heiße eine *(v_M, t_M)-Menge.*

Von der Wiedergabe der den Sätzen 18α bis 21α entsprechenden β-Sätze werde abgesehen.

Zum Schluß noch eine Bemerkung. Während es sich bei den durch

$$V(a, b), \quad D(a, b); \qquad v(a, b), \quad t(a, b)$$

bezeichneten Gebilden um *absolute* Setzungen handelt, und zwar absolut in dem Sinne, daß dieselben allein durch a und b bestimmt werden, stellen die durch

$$V_M(a, b), \quad D_M(a, b); \qquad v_M(a, b), \quad t_M(a, b)$$

symbolisierten Verallgemeinerungen *relative* Setzungen dar, insofern nämlich bei der Bestimmung derselben nicht nur die Elemente a und b mitsprechen, sondern auch die Menge M als Ganzes wirksam ist[13]).

§ 4.

Lineare Verbände. Nachbarelemente.

Wir setzen nunmehr die in § 2 begonnenen Untersuchungen fort und bringen zunächst, um die in der Überschrift angezeigte Begriffsbildung

---

[13]) Unter den Begriff der relativen Vereinigung fällt z. B. das „Kompositum" zweier Verbände oder Körper. Vgl. auch die Anmerkung im Anschluß an Satz 20α und [A. V. II], S. 119.

vorzubereiten; einige Sätze, bei denen die Unterscheidung der Elemente in abhängige und unabhängige eine Rolle spielt.

Satz 22. *Sind a, b und c Elemente eines Verbandes M und gilt*

$$a \neq c, \quad b \neq c, \quad a \cup b = c,$$

so sind a und b voneinander unabhängig. Dasselbe ist der Fall, wenn

$$a \neq c, \quad b \neq c, \quad a \cap b = c$$

gilt.

Beweis. Der erste Teil der Behauptung ergibt sich folgendermaßen. Wären a und b voneinander abhängig, so fände entweder $a \cup b = a$ oder $a \cup b = b$ statt. Beides widerspricht aber der Voraussetzung. Ähnlich beweist man den zweiten Teil.

Satz 23. *Sind a und b zwei nicht notwendigerweise verschiedene Elemente eines Verbandes M, so bilden die Elemente*

$$a, b, \quad a \cup b, \quad a \cap b$$

einen Unterverband von M, der dann und nur dann von der vierten Ordnung ist, wenn a und b voneinander unabhängig sind.

Anmerkung. Hat man zu prüfen, ob eine Untermenge einer einen Verband bildenden Menge selbst ein Verband ist, so empfiehlt es sich, auf die zwischen den Elementen bestehenden Abhängigkeiten zu achten, da bei $a \succ b$ die Elemente $a \cup b$ und $a \cap b$ mit den Elementen a und b übereinstimmen und also der zu prüfenden Menge angehören, wenn a und b derselben angehören.

Satz 24. *Sind a, b und c Elemente eines Verbandes M und gilt*

$$a \neq c, \quad b \neq c, \quad a \cup b = c,$$

sind ferner x, y Elemente aus M, die den Bedingungen

$$c \succ x \succ a, \quad c \neq x,$$
$$c \succ y \succ b, \quad c \neq y$$

genügen, so gilt $x \cup y = c$, und die Elemente x und y sind voneinander unabhängig, insbesondere also voneinander verschieden.

Die Formulierung des dualen Gegenstückes bleibe dem Leser überlassen.

Beweis. Es ist

$$c \succ x \cup y \succ a \cup b,$$

also

$$x \cup y = c.$$

Daß x und y voneinander unabhängig sind, ergibt sich nach Satz 22.

Erklärung 9. Ein Verband M heiße ein *linearer* Verband ($\mathfrak{L}$-Verband), wenn die Elemente von M nach der Beziehung $\succ$ oder, was damit gleichwertig ist, nach der Beziehung $\prec$ linear geordnet werden

können. Die Elemente eines $\mathfrak{L}$-Verbandes mögen als die *Glieder* desselben bezeichnet werden; insbesondere mögen etwa vorhandene Spitzen *Endglieder* genannt werden. Ein $\mathfrak{L}$-Verband mit ν Spitzen ($\nu = 0, 1, 2$) heiße *ν-fach begrenzt*. Daß M ein $\mathfrak{L}$-Verband mit den Spitzen a und b ist, werde auch durch die Wendung ausgedrückt: Der $\mathfrak{L}$-Verband M verbindet a mit b.

Satz 25. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Verband M ein $\mathfrak{L}$-Verband ist, besteht darin, daß die Elemente von M zu je zweien voneinander abhängig sind.*

Satz 26. *Ist M ein $\mathfrak{L}$-Verband, so ist auch jede Teilmenge von M ein $\mathfrak{L}$-Verband.*

Satz 27. *Jeder Verband erster, zweiter und dritter Ordnung ist ein $\mathfrak{L}$-Verband.*

Satz 28. *Ein Verband von einer höheren als der dritten Ordnung ist dann und nur dann ein $\mathfrak{L}$-Verband, wenn alle Unterverbände vierter Ordnung $\mathfrak{L}$-Verbände sind.*

Satz 29. *Sind a, b und c Elemente eines Verbandes M und gilt*

$$a \neq c, \quad b \neq c, \quad a \smile b = c,$$

ist ferner M_a ein a mit c verbindender linearer Unterverband von M und M_b ein b mit c verbindender linearer Unterverband von M, so ist jedes von c verschiedene Element von M_a unabhängig von jedem von c verschiedenen Element von M_b, insbesondere haben also M_a und M_b kein Element außer c gemeinsam.

Die Formulierung des dualen Gegenstückes bleibe dem Leser überlassen.

Beweis: Satz 24.

Neben den in § 3 beschriebenen konkreten Verbänden gibt es für $\mathfrak{L}$-Verbände noch eine weitere sehr allgemeine Realisierungsmöglichkeit; es gilt nämlich folgendes:

Satz 30. *Jede Menge, deren Elemente vermöge einer Beziehung R linear geordnet werden können, kann als ein $\mathfrak{L}$-Verband in bezug auf die dadurch erklärten Verknüpfungen $\smile$ und $\frown$ angesehen werden, daß, wenn $a R b$ stattfindet, $a \smile b = b \smile a = a$ und $a \frown b = b \frown a = b$ gesetzt wird*[14]).

Insbesondere kann also jede wohlgeordnete Menge — in der Algebra kommen als wohlgeordnete Mengen z. B. die Körpertürme in Frage — als ein $\mathfrak{L}$-Verband aufgefaßt werden.

Erklärung 10. Zwei verschiedene, aber voneinander abhängige Elemente a und b eines Verbandes M mögen als *Nachbarn* in M be-

---

[14]) Gleichbedeutend mit dieser Festsetzung ist die folgende: Mit $a R b$ finde $a \succ b$, $b \prec a$ statt.

zeichnet werden, wenn es kein Element in M gibt, das sich zwischen a und b befindet[15]). Insbesondere heiße, je nachdem a Oberelement oder Unterelement von b ist, a oberer oder unterer Nachbar[16]) von b.

Satz 31. *Es seien a, b und c Elemente eines Verbandes M; es sei $b \neq c$. Ist dann a oberer Nachbar von b und c in M, so gilt $a = b \cup c$; ist dagegen a unterer Nachbar von b und c in M, so gilt $a = b \cap c$.*

Beweis. Es genügt, den ersten Teil der Behauptung zu beweisen. Aus der Voraussetzung folgt

$$a \succ b \cup c \succ b, \quad a \succ b \cup c \succ c.$$

Wäre nun $a \neq b \cup c$, so müßte

$$b \cup c = b, \quad b \cup c = c$$

und somit gegen die Voraussetzung $b = c$ sein.

Satz 32. *Es seien a, b und c Elemente eines Verbandes M; es sei $b \neq c$. Ist dann a oberer Nachbar von b und c in M, so sind b und c voneinander unabhängig; dasselbe ist der Fall, wenn a unterer Nachbar von b und c in M ist.*

Beweis: Satz 31 und 22.

Satz 33. *Sind a und b Elemente eines endlichen Verbandes M, gilt $a \succ b$ und $a \neq b$, so gibt es in M mindestens einen unteren Nachbarn von a und mindestens einen oberen Nachbarn von b.*

Der einfache Beweis bleibe dem Leser überlassen. Wir bemerken nur, daß die Verhältnisse bei unendlichen Verbänden anders liegen; es gibt unendliche Verbände, für die die Behauptung des Satzes 33 zutrifft, und auch solche, für die das nicht der Fall ist.

Erklärung 11. Ein Verband M heiße *längenendlich*, wenn jeder zweifach begrenzte lineare Unterverband von M endlich ist.

Offenbar ist jeder endliche Verband auch längenendlich.

§ 5.

Ein Beispiel aus der Geometrie.

In § 3 und § 4, Satz 30 der vorliegenden Arbeit haben wir einige konkrete Verbände angegeben. Im folgenden soll ein weiteres den Verbandsbegriff realisierendes Modell und zwar ein solches aus dem Bereich der Geometrie beschrieben werden[17]).

[15]) Der Begriff der Nachbarelemente geht auf Dedekind zurück; vgl. Dedekind [W. XXX], S. 252 ff. und Birkhoff [1], S. 445.

[16]) Wegen Satz 12 sind die beiden folgenden Aussagen gleichwertig: a ist oberer Nachbar von b; b ist unterer Nachbar von a.

[17]) Wegen einer anderen auf dem Boden der Geometrie erwachsenen Realisierung vgl. [Verb. 1], S. 237.

Erklärung 12. Es sei E eine gewöhnliche Ebene und γ eine Gerade[18]) in E. Nur aus praktischen Gründen werde E vertikal und γ horizontal angenommen. Es sei S ein Komplex von Strecken in E derart, daß keine dieser Strecken parallel zu γ ist. Es sei $[S]$ der Komplex der Punkte, die Endpunkte von Strecken aus S sind[19]). S heiße *zusammenhängend*, wenn jeder Punkt aus $[S]$ mit jedem weiteren Punkt aus $[S]$ durch einen Streckenzug aus S verbunden ist. Da der eine Endpunkt einer jeden Strecke aus S stets oberhalb und der andere stets unterhalb einer jeden zu γ parallelen, die Strecke zwischen den Endpunkten schneidenden Geraden liegt, kann der erste Endpunkt als der obere und der andere als der untere bezeichnet werden. Eine Menge

$$a_1, \ldots, a_m \qquad (m \geqq 2) \tag{2}$$

von Punkten aus $[S]$ von der Beschaffenheit, daß je zwei in (2) aufeinander folgende Punkte Endpunkte einer Strecke aus S sind, heiße eine *Punktkette* in $[S]$, wenn überdies für jedes μ aus der Reihe $1, \ldots, m-1$ entweder immer a_μ oberer und somit $a_{\mu+1}$ unterer oder immer a_μ unterer und somit $a_{\mu+1}$ oberer Endpunkt der Strecke $a_\mu a_{\mu+1}$ ist. a_1 und a_m mögen als die Endpunkte der Kette (2) bezeichnet werden; und zwar heiße a_1 oberer oder unterer und a_m unterer oder oberer Endpunkt, je nachdem der erste oder zweite Fall vorliegt. Daß k eine Punktkette mit den Endpunkten a_1 und a_m ist, werde auch durch die Wendung ausgedrückt: Die Punktkette k verbindet a_1 mit a_m. Die einfachsten Punktketten sind hiernach die aus den Endpunkten einer Strecke gebildeten Paare. Wir wollen (2) aber auch für den Fall $m = 1$ eine Kette nennen. Ein Punkt a aus $[S]$ heiße *oberhalb* bzw. *unterhalb* eines Punktes b aus $[S]$ gelegen, wenn es eine a mit b verbindende Punktkette in $[S]$ gibt, deren oberer bzw. unterer Endpunkt a ist[20]).

Erklärung 13. Ein zusammenhängender Streckenkomplex S heiße ein *Netz*, wenn die folgenden *Bedingungen* erfüllt sind:

(N) I, 1. Zu je zwei Punkten a und b aus $[S]$ gibt es mindestens einen Punkt x aus $[S]$, der sowohl oberhalb von a als auch von b liegt.

(N) I, 2. Zu je zwei Punkten a und b aus $[S]$ gibt es mindestens einen Punkt y aus $[S]$, der sowohl unterhalb von a als auch von b liegt.

---

[18]) Ohne daß wir hier näher darauf einzugehen beabsichtigen, werde bemerkt, daß unter E auch der gewöhnliche Raum und unter γ eine Ebene in E verstanden werden kann.

[19]) Es ist möglich, daß dieselbe Punktmenge $[S]$ von verschiedenen Streckenkomplexen erzeugt wird.

[20]) Falls a und b identisch sind, kann a nach Belieben als oberhalb oder unterhalb von b gelegen bezeichnet werden.

(N) II, 1. Für je zwei Punkte a und b aus $[S]$ enthält die Menge der Punkte

(3′) $$x_1, x_2, \ldots,$$

die sowohl oberhalb von a als auch von b liegen, einen Punkt — es sei dies x_1 — derart, daß alle übrigen Punkte von (3′) oberhalb von x_1 liegen.

(N) II, 2. Für je zwei Punkte a und b aus $[S]$ enthält die Menge der Punkte

(3″) $$y_1, y_2, \ldots,$$

die sowohl unterhalb von a als auch von b liegen, einen Punkt — es sei dies y_1 — derart, daß alle übrigen Punkte von (3″) unterhalb von y_1 liegen.

Satz 34. *Ist S ein Netz, so kann $[S]$ als ein Verband aufgefaßt werden, insofern $a \cup b$ als der in* (N) II, 1 *beschriebene Punkt x_1 und $a \cap b$ als der in* (N) II, 2 *beschriebene Punkt y_1 gedeutet werden kann.*

Beweis. Daß bei dieser Deutung die Verbandsaxiome I, II, IV und V in Kraft sind, ist sofort ersichtlich. Beispielsweise ist V gültig, weil bei unserer Interpretation $a \cup b = a$ bzw. $a \cap b = a$ dann und nur dann stattfindet, wenn a oberer bzw. unterer Endpunkt einer a mit b verbindenden Punktkette ist. Aber auch das Verbandsaxiom III ist in Kraft, wie anschließend festgestellt werden soll. Wegen der Gültigkeit des Dualitätsprinzipes dürfen wir uns dabei darauf beschränken, die Gleichung

$$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c),$$

d. h. die erste Hälfte von III als richtig nachzuweisen. Setzen wir zur Abkürzung

(4) $$a \cup b = r,$$

(5) $$r \cup c = u,$$

(6) $$b \cup c = s.$$

(7) $$a \cup s = v,$$

(8) $$r \cup s = z,$$

so ist zu zeigen, daß $u = v$ stattfindet.

α) Wegen (5) liegt u oberhalb r; wegen (4) liegt r oberhalb b; also liegt u oberhalb b. Aus dem Umstand, daß u oberhalb b und c liegt, folgt nach (6) und (N) II, 1, daß u oberhalb s liegt. Aus dem Umstand, daß u oberhalb r und s liegt, folgt nach (8) und (N) II, 1, daß u oberhalb z liegt.

β) Wegen (8) liegt z oberhalb s; wegen (6) liegt s oberhalb c; also liegt z oberhalb c. Aus dem Umstand, daß z oberhalb r und c liegt, folgt nach (5) und (N) II, 1, daß z oberhalb u liegt.

Auf Grund der Ergebnisse von α) und β) ist $z = u$. Ähnlich ergibt sich, daß auch $z = v$ ist, woraus die Behauptung folgt.

Bei der damit als zulässig erkannten Interpretation sind zwei Punkte a und b aus $[S]$ dann und nur dann benachbarte Elemente im Sinn der Verbandstheorie, wenn erstens a und b Endpunkte einer Strecke aus S sind und es zweitens keine weitere a mit b verbindende Punktkette in $[S]$ gibt. Die an zweiter Stelle genannte Forderung ist der Anlaß zur Definition einer besonderen Klasse von Netzen.

Erklärung 14. Ein Netz S heiße *einfach*, wenn es, falls a und b Endpunkte einer Strecke aus S sind, außer der Punktkette (a, b) keine weitere a mit b verbindende Punktkette in $[S]$ gibt.

Man zeigt leicht, daß die neue Bedingung mit den in Erklärung 13 angegebenen Bedingungen verträglich ist.

Nunmehr sind wir in der Lage, den Satz 34, wonach jedes Netz als ein Verband aufgefaßt werden kann, in gewisser Weise umzukehren; jedem *endlichen Verband* kann man nämlich ein *einfaches Netz* zuordnen und zwar gemäß folgender *Vorschrift*: Man deute, wenn M ein endlicher Verband und a ein oberer Nachbar von b in M ist, a als oberen und b als unteren Endpunkt einer Strecke in E. Dann ergibt sich — wir wollen auf den Nachweis nicht weiter eingehen — daß der auf diese Weise hergestellte Streckenkomplex S ein einfaches Netz und $[S]$ isomorph mit M ist.

Auf Grund des in den vorhergehenden Ausführungen entwickelten Übertragungsprinzipes können die verbandstheoretischen Untersuchungen, die naturgemäß recht abstrakt sind, für endliche Verbände in das einer anschaulicheren Darstellung zugänglichere Gebiet der Geometrie verlegt werden. Um ein Beispiel herauszugreifen, geben wir im folgenden (Fig. 1 bis 19) einen Überblick über die Typen endlicher Verbände, deren Ordnung nicht größer als 6 ist[21]). Der besseren Übersichtlichkeit wegen

n	t_n	τ_n	Fig.
2	1	1	1
3	1	1	2
4	2	2	3—4
5	5	4	5—8
6	15	11	9—19

[21]) Im Fall $n = 1$, der nicht weiter berücksichtigt worden ist, reduziert sich das Netz auf einen Punkt.

fügen wir eine Tabelle der Werte von t_n bei, unter t_n die Anzahl der *möglichen* Typen der Ordnung n verstanden. Um Raum zu sparen, ist von zwei zueinander *symmetrischen* Verbänden nur das Netz des einen


Fig. 1.


Fig. 2.


Fig. 3.


Fig. 4.


Fig. 5.


Fig. 6.


Fig. 7.


Fig. 8.


Fig. 9.


Fig. 10.


Fig. 11.


Fig. 12.


Fig. 13.


Fig. 14.


Fig. 15.


Fig. 16.


Fig. 17.

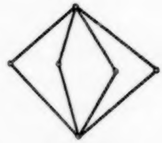


Fig. 18.

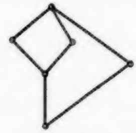


Fig. 19.

wiedergegeben, da daraus das Netz des andern durch Umklappen um eine wagerechte Achse erhalten werden kann. τ_n gebe die Anzahl der *dargestellten* Typen der Ordnung n an.

Wie bereits erwähnt, kann man die Netze nicht nur in der Ebene, sondern auch im Raum darstellen; der letzteren Art der Veranschaulichung wird man bei größeren Werten von n den Vorzug geben. Schließlich machen wir noch darauf aufmerksam, daß eine Veranschaulichung der verschiedenen Verbandstypen auch durch (V_M, D_M)-Mengen und in beschränktem Maß auch durch (v_M, t_M)-Mengen möglich ist, wie daraus hervorgeht, daß ähnlich wie der Satz 34 auch die Sätze 21 α und 21 β in § 3 der vorliegenden Arbeit umgekehrt werden können.

§ 6.

Der Spaltungscharakter der Elemente. Ein Satz über Unterverbände $(n-1)$-ter Ordnung.

Erklärung 15. Ein Element a eines Verbandes M heiße *s-fach nach unten* bzw. *oben gespalten* in M, wenn es mindestens einmal s, aber niemals $s+1$ zu je zweien voneinander unabhängige Elemente

$$(9) \qquad x, y, \ldots$$

aus M gibt derart, daß für je zwei verschiedene Elemente x und y aus (9)

$$x \cup y = a \quad \text{bzw.} \quad x \cap y = a$$

gilt.

Diese Erklärung hat zunächst nur einen Sinn für $s \geqq 2$. Wir ergänzen sie durch eine die Fälle $s = 0$ und $s = 1$ umfassende Zusatzerklärung:

Ein Element a heiße *nullfach nach unten* bzw. *oben gespalten* in M, wenn es in M kein von a verschiedenes Element x gibt, so daß $a \succ x$ bzw. $a \prec x$ gilt.

Ein Element a heiße *einfach nach unten* bzw. *oben gespalten* in M, wenn es in M mindestens ein von a verschiedenes Element x gibt, so daß $a \succ x$ bzw. $a \prec x$ stattfindet, aber kein Paar voneinander unabhängiger Elemente x und y vorhanden ist, so daß

$$x \cup y = a \quad \text{bzw.} \quad x \cap y = a$$

gilt.

Ein Element, das sowohl einfach nach unten als nach oben gespalten ist, werde kurz als *einfach* bezeichnet.

Ersichtlich ist ein Element dann und nur dann nullfach nach unten bzw. oben gespalten in M, wenn es untere bzw. obere Spitze von M ist.

Satz 35. *Ist M ein längenendlicher Verband, so ist ein Element a aus M dann und nur dann s-fach nach unten bzw. oben gespalten in M, wenn a genau s untere bzw. obere Nachbarn in M besitzt.*

Satz 36. *Es sei M ein Verband n-ter Ordnung; die Elemente von M seien mit $a_1, \ldots, a_n$ bezeichnet. Das Element a_ν sei δ_ν-fach nach unten*

und ε_ν-fach nach oben gespalten in M. Die Anzahl der in M vorhandenen Nachbarnpaare sei $\mathfrak{r}$. Dann gilt

$$\sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu = \mathfrak{r}.$$

Satz 37. *Es sei M ein Verband n-ter Ordnung. Unter $\mathfrak{U}(\mu)$ werde ein Unterverband μ-ter Ordnung von M verstanden. Es bezeichne $M[x]$ diejenige Untermenge von M, die aus allen von x verschiedenen Elementen von M besteht. Dann ist $M[f]$, unter f die obere Spitze von M verstanden, dann und nur dann ein $\mathfrak{U}(n-1)$, wenn f einen einzigen unteren Nachbarn in M hat; entsprechend ist $M[e]$, unter e die untere Spitze von M verstanden, dann und nur dann ein $\mathfrak{U}(n-1)$, wenn e einen einzigen oberen Nachbarn in M hat; schließlich ist $M[a]$, unter a ein inneres d. h. ein von f und e verschiedenes Element von M verstanden, dann und nur dann ein $\mathfrak{U}(n-1)$, wenn a einen einzigen unteren und einen einzigen oberen Nachbarn in M hat, a also ein einfaches Element ist.*

Beweis. Offenbar ist $M[x]$ dann und nur dann ein $\mathfrak{U}(n-1)$, wenn, unter y und z zwei beliebige Elemente aus $M[x]$ verstanden, $y \cup z$ und $y \cap z$ stets von x verschieden sind. Das ist aber, wenn x eines der Elemente f, e und a ist, der Fall. Sind nämlich y und z voneinander abhängig, so sind, wie man sofort sieht, $y \cup z$ und $y \cap z$ von x verschieden. Sind aber y und z voneinander unabhängig, so würde aus

$$x = y \cup z \quad \text{bzw.} \quad x = y \cap z$$

folgen, daß x gegen die Voraussetzung mindestens zweifach nach unten bzw. oben gespalten wäre.

Folgerung. Es sei M ein Verband n-ter Ordnung. Das Element x sei $\delta(x)$-fach nach unten und $\varepsilon(x)$-fach nach oben gespalten in M. Dann ist notwendig und hinreichend dafür, daß M keinen $\mathfrak{U}(n-1)$ besitzt, der Umstand, daß für jedes x mindestens eine der beiden Zahlen $\delta(x)$ und $\varepsilon(x)$ größer als 1 ist.

Satz 38. *Für $2 \leqq n \leqq 7$ enthält jeder Verband n-ter Ordnung mindestens einen Unterverband $(n-1)$-ter Ordnung.*

Beweis. Es sei M ein Verband n-ter Ordnung; es sei $n \geqq 2$. Wir nehmen an, daß M keinen $\mathfrak{U}(n-1)$ besitzt und zeigen, daß aus dieser Annahme $n \geqq 8$ folgt.

Die unteren Nachbarn der oberen Spitze f seien

(10) $$a_1, \ldots, a_\alpha;$$

wegen Satz 37 gilt $\alpha \geqq 2$. Es seien

(11) $$b_1, \ldots, b_\beta$$

diejenigen Elemente aus M, welche die Bedingung erfüllen, unterer Nachbar von mindestens einem der Elemente (10) zu sein. Offenbar gibt

es kein Element, das den Reihen (10) und (11) zugleich angehört. Da jedes der Elemente (10) mindestens zwei untere Nachbarn besitzt, ist $\beta \geqq 2$. Es gilt sogar $\beta \geqq 3$. Wäre nämlich $\beta = 2$, so wäre erstens a_1 oberer Nachbar von b_1 und b_2; zweitens wäre aber auch a_2 oberer Nachbar von b_1 und b_2; nach Satz 31 fände dann

$$a_1 = b_1 \cup b_2, \quad a_2 = b_1 \cup b_2,$$

also $a_1 = a_2$ statt. Unter den Elementen (11) befindet sich nicht die untere Spitze e, was sich folgendermaßen ergibt. Es seien b_1 und b_2 untere Nachbarn von a_1. Wäre nun $b_1 = e$, so könnte wegen

$$a_1 > b_2 > e$$

das Element b_1 nicht Nachbar von a_1 sein. Somit gilt

$$n \geqq 2 + \alpha + \beta \qquad (\alpha \geqq 2, \quad \beta \geqq 3). \tag{12}$$

Genau so beweist man, daß, wenn

$$s_1, \ldots, s_\sigma \tag{13}$$

die oberen Nachbarn von e und

$$r_1, \ldots, r_\varrho \tag{14}$$

diejenigen Elemente aus M sind, deren jedes oberer Nachbar von mindestens einem der Elemente (13) ist,

$$n \geqq 2 + \sigma + \varrho \qquad (\sigma \geqq 2, \quad \varrho \geqq 3) \tag{15}$$

stattfindet.

Sowohl aus (12) als aus (15) folgt $n \geqq 7$. Fände $n = 7$ statt, so müßte einerseits $\alpha = 2$, $\beta = 3$ und $\sigma = 2$, $\varrho = 3$, andererseits $\alpha = \varrho$, $\beta = \sigma$ sein, was unmöglich ist; also gilt $n \geqq 8$.

Anmerkung. Man kann den Satz 38 auch so beweisen, daß man für $n \leqq 7$ die verschiedenen Verbandstypen, etwa in der Netzdarstellung, durchgeht und für jeden Typ das Vorhandensein eines $\mathfrak{U}(n-1)$ nachweist[22]). Der Teil des Satzes 38, der sich auf die Fälle $n = 2, 3, 4, 5$ bezieht, kann übrigens auch leicht direkt bewiesen werden.

Der Satz 38 darf nicht auf $n = 8$ ausgedehnt werden, wie ein Beispiel erkennen läßt. Es seien

$$p_1, \ldots, p_m \qquad (m \geqq 2) \tag{16}$$

verschiedene Primzahlen. Es sei M die folgendermaßen hergestellte Menge. M habe zu Elementen die Zahl 1, die Zahlen (16) und sodann alle diejenigen quadratfreien Zahlen, die vermöge der Primzahlen (16) durch Multiplikation entstehen. Gemäß § 3 ist M ein Verband, wenn $x \cup y$ als $v(x, y)$ und $x \cap y$ als $t(x, y)$ gedeutet wird. M ist von der Ord-

[22]) Umgekehrt läßt sich, worauf Herr P. Bernays aufmerksam macht, mit Hilfe des Satzes 38 auch die *Vollständigkeit* der in den Figuren 1 bis 19 gegebenen Zusammenstellung erkennen.

nung 2^m, und man überzeugt sich leicht, daß, wenn in M ein einziges Element unterdrückt wird, außer für $m = 2$ niemals ein $\mathfrak{U}(2^m - 1)$ übrigbleibt.

Der aus dem obigen Beispiel sich für $m = 3$ ergebende $\mathfrak{V}'(8)$ — der kürzeren Ausdrucksweise wegen nennen wir einen Verband n-ter Ordnung, für den es keinen $\mathfrak{U}(n-1)$ gibt, einen $\mathfrak{V}'(n)$ — besteht aus den Elementen

$$1,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_1p_2,\ p_1p_3,\ p_2p_3,\ p_1p_2p_3;$$

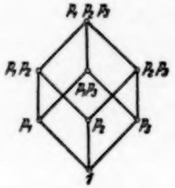


Fig. 20.

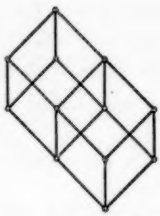


Fig. 21.

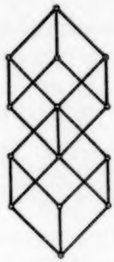


Fig. 22.

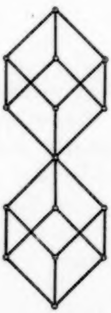


Fig. 23.

Fig. 24.

das zugehörige Netz ist in Fig. 20 dargestellt. Welches der nächstgrößere Wert von n ist, für den ein $\mathfrak{V}'(n)$ vorhanden ist, ist unbekannt. Daß es für jedes n aus der Reihe 12, 14, 15, 16 mindestens einen $\mathfrak{V}'(n)$ gibt, zeigen die durch die Fig. 21 bis 24 veranschaulichten Netze, deren jedes aus zwei Netzen vom Typus der Fig. 20 zusammengesetzt ist[23]).

[23]) Fig. 24 stellt *nicht* den sich aus (16) für $m = 4$ ergebenden $\mathfrak{V}'(16)$ dar.

§ 7.

Ein Satz über Unterverbände fünfter Ordnung.

Wir beginnen mit einem Hilfssatz.

Satz 39. *Ist N ein Unterverband eines Verbandes M und a ein Element aus M derart, daß $a \succ x$ für alle Elemente x aus N stattfindet, so ist auch die aus a und den Elementen von N bestehende Menge ein Unterverband von M. Dasselbe ist der Fall, wenn die obige Bedingung durch $a \prec x$ ersetzt wird.*

Beweis. Aus $a \succ x$ folgt $a \cup x = a$ und $a \cap x = x$.

Nun läßt sich in Ergänzung des Satzes 38 folgendes beweisen:

Satz 40. *Jeder Verband von einer höheren als der k-ten Ordnung enthält für $k \leqq 5$ mindestens einen Unterverband k-ter Ordnung.*

Beweis. Wir wenden uns sofort dem Fall $k = 5$ zu, da die Behauptung für $k < 5$ trivial ist. Es sei M ein Verband n-ter Ordnung; es sei $n > 5$. Wie in Satz 37 werde unter $\mathfrak{U}(\mu)$ ein Unterverband μ-ter Ordnung von M verstanden.

Ist M ein $\mathfrak{L}$-Verband, so ist die Behauptung nach Satz 26 richtig.

Ist M kein $\mathfrak{L}$-Verband, so seien a und b zwei voneinander unabhängige Elemente aus M. Dann bilden, wenn

$$a \cup b = c, \quad a \cap b = d$$

gesetzt wird, die Elemente

$$a, b, c, d \tag{17}$$

nach Satz 23 einen $\mathfrak{U}(4)$. Es soll nun gezeigt werden, daß vermittelst eines von den Elementen (17) verschiedenen Elementes x aus M, das ja sicher vorhanden ist, immer ein $\mathfrak{U}(5)$ hergestellt werden kann. Wir gehen in der Weise vor, daß wir nacheinander die verschiedenen Abhängigkeiten betrachten, die zwischen x und den Elementen (17) stattfinden können.

Ist x unabhängig von c, so stellt die Menge

$$a, b, c, d, c \cup x$$

nach Satz 39 einen $\mathfrak{U}(5)$ dar.

Sind x und c voneinander abhängig, so gilt entweder $x \succ c$ oder $x \prec c$. Gilt $x \succ c$, so stellt die Menge

$$a, b, c, d, x$$

nach Satz 39 einen $\mathfrak{U}(5)$ dar.

Ist x unabhängig von d, so stellt die Menge

$$a, b, c, d, d \cap x$$

nach Satz 39 einen $\mathfrak{U}(5)$ dar.

Sind x und d voneinander abhängig, so gilt entweder $x \prec d$ oder $x \succ d$. Gilt $x \prec d$, so stellt die Menge

$$a,\ b,\ c,\ d,\ x$$

nach Satz 39 einen $\mathfrak{U}(5)$ dar.

Der Satz 40 ist somit bewiesen, wenn die Angabe eines $\mathfrak{U}(5)$ unter der Bedingung

$$c \succ x \succ d \tag{18}$$

gelingt. Dabei unterscheiden wir drei Hauptfälle:

I. x ist abhängig von a.

II. x ist abhängig von b.

III. x ist unabhängig von a und b.

Jeder dieser Hauptfälle führt auf verschiedene Unterfälle, die selbst wieder untergeteilt werden.

I, 1. Es sei $x \succ a$. Dann sind x und b nicht voneinander abhängig. Wäre nämlich $b \succ x$, so wären a und b voneinander abhängig, und wäre $x \succ b$, so würde

$$x \succ a \cup b, \quad x \succ c, \quad x = c$$

folgen; und beides ist unzulässig. Wegen

$$b \cup x = a \cup b \cup x = c \cup x = c$$

bilden die Elemente

$$b,\ x,\ c,\ b \cap x$$

einen $\mathfrak{U}(4)$.

Nun ist $b \cap x \succ b \cap a = d$. Gilt

$$b \cap x \neq d,$$

so stellt die Menge

$$b,\ x,\ c,\ b \cap x,\ d$$

nach Satz 39 einen $\mathfrak{U}(5)$ dar. Gilt dagegen

$$b \cap x = d,$$

so stellt die Menge

$$b,\ x,\ c,\ d,\ a$$

einen $\mathfrak{U}(5)$ dar.

I, 2. Es sei $a \succ x$. Wieder sind x und b nicht voneinander abhängig. Wäre nämlich $x \succ b$, so wären a und b voneinander abhängig, und wäre $b \succ x$, so würde

$$a \cap b \succ x, \quad d \succ x, \quad d = x$$

folgen; und beides ist unzulässig. Wegen

$$b \cap x = a \cap b \cap x = d \cap x = d$$

bilden die Elemente

$$b,\ x,\ d,\ b \cup x$$

einen $\mathfrak{U}(4)$.

Nun ist $c = a \cup b > x \cup b$. Gilt

$$c \neq b \cup x,$$

so stellt die Menge

$$b,\ x,\ d,\ b \cup x,\ c$$

nach Satz 39 einen $\mathfrak{U}(5)$ dar. Gilt dagegen

$$c = b \cup x,$$

so stellt die Menge

$$b,\ x,\ d,\ c,\ a$$

einen $\mathfrak{U}(5)$ dar.

II. Die Fälle $x > b$ und $b > x$ werden ganz entsprechend erledigt; man hat ja nur in I, 1 und I, 2 die Elemente a und b miteinander zu vertauschen.

III. Es ist der aus den Elementen

$$a,\ x,\ a \cup x,\ a \cap x$$

bestehende $\mathfrak{U}(4)$ vorhanden. Wir schließen zunächst wie zu Anfang:

Ist b unabhängig von $a \cup x$, so stellt die Menge

$$a,\ x,\ a \cup x,\ a \cap x,\ a \cup b \cup x$$

nach Satz 39 einen $\mathfrak{U}(5)$ dar.

Sind b und $a \cup x$ voneinander abhängig, so gilt entweder $b > a \cup x$ oder $b < a \cup x$. Das erstere ist unmöglich, weil $b > a$ folgt.

Ist b unabhängig von $a \cap x$, so stellt die Menge

$$a,\ x,\ a \cup x,\ a \cap x,\ a \cap b \cap x$$

nach Satz 39 einen $\mathfrak{U}(5)$ dar.

Sind b und $a \cap x$ voneinander abhängig, so gilt entweder $b < a \cap x$ oder $b > a \cap x$. Das erstere ist unmöglich, weil $b < a$ folgt.

Es darf somit angenommen werden, daß neben (18) auch noch

$$a \cup x > b > a \cap x \tag{19}$$

stattfindet.

Wegen $c > x$, $c > b$ gilt $c > b \cup x$; also stellen für

$$c \neq b \cup x$$

die Elemente

$$b,\ x,\ b \cup x,\ b \cap x,\ c$$

nach Satz 39 einen $\mathfrak{U}(5)$ dar

Wegen $x > d$, $b > d$ gilt $b \cap x > d$; also stellen für

$$b \cap x \neq d$$

die Elemente

$$b,\ x,\ b \cup x,\ b \cap x,\ d$$

nach Satz 39 einen $\mathfrak{U}(5)$ dar.

Neben (18) und (19) darf somit

$$c = b \cup x, \quad d = b \cap x$$

angenommen werden. Wegen $a \cup x > b$ gilt

$$a \cup x = a \cup b \cup x = c \cup x = c;$$

wegen $b > a \cap x$ gilt

$$a \cap x = a \cap b \cap x = d \cap x = d.$$

Also stellen die Elemente

$$b,\ x,\ c,\ d,\ a$$

einen $\mathfrak{U}(5)$ dar.

Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft, und der Satz 40 ist in vollem Umfang bewiesen.

Ergänzend werde folgendes bemerkt. Ob jeder Verband von einer höheren als der sechsten Ordnung auch einen $\mathfrak{U}(6)$ enthält, ist ungewiß. Andererseits enthält aber sicher nicht jeder Verband von einer höheren als der siebenten Ordnung einen $\mathfrak{U}(7)$, wie das im Anschluß an Satz 38 gegebene Beispiel für $m = 3$ zeigt.

Wuppertal-Barmen, im Sommer 1934.

Verzeichnis der Fachausdrücke.

Die Stichworte sind durch gesperrten Druck hervorgehoben; die Wiederholung des Stichwortes ist durch einen waagerechten Strich angedeutet. Die Zahlen verweisen auf die Erklärungen, in denen die Ausdrücke eingeführt werden.

(Eingegangen am 14. 11. 1934.)

On Waring Theorems with Cubic Polynomial Summands.

Von

Loo-keng Hua in Tsing Hua (China) *).

In this paper we attempt to prove the theorem that every large integer is the sum of eight values of the cubic polynomial

$$f(x) = Dx + E\,\frac{x^3 - x}{6},$$

where $(D, E) = 1$. But we have not been able to treat the problem in general. The author's main result is given in theorem 3. The following two theorems are special cases thereof.

Theorem 1. *All large integers are sums of eight values of* $Dx + \frac{x^3 - x}{6}$.

If we let $D = 0$, we have the result obtained by James[1]). The case $D = 1$ has been investigated by the author[2]).

Theorem 2. *All large even integers are sums of eight values of*

$$Dx + \frac{x^3 - x}{3}\ ^{3)}.$$

The method of the following treatment is based upon the ideas of Landau[4]) and James.

Lemma 1. If $(E, 15) = 1$, we have integers l and k such that all large primes $p \equiv l \pmod{k}$ have the properties:

$$(p, 3E) = 1, \quad (p, D) = 1,$$

$$\left(\frac{3E(E - 6D)}{p}\right) = +1, \tag{1}$$

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = -1, \tag{2}$$

and furthermore

$$p \equiv d \pmod{5}$$

where $d = 2, 3$ if $E \equiv D \pmod{5}$, otherwise d arbitrary.

---

*) Research fellow of China foundation for the promotion of Education and Culture.

1) Math. Annalen **109**.

2) Tôhoku Jour. of Math. **41**.

3) The case $D = 1$ was solved in the author's paper in Tôhoku Jour. of Math. **41**.

4) Math. Annalen **66**, or Vorlesungen über Zahlentheorie **2**, S. 29.

Proof. 1. $E > 6D$. From (1) and (2) we have

$$\left(\frac{E(E-6D)}{p}\right)\left(\frac{-1}{p}\right) = -1, \quad \left(\frac{-3}{p}\right) = -1,$$

hence we may always choose an arithmetic series whose primes satisfy these conditions simultaneously.

2. $E < 6D$. Then (1) and (2) become

$$\left(\frac{E(6D-E)}{p}\right) = -1, \quad \left(\frac{-3}{p}\right) = -1.$$

If $q^{2s-1}/E(6D-E)$, but $q^{2s} \nmid E(6D-E)$, where q is a prime $\neq 3, 5$, then the conclusion is evident. If

$$E(6D-E) = A^2, \quad A \text{ integer},$$

then $3/E^2 + A^2$, therefore $3/E$, $3/A$, in contradiction with the hypothesis $(E, 3) = 1$. Since $(3, E) = 1$, we have $3 \nmid E(6D-E)$, hence the only possible case which we have not yet discussed is that

$$E(6D-E) = 5B^2, \quad B \text{ integer}.$$

In this case

$$\left(\frac{E(6D-E)}{p}\right) = \left(\frac{5}{p}\right) = -1,$$

hence p must $\equiv 2, 3 \pmod 5$. But $(E, 5) = 1$, hence $5/6D - E$, i. e.

$$D \equiv E \pmod 5.$$

Lemma 2. If s is a given integer, p having the properties stated in Lemma 1, and $(s, p) = 1$, then there exist numbers t and z such that

$$3Et^2 \equiv E - 6D \pmod p, \tag{3}$$

$$t \equiv r \pmod 5, \tag{4}$$

$$s \equiv 2Dz + \frac{E}{3}(z^3 + 3zt^2 - z) \pmod{p^3} \tag{5}$$

and

$$0 \leqq t < 5p, \quad 5p \leqq z < p^3 + 5p. \tag{6}$$

Proof. Since $\left(\frac{3E(E-6D)}{p}\right) = 1$, there is an integer t_1 which satisfies (3), and as, by the Chinese remainder theorem, there exists an integer t_2 such that

$$t_2 \equiv t_1 \pmod p, \quad t_2 \equiv r \pmod 5, \quad 0 \leqq t < 5p$$

the congruences (3) and (4) are satisfied simultaneously by $t = t_2$. Next, if $(z, p) = 1$, then $2Dz + \frac{E}{3}(z^3 - 3t^2 z - z)$ is also prime to p, since (3) holds. Suppose

$$2Dz + \frac{E}{3}(z^3 + 3zt^2 - z) \equiv 2Du + \frac{E}{3}(u^3 + 3ut^2 - u) \pmod{p^3},$$

$$5p \leqq z < p^3 + 5p, \quad (z, p) = 1,$$

$$5p \leqq u < p^3 + 5p, \quad (u, p) = 1.$$

Then

$$z^3 - u^3 + (z - u)(3Et^2 + 6D - E) \equiv 0 \pmod{p^3},$$

i. e.

$$(z - u)(z^2 + zu + u^2 + 3Et^2 + 6D - E) \equiv 0 \pmod{p^3}.$$

If the second factor is a multiple of p, then

$$z^2 + zu + u^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

$$(2z + u)^2 \equiv -3u^2 \pmod{p}.$$

But as $\left(\frac{-3}{p}\right) = -1$, $(u, p) = 1$, this congruence is impossible. Therefore

$$z \equiv u \pmod{p^3}.$$

The inequalities

$$5p \leqq z < p^3 + 5p, \quad 5p \leqq u < p^3 + 5p$$

imply

$$5p - (p^3 + 5p) < z - u < p^3 + 5p - 5p,$$

$$-p^3 < z - u < p^3$$

and hence $z = u$. We have thus shown that the $\varphi(p^3)$ integers

$$(7) \qquad 2Dz + \frac{E}{3}(z^3 + 3t^2 z - z), \quad 5p \leqq z < p^3 + 5p, \quad (z, p) = 1$$

are prime to p and that no two of them are congruent to each other modulo p. Hence every integer s which is prime to p is congruent to one of the integers (7), therefore the congruence (5) has a solution.

Lemma 3. When s is sufficiently large there exists at least one prime p, having the properties stated in Lemma 1, which does not divide s and which satisfies the condition

$$\frac{271}{6} E p^q \leqq s < \frac{273}{6} E p^q.$$

The proof of this Lemma is quite similar to that of Landau.

Theorem 3. *Let s be a given integer. If one of the sets of values of z and p determined in Lemmas 1, 2 and 3 satisfies the congruence*

$$s - 2Dz - 16Dz^3 \equiv 0 \pmod{E},$$

then s can be represented as the sum of eight values of $Dx + E\frac{x^3 - x}{6}$ where $(E, 15) = 1$.

Proof. d in Lemma 1 and r in Lemma 2 are given by the following tables:

I. $D \equiv 1 \pmod 5$.

E \ r, d \ s	0	1	2	3	4
1	1, 3	2, 3	2, 3	1, 3	2, 2
2	0, 2	0, 1	0, 3	0, 2	0, 1
3	1, 1	1, 3	0, 3	0, 2	1, 1
4	0, 1	0, 2	0, 4	0, 1	0, 2

For instance, when $E \equiv 1 \pmod 5$ and $s \equiv 0 \pmod 5$, we take $r = 1$, $d = 3$.

II. $D \equiv 2 \pmod 5$.

E \ r, d \ s	0	1	2	3	4
1	1, 2	0, 2	0, 2	1, 2	0, 3
2	1, 2	1, 3	2, 3	2, 2	2, 3
3	0, 1	0, 1	0, 2	0, 2	0, 4
4	0, 2	0, 2	0, 1	2, 3	0, 3

III. $D \equiv 3 \pmod 5$.

E \ r, d \ s	0	1	2	3	4
1	0, 2	0, 3	2, 3	2, 2	2, 3
2	0, 4	0, 4	0, 2	0, 2	0, 1
3	1, 2	1, 2	2, 2	2, 3	2, 2
4	1, 1	0, 3	0, 3	0, 1	0, 1

IV. $D \equiv 4 \pmod 5$.

E \ r, d \ s	0	1	2	3	4
1	0, 1	0, 2	1, 2	1, 2	0, 2
2	1, 1	1, 1	0, 1	0, 3	1, 3
3	0, 2	0, 1	0, 2	0, 3	0, 1
4	1, 2	2, 2	2, 2	1, 2	2, 3

V. $D \equiv 0 \pmod 5$.

E \ r, d \ s	0	1	2	3	4
1	1, 2	1, 2	0, 2	0, 3	0, 2
2	1, 1	0, 1	0, 1	0, 2	0, 2
3	1, 2	0, 2	0, 2	0, 1	0, 1
4	1, 1	1, 1	0, 1	0, 2	0, 1

It is worth mentioning that if $D \equiv E \pmod 5$, $d \not\equiv \pm 1$.

We first determine p by Lemmas 1 and 3. By Lemma 2 there exist integers t and z which satisfy the congruences (3), (5) and (6). We have

$$s \equiv 2Dz + \frac{E}{3}(z^3 + 3zt^2 - z) \pmod{p^3}, \tag{9}$$
$$s = 2Dz + \frac{E}{3}(z^3 + 3zt^2 - z) + p^3 M.$$

Write

$$M = 16D + \frac{134}{3}Ep^6 - \frac{8E}{3} + M_1. \tag{10}$$

Since $(E, p) = 1$, and by the assumption of our theorem, we see that M_1 is a multiple of E. Let

$$M_1 = EM_2. \tag{11}$$

From the inequality (8) we obtain

$$\frac{271}{6}Ep^q \leqq s < \frac{273}{6}Ep^q,$$

$$\frac{271}{6}Ep^q - \frac{E}{3}(p^3 + 5p)^3 - (p^3 + 5p)\left(2D - \frac{E}{3} + E(5p)^2\right)$$
$$\leqq s - 2Dz - \frac{E}{3}(z^3 + 3zt^2 - z) < \frac{273}{6}Ep^q.$$

By (10)

$$\frac{271}{6}Ep^q - \frac{E}{3}(p^3 + 5p)^3 - (p^3 + 5p)\left(2D - \frac{E}{3} + E(5p)^2\right) - \frac{134E}{3}p^q$$
$$-\left(16D - \frac{8E}{3}\right)p^3 \leqq M_1 p^3 < \frac{273}{6}Ep^q - \frac{134E}{3}p^q - \left(16D - \frac{8E}{3}\right)p^3.$$

When p is sufficiently large,

$$\frac{271}{6}Ep^q - \frac{E}{3}(p^3 + 5p)^3 - (p^3 + 5p)\left(2D - \frac{E}{3} + E(5p)^2\right) - \frac{134E}{3}p^q$$
$$-\left(16D - \frac{8E}{3}\right)p^3 > 0,$$

since

$$\frac{271}{6}E - \frac{E}{3} - \frac{134}{3}E = \frac{1}{6}E > 0;$$

and

$$\frac{273}{6}Ep^q - \frac{134}{3}Ep^q - \left(16D - \frac{8E}{3}\right)p^3 < Ep^q.$$

Hence

$$0 < M_1 < Ep^6,$$
$$0 < M_2 < p^6. \tag{12}$$

Now we are going to prove that $M_1 \not\equiv 0 \pmod 5$.

I. $D \equiv 1 \pmod 5$.

$E \backslash M_1 \backslash s$	0	1	2	3	4
1	1, 3, 4	1, 2, 3	2, 3, 4	1, 2, 4	2, 3, 4
2	1, 3, 4	1, 3, 4	1, 3, 4	1, 2, 4	1, 2, 4
3	2, 3, 4	2, 3, 4	1, 2, 4	1, 3, 4	1, 2, 3
4	1, 3, 4	1, 3, 4	1, 3, 4	1, 2, 4	1, 2, 4

Here, for example, if $E \equiv 1$, $s \equiv 0 \pmod 5$, for any value of z, M_1 is congruent to one of the values 1, 3, 4.

II. $D \equiv 2 \pmod 5$.

$E \backslash M_1 \backslash s$	0	1	2	3	4
1	1, 3, 4	1, 2, 3	2, 3, 4	1, 2, 4	2, 3, 4
2	2, 3, 4	1, 2, 4	2, 3, 4	1, 3, 4	1, 3, 4
3	1, 2, 3	2, 3, 4	1, 2, 3	2, 3, 4	1, 2, 3
4	1, 2, 3	2, 3, 4	1, 2, 3	2, 3, 4	1, 2, 3

III. $D \equiv 3 \pmod 5$.

$E \backslash M_1 \backslash s$	0	1	2	3	4
1	2, 3, 4	2, 3, 4	1, 2, 4	1, 3, 4	1, 3, 4
2	1, 2, 3	2, 3, 4	1, 2, 3	2, 3, 4	1, 2, 3
3	1, 2, 3	2, 3, 4	1, 2, 4	1, 3, 4	1, 3, 4
4	1, 2, 4	1, 2, 3	2, 3, 4	1, 2, 3	2, 3, 4

IV. $D \equiv 4 \pmod 5$.

$E \backslash M_1 \backslash s$	0	1	2	3	4
1	1, 2, 3	2, 3, 4	1, 2, 4	1, 3, 4	1, 3, 4
2	1, 3, 4	1, 2, 3	2, 3, 4	1, 2, 3	2, 3, 4
3	1, 3, 4	1, 2, 3	2, 3, 4	1, 2, 3	2, 3, 4
4	1, 2, 3	2, 3, 4	1, 2, 4	1, 3, 4	1, 3, 4

V. $D \equiv 0 \pmod 5$.

$E \backslash M_1 \backslash s$	0	1	2	3	4
1	1, 2, 3	2, 3, 4	1, 2, 4	1, 3, 4	1, 3, 4
2	1, 3, 4	1, 2, 3	2, 3, 4	2, 3, 4	2, 3, 4
3	1, 3, 4	1, 2, 3	2, 3, 4	2, 3, 4	2, 3, 4
4	1, 2, 3	2, 3, 4	1, 2, 4	1, 2, 4	1, 3, 4

Hence we obtain $M_1 \not\equiv 0 \pmod 5$ for all cases. Therefore there exist integers A, B and C such that

$$M_1 = A^2 + 2B^2 + 5C^2. \tag{13}$$

Combining equations (9), (10), (11) and (13) we obtain

$$\begin{aligned} s &= 2Dz + \frac{E}{3}(z^3 + 3zt^2 - z) + p^3 M \\ &= f(z+t) + f(z-t) + p^3\left(16D + \frac{134}{3}Ep^6 - \frac{8E}{3}\right) + p^3 M_1 \\ &= f(z+t) + f(z-t) + p^3\left(16D + \frac{134}{3}Ep^6 - \frac{8E}{3}\right) + p^3 E(A^2 + 2B^2 + 5C^2) \\ &= f(z+t) + f(z-t) + f(p^3 + A) + f(p^3 - A) \\ &\qquad + f(2p^3 + B) + f(2p^3 - B) + f(5p^3 + C) + f(5p^3 - C). \end{aligned}$$

From (12) and (13) it follows that $|A|$, $|B|$ and $|C|$ are less than p^3. The inequalities $0 \leqq t < 5p$ and $5p \leqq z < p^3 + 5p$ imply that $z \geqq t$. Hence $z+t$, $z-t$, p^3+A, p^3-A, $2p^3+B$, $2p^3-B$, $5p^3+C$, $5p^3-C$ are positive or zero and thus s is the sum of at most eight values of the cubic function

$$f(x) = Dx + E\frac{x^3 - x}{6}.$$

Proof of Theorem 1. When $E = 1$, the relation of Theorem 3 holds identically.

Proof of Theorem 2. When $E = 2$ and s is even, the relation of Theorem 3 holds identically.

(Eingegangen am 30. 1. 1935.)

Zum Gedächtnis von Walther v. Dyck.

Von

Georg Faber in München.

Am 9. November 1934 starb in dem Münchener Vororte Solln, fast 78 Jahre alt, Walther v. Dyck, dessen Name als eines der Herausgeber neben dem Felix Kleins auf dem Titelblatt von 50 Bänden der Mathematischen Annalen steht (31 – 80 (1888 – 1921)). Für die Bände 31 – 60 hatte er die Geschäftsführung. Auf dem Titelblatt von noch 20 weiteren Bänden (81 – 100 (1921 – 1929)) wird v. Dyck als Mitarbeiter der Redaktion genannt. In der weitverzweigten Lebensarbeit v. Dycks bildet seine Tätigkeit bei den Annalen nur einen verhältnismäßig kleinen Ausschnitt. Als Lehrer der Mathematik an der Technischen Hochschule München, als Rektor dieser Hochschule während der Dauer von 12 Jahren, als Gründungsmitglied, erster Schriftführer und späterer Vorsitzender der Deutschen Mathematikervereinigung, als zweiter Vorstand des Deutschen Museums neben dessen Gründer Oscar v. Miller, als Vorstandsmitglied des Verbandes der Deutschen Hochschulen und der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft und in anderen Ehrenämtern hat er in mannigfacher Weise das wissenschaftliche Leben seiner Zeit beeinflußt. Mit unzähligen bedeutenden Männern des In- und Auslandes, Gelehrten, Künstlern, Industriellen, Staatsmännern und Offizieren, stand er in Verkehr, und alle, die ihn näher kannten, schätzten ihn hoch. Die Wurzeln seines Weltbürgertums lagen in seinem deutschen Wesen und seiner deutschen Gesinnung und die Wurzeln seiner hohen Bildung lagen in der Mathematik.

Er begann seine wissenschaftliche Laufbahn als Schüler und Assistent Felix Kleins an der Technischen Hochschule München. Dann folgte er seinem Lehrer nach Leipzig, wo er sich habilitierte. Seine ersten in den Annalen erschienenen Arbeiten sind von Kleinschem Geist erfüllt und doch selbständige, noch heute anerkannte Leistungen.

Auch nachdem er, insbesondere auf Empfehlung Kleins, als kaum 28-jähriger nach München berufen worden war, blieb er mit seinem großen Lehrer bis zu dessen Tode in herzlicher Freundschaft verbunden. Gaben in den ersten Jahren nach Dycks Übersiedlung nach München vor allem die Annalen Stoff zum Briefwechsel, so später die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. v. Dyck wirkte viele Jahre als Vorsitzender der dieses Werk betreuenden akademischen Kommission, und

als Klein vor zehn Jahren starb, betrachtete es Dyck als eine ihm von seinem Freunde und Lehrer hinterlassene Aufgabe, die Enzyklopädie mit aller Kraft ihrem Abschluß zuzuführen. Außerdem beschäftigte er sich in seinen letzten Jahren rastlos noch mit einem anderen großen Werke, mit der Vorbereitung einer neuen Ausgabe der Opera omnia Johannes Keplers. Er hatte mehrere bisher unbekannte Keplermanuskripte gefunden und sich immer tiefer in Keplers Wesensart hineingelebt. Ein Ergebnis seiner Keplerstudien sind auch die zwei Bände Keplerbriefe [1]), die er zusammen mit Max Caspar herausgegeben hat und die bestimmt sind, in weiten Kreisen dahin zu wirken, „daß sich das deutsche Volk darauf besinnt, was es an ewigen Gütern an diesem großen Manne besitzt".

In diesen wenigen seinem Gedächtnis gewidmeten Zeilen ist es unmöglich, seine Abhandlungen, Reden und sonstigen Schriften im einzelnen zu würdigen; ein Verzeichnis seiner zahlreichen Veröffentlichungen ist dem im 45. Bande des Jahresberichts der Deutschen Mathematikervereinigung erschienenen Nachruf beigefügt.

Die größten und bedeutendsten Wirkungen eines Gelehrten- und Lehrerlebens bleiben häufig unauffällig; der in Vorlesungen und Übungen ausgestreute Samen geht unbemerkt auf, die im Beratungszimmer geleistete Arbeit entbehrt des Ruhmes in der Öffentlichkeit, und nur der näher Vertraute weiß, wie schwer es ist, eine Hochschule gegen mannigfache Widerstände auf der Höhe zu erhalten und wie groß oft das Verdienst eines einzelnen an dieser Erhaltung ist.

Auch die Herausgeberarbeit an einer wissenschaftlichen Zeitschrift gehört zu jener unscheinbaren und entsagungsvollen Arbeit, die im Dunkel bleibt, während alles Licht auf die großen Entdeckungen fällt. Die Annalenredaktion gedenkt dankbar des bedeutenden Mannes, der ihr ein Menschenalter angehört hat, und wenn Herausgeberverdienste sich auch niemals im einzelnen aufzählen lassen, so gilt für sie genau wie für die wissenschaftlichen Beiträge der Mitarbeiter:

„Das Echte bleibt der Nachwelt unverloren."

---

[1]) Johannes Kepler in seinen Briefen, München und Berlin 1930. Verlag von R. Oldenbourg.

(Eingegangen am 21. 8. 1935.)

Neuer Beweis und Verallgemeinerung eines Hurwitzschen Satzes.

Von

A. Khintchine in Moskau.

Bekanntlich hat Hurwitz[1]) folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. *Für ein beliebiges reelles Θ hat die Ungleichung*

$$|x\Theta - y| < \frac{1}{x\sqrt{5}} \tag{1}$$

unendlich viele Lösungen in ganzen $x > 0$, y.

Hurwitz zeigte auch, daß $\frac{1}{\sqrt{5}}$ rechts in (1) die beste Konstante ist, indem nämlich die Behauptung falsch wird, sobald man $\frac{1}{\sqrt{5}}$ durch eine kleinere Konstante ersetzt.

Andererseits läßt sich bekanntlich die Größe $x\Theta - y$, *falls Θ irrational ist*, durch geeignete Wahl ganzer $x > 0$, y beliebig nahe an eine beliebige reelle Zahl α bringen, d. h. die Ungleichung

$$|x\Theta - y - \alpha| < \varepsilon$$

(Θ irrational, α reell, $\varepsilon > 0$) hat stets unendlich viele Lösungen in ganzen $x > 0$, y. Man weiß aber nach Kronecker[2]) noch mehr: es gibt eine absolute Konstante C von der Eigenschaft, daß die Ungleichung

$$|x\Theta - y - \alpha| < \frac{C}{x} \tag{2}$$

für jedes irrationale Θ und jedes reelle α unendlich viele Lösungen in ganzen $x > 0$, y besitzt. Es entsteht naturgemäß die Frage nach der besten Konstanten C in dieser Ungleichung, d. h. nach der unteren Schranke aller C, für welche die Behauptung richtig bleibt. Offenbar ist diese untere Schranke nicht kleiner als $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Hier soll gezeigt werden, daß sie mit $\frac{1}{\sqrt{5}}$ zusammenfällt. Man hat also den folgenden

---

[1]) Math. Annalen **39** (1891), S. 279.

[2]) Vgl. z. B. Hardy und Littlewood, Acta Math. **37** (1914), S. 155.

Satz 2. *Ist Θ irrational, α reell und $\varepsilon > 0$, so hat die Ungleichung*

$$|x\Theta - y - \alpha| < \frac{1+\varepsilon}{x\sqrt{5}} \tag{3}$$

unendlich viele Lösungen in ganzen $x > 0$, y[3]).

Offenbar bedeutet dieser Satz eine Verallgemeinerung des wesentlichen Inhalts von Satz 1 (genau: eine Verallgemeinerung von Satz 1 mit $1+\varepsilon$ statt 1 rechts in (1)).

Man kennt mehrere Beweise des Hurwitzschen Satzes, darunter auch einen Beweis von O. Perron, der von kettenbruchtheoretischen Betrachtungen frei ist[4]). Der Vollständigkeit halber will ich mit einem Beweis von Satz 1 beginnen, der mir neu und ganz besonders einfach vorkommt. Das wird in § 1 getan. § 2 enthält den Beweis von Satz 2. Endlich ist § 3 einer speziellen Untersuchung gewidmet; da nämlich Satz 2 für rationale Θ falsch wird, könnte man vermuten, daß die Konstante C der Ungleichung (2) ihre größten Werte für solche Θ erreicht, die besonders gute Annäherung mittels rationaler Brüche gestatten; demgegenüber werde ich zeigen, daß für solche Θ Satz 2 schon mit $\frac{1}{3}$ an Stelle von $\frac{1}{\sqrt{5}}$ gültig wird.

§ 1.

Beweis von Satz 1. Man wähle eine beliebige ganze positive Zahl n und betrachte die zu n gehörige Fareyreihe[5]). $\frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{b'}$ seien die benachbarten Brüche dieser Reihe, die der Ungleichung

$$\frac{a}{b} \leqq \Theta < \frac{a'}{b'}$$

genügen. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $b' > \frac{1+\sqrt{5}}{2}b$ oder $b' < \frac{\sqrt{5}-1}{2}b$; dann ist

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b\,b'} = \frac{1}{b^2\omega}, \quad \omega > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{oder} \quad \omega < \frac{\sqrt{5}-1}{2};$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}\,b^2} + \frac{1}{\sqrt{5}\,b'^2} = \frac{1}{\sqrt{5}\,b^2}\left(1 + \frac{1}{\omega^2}\right);$$

wegen

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right) - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{5}\,\omega^2}\left(\omega - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\omega - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) > 0$$

---

[3]) Läßt man die Forderung $x > 0$ fort, so folgt der Satz leicht aus den bekannten Ergebnissen von Minkowski. Diese Bemerkung verdanke ich Herrn J. F. Koksma.

[4]) Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. 1931 [129—154], S. 151—154.

[5]) Vgl. E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, 1 (1927), S. 98.

ist daher

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} < \frac{1}{\sqrt{5}\,b^2} + \frac{1}{\sqrt{5}\,b'^2},$$

$$\frac{a}{b} + \frac{1}{\sqrt{5}\,b^2} > \frac{a'}{b'} - \frac{1}{\sqrt{5}\,b'^2};$$

folglich muß Θ wenigstens einem der beiden Intervalle $\left(\frac{a}{b}, \frac{a}{b} + \frac{1}{b^2\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{a'}{b'} - \frac{1}{b'^2\sqrt{5}}, \frac{a'}{b'}\right)$ angehören, und man erhält entweder

$$\left|\Theta - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^2\sqrt{5}},$$

oder

$$\left|\Theta - \frac{a'}{b'}\right| < \frac{1}{b'^2\sqrt{5}}.$$

2. $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{b'}{b} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$; in diesem Fall ist

$$b + b' > \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, b,$$

$$b + b' > \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, b',$$

und man kann die im Fall (1) durchgeführte Überlegung auf dasjenige der beiden Intervalle $\left(\frac{a}{b}, \frac{a+a'}{b+b'}\right)$, $\left(\frac{a+a'}{b+b'}, \frac{a'}{b'}\right)$ anwenden, welches Θ enthält.

So erhält man in allen Fällen

$$|x\Theta - y| < \frac{1}{x\sqrt{5}},$$

wo x entweder b oder b' oder $b + b'$ ist. Da schließlich bei irrationalem Θ die Zahlen b und b' mit wachsendem n beliebig groß werden, ist Satz 1 bewiesen.

§ 2.

Beweis von Satz 2. Ich setze dauernd $\frac{1}{\sqrt{5}} = \gamma$. Nach Satz 1 gibt es ganze Zahlen $q > 0$, p, die den Beziehungen

$$\Theta - \frac{p}{q} = \frac{\delta}{q^2}, \quad |\delta| < \gamma$$

genügen. Dabei kann q beliebig groß gewählt werden; ferner können wir wegen der Irrationalität von Θ die Zahlen p, q teilerfremd voraussetzen; endlich darf $\delta > 0$ angenommen werden, da man anderenfalls statt (Θ, α) nur das Paar $(-\Theta, -\alpha)$ zu betrachten hätte. Ich setze ferner

$$[q\alpha] = l, \quad q\alpha - [q\alpha] = \beta \qquad (0 \leqq \beta < 1),$$

$$\tau = \frac{\beta}{2\sqrt{\delta}}.$$

Wir müssen nun je nach der Größe von β drei Fälle unterscheiden.

I. $0 \leqq \beta \leqq 2\sqrt{\gamma\delta}$, also $\tau \leqq \sqrt{\gamma}$.

Wir haben

$$\gamma + \tau^2 > \delta + \tau^2 > \delta + \tau^2 - 2\tau\sqrt{\delta} = (\sqrt{\delta} - \tau)^2,$$

$$\sqrt{\gamma + \tau^2} > \sqrt{\delta} - \tau,$$

$$\xi = \frac{\tau + \sqrt{\gamma + \tau^2}}{\sqrt{\delta}} > 1.$$

Zwischen ηq und $(\xi + \eta) q$ liegen folglich, bei jedem positiven η, mindestens q aufeinanderfolgende ganze Zahlen, darunter also mindestens eine, x, für die

$$p x \equiv l \pmod q$$

und folglich bei geeignet gewähltem y

$$p x - q y = l$$

ist. Nun hat man

$$(4) \qquad |x\Theta - y - \alpha| = \left|\frac{x p}{q} - y - \frac{l}{q} + \frac{x\delta}{q^2} - \frac{\beta}{q}\right|$$

$$= \frac{1}{q}\left|\frac{x\delta}{q} - \beta\right| = \frac{1}{x}\,\frac{x}{q}\left|\frac{x\delta}{q} - \beta\right|.$$

Wegen

$$\frac{\tau - \sqrt{\gamma + \tau^2}}{\sqrt{\delta}} < 0 < \eta \leqq \frac{x}{q} < \xi + \eta = \frac{\tau + \sqrt{\gamma + \tau^2}}{\sqrt{\delta}} + \eta$$

ist

$$-\sqrt{\gamma + \tau^2} < \frac{x\sqrt{\delta}}{q} - \tau < \sqrt{\gamma + \tau^2} + \eta\sqrt{\delta},$$

$$\left|\frac{x\sqrt{\delta}}{q} - \tau\right| < \sqrt{\gamma + \tau^2} + \eta\sqrt{\delta} < (1 + \eta)\sqrt{\gamma + \tau^2},$$

$$\left(\frac{x\sqrt{\delta}}{q} - \tau\right)^2 < (1 + \eta)^2(\gamma + \tau^2),$$

$$\frac{x^2\delta}{q^2} - \frac{2\sqrt{\delta}\,\tau x}{q} < (1 + \eta)^2\gamma + [(1 + \eta)^2 - 1]\,\tau^2,$$

also für kleine η wegen $\tau^2 \leqq \gamma$

$$\frac{x}{q}\left(\frac{x\delta}{q} - \beta\right) < \gamma + 4\eta\gamma + 2\eta^2\gamma = \gamma + O(\eta).$$

Andererseits folgt aus

$$-\gamma + \tau^2 \leqq 0 \leqq \left(\frac{x\sqrt{\delta}}{q} - \tau\right)^2$$

die Ungleichung

$$\frac{x^2\delta}{q^2} - \frac{2\sqrt{\delta}\,\tau x}{q} = \frac{x}{q}\left(\frac{x\delta}{q} - \beta\right) \geqq -\gamma.$$

Somit hat man bei genügend kleinem η

$$\frac{x}{q}\left|\frac{x\delta}{q}-\beta\right|<\gamma+\varepsilon,$$

und (4) gibt

$$|x\Theta-y-\alpha|<\frac{\gamma+\varepsilon}{x},$$

womit Satz 2 im Fall I bewiesen ist; denn wegen $x \geqq \eta q$ wird x mit q beliebig groß.

$$\text{II.}\quad 2\sqrt{\gamma\delta}<\beta<\sqrt{4\gamma^2+\delta^2}.$$

Hier ist einerseits

$$\tau^2<\frac{4\gamma^2+\delta^2}{4\delta}$$

und folglich

$$4\tau^2\delta<4\gamma^2+\delta^2,$$

$$-4\gamma^2<\delta^2-4\tau^2\delta,$$

$$4\tau^4-4\gamma^2<4\tau^4-4\tau^2\delta+\delta^2=(2\tau^2-\delta)^2$$

$$4(\tau^2-\gamma)(\tau^2+\gamma)<(2\tau^2-\delta)^2, \tag{5}$$

und andererseits

$$\beta^2>4\gamma\delta>4\delta^2,$$

$$\tau^2=\frac{\beta^2}{4\delta}>\gamma,\quad 2\tau^2>\tau^2>\gamma>\delta;$$

deswegen ergibt (5)

$$2\sqrt{\tau^2+\gamma}\,\sqrt{\tau^2-\gamma}<2\tau^2-\delta.$$

$$2\tau^2-2\sqrt{\tau^2+\gamma}\,\sqrt{\tau^2-\gamma}=(\sqrt{\tau^2+\gamma}-\sqrt{\tau^2-\gamma})^2>\delta,$$

$$\frac{\sqrt{\tau^2+\gamma}-\sqrt{\tau^2-\gamma}}{\sqrt{\delta}}>1.$$

Setzt man nun

$$\frac{\tau+\sqrt{\tau^2-\gamma}}{\sqrt{\delta}}=\xi_1,\quad \frac{\tau+\sqrt{\tau^2+\gamma}}{\sqrt{\delta}}=\xi_2,$$

so ist $\xi_2-\xi_1>1$. Wir können folglich wie im Fall I ganze Zahlen x, y bestimmen, die den Forderungen

$$px-qy=l,\quad \xi_1 q\leqq x<\xi_2 q$$

genügen. Dann wird wie vorhin

$$|x\Theta-y-\alpha|=\frac{1}{x}\,\frac{x}{q}\left|\frac{x\delta}{q}-\beta\right|; \tag{6}$$

und hierin ist

$$\xi_1\leqq\frac{x}{q}<\xi_2$$

oder

$$\tau+\sqrt{\tau^2-\gamma}\leqq\frac{x\sqrt{\delta}}{q}<\tau+\sqrt{\tau^2+\gamma},$$

und folglich

$$\sqrt{\tau^2-\gamma} \leqq \frac{x\sqrt{\delta}}{q} - \tau < \sqrt{\tau^2+\gamma},$$

$$\tau^2-\gamma \leqq \frac{x^2\delta}{q^2} - \frac{2\sqrt{\delta}\,\tau x}{q} + \tau^2 < \tau^2+\gamma,$$

$$-\gamma \leqq \frac{x}{q}\left(\frac{x\delta}{q} - \beta\right) < \gamma,$$

wonach (6)

$$|x\Theta - y - \alpha| \leqq \frac{\gamma}{x}$$

ergibt; da hierbei $x \geqq \xi_1 q > \frac{\tau}{\sqrt{\delta}} q > \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\delta}} q > q$ ist, kann x beliebig groß vorausgesetzt werden, womit Satz 2 auch in diesem Fall bewiesen ist.

III. $\sqrt{4\gamma^2+\delta^2} \leqq \beta < 1$.

Wegen $\delta < \gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}$ zeigt eine ganz leichte Rechnung, daß

$$\sqrt{4\gamma^2+\delta^2} > 1 + \delta - \gamma$$

ist; folglich erhalten wir in unserem Fall

$$\beta > 1 + \delta - \gamma,$$

$$1 - \beta < \gamma - \delta.$$

Wir bestimmen nun die ganzen Zahlen x, y so, daß

$$\eta q \leqq x < (1+\eta)\,q, \quad p x - q y = l + 1$$

ist. Dann erhalten wir

$$|x\Theta - y - \alpha| = \left|\frac{x\delta}{q^2} + \frac{1-\beta}{q}\right| = \frac{1}{q}\left(\frac{x\delta}{q} + 1 - \beta\right)$$

$$< \frac{1}{q}\,\{(1+\eta)\,\delta + \gamma - \delta\} < \frac{1}{q}\,(1+\eta)\,\gamma$$

$$< \frac{\gamma(1+\eta)^2}{x}.$$

Da hier $\eta > 0$ beliebig klein, dagegen q und folglich auch $x > \eta q$ beliebig groß gewählt werden kann, ist Satz 2 auch in diesem Fall bewiesen.

§ 3.

Satz 3. *Ist Θ irrational und die Ungleichung*

$$|x\Theta - y| < \frac{\varepsilon}{x}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ in ganzen $x > 0$, y lösbar, so ist auch die Ungleichung

$$|x\Theta - y - \alpha| < \frac{1+\varepsilon}{3x}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes reelle α in ganzen $x > 0$, y lösbar.

Beweis: Wir können den Beweis von Satz 2 fast wörtlich übernehmen, indem wir nur $\gamma = \frac{1}{3}$ setzen. In den Fällen I und II kam es beim Beweise auf den Wert von γ gar nicht an; nur die Bedingung $\delta < \gamma$, die hier reichlich erfüllt werden kann, spielte eine Rolle. Wir haben somit den Satz 3 nur im Fall III zu beweisen, wobei δ beliebig klein angenommen werden darf.

Wir haben, wenn x, y wie vorhin bestimmt werden,

$$\beta \geqq \sqrt{\tfrac{4}{9} + \delta^2} > \tfrac{2}{3}, \quad 1 - \beta < \tfrac{1}{3},$$

$$|x\Theta - y - \alpha| = \frac{1}{q}\left(\frac{x\delta}{q} + 1 - \beta\right) < \frac{1}{q}\left\{\frac{1}{3} + \delta(1+\eta)\right\}$$

$$< \frac{(1+\eta)\left\{\frac{1}{3} + \delta(1+\eta)\right\}}{x} < \frac{1+\varepsilon}{3x},$$

womit Satz 3 bewiesen ist.

Es bleibt die Frage offen, ob es solche Zahlen Θ gibt, für welche die Konstante C in (2) kleiner als $\frac{1}{3}$ gewählt werden kann; und im bejahenden Fall — welches die untere Schranke dieser Konstanten ist; daß diese untere Schranke positiv ist, habe ich nämlich schon früher bewiesen[6]).

[6]) Rendic. Circ. Mat. Palermo 50 (1926), 1—26; Satz IV.

(Eingegangen am 3. 6. 1935.)

Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen.

Von

J. Horn in Darmstadt.

Wir beschäftigen uns mit hypergeometrischen Reihen

$$\Sigma A_{\lambda\mu} x^\lambda y^\mu \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots),$$

bei welchen die Quotienten

$$\frac{A_{\lambda+1,\mu}}{A_{\lambda\mu}}, \quad \frac{A_{\lambda,\mu+1}}{A_{\lambda\mu}}$$

rationale Funktionen von λ, μ sind, welche als Zähler und Nenner ganze rationale Funktionen höchstens zweiten Grades in λ, μ haben[1]).

(Zu den H[2]., S. 384/85 aufgestellten konvergenten Reihen dieser Art ist nach B., S. 9 die Reihe

$$H_{11}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x, y) = \sum \frac{(\alpha, \lambda-\mu)(\beta, \mu)(\gamma, \mu)}{(\delta, \lambda)(1, \lambda)(1, \mu)} x^\lambda y^\mu$$

hinzuzufügen. Die Reihen H[2]., S. 385 lassen sich nach B., S. 20/21 auf hypergeometrische Funktionen einer Veränderlichen zurückführen.)

Die hier betrachteten Reihen genügen Systemen linearer partieller Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen und mit drei oder vier linear unabhängigen Integralen. Die Integrale können nach H[2]. und B. in der Umgebung gewisser singulärer Stellen der Bestimmtheit in konvergente Reihen entwickelt werden. In der vorliegenden Arbeit werden *singuläre Stellen der Unbestimmtheit* behandelt. Wir untersuchen an einigen Beispielen das Verhalten der Integrale bei der Annäherung an eine solche Stelle, besonders an den Schnittpunkt zweier singulärer Linien der Unbestimmtheit (§ 1 und § 5). Nebenbei wird auch das Verhalten der Integrale eines Differentialgleichungssystems bei der Annäherung an den Schnittpunkt *dreier* singulärer Linien der *Bestimmtheit* untersucht (§ 6).

Es ist für unseren Zweck erforderlich, die *Unbestimmtheitsstellen* der Systeme linearer Differentialgleichungen mit *einer* unabhängigen Ver-

---

1) Vgl. die Arbeiten des Verfassers Math. Annalen **34** (1889), S. 544f., künftig mit H[1]. zitiert; Math. Annalen **105** (1931), S. 381f., zitiert mit H[2]. — In Verbindung mit letzterer Arbeit steht die Dissertation der Technischen Hochschule Darmstadt: L. Borngässer, Über hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen (1933), zitiert mit B. — Hingewiesen sei auf die Monographie von Appell und Kampé de Fériet, Fonctions hypergéométriques (Paris 1926), zitiert mit A.-K.

änderlichen auch für den Fall *mehrfacher Wurzeln* der charakteristischen Gleichung zu untersuchen (§§ 3 und 4 für drei abhängige Veränderliche). Ich knüpfe dabei an meine Arbeit Jahresber. d. D. Math.-Ver. **24** (1915/16), S. 310 f.[2]) an, in welcher nur einfache Wurzeln der charakteristischen Gleichung berücksichtigt sind[3]) (siehe § 2).

Zunächst werden als Beispiele nur solche hypergeometrische Reihen behandelt, deren Differentialgleichungssysteme *drei* linear unabhängige Lösungen besitzen. Auf Differentialgleichungssysteme mit *vier* linear unabhängigen Lösungen wird später eingegangen.

§ 1.

Das Differentialgleichungssystem der Funktion

$$\Gamma_2(\beta, \beta', x, y) = \sum \frac{(\beta, \mu - \lambda)\,(\beta', \lambda - \mu)}{(1, \lambda)\,(1, \mu)}\, x^\lambda y^\mu \text{ [4])},$$

nämlich

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

$$dp = \frac{(y - \beta')\,z + (\beta - 1 - x)\,p + y\,q}{x}\,dx + z\,dy,$$

$$dq = z\,dx + \frac{(x - \beta)\,z + x\,p + (\beta' - 1 - y)}{y}\,dy,$$

hat die singulären Linien der Bestimmtheit $x = 0$, $y = 0$ und die singulären Linien der Unbestimmtheit $x = \infty$, $y = \infty$.

Indem wir uns im allgemeinen auf reelle Werte von x, y beschränken, ohne daß diese Beschränkung notwendig ist, lassen wir den Punkt x, y längs der Geraden $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$ $(t = 0 \ldots \infty)$ ins Unendliche gehen; eine der Größen a, b kann gleich Null sein. Die Funktionen z, p, q von t genügen den Differentialgleichungen

$$\frac{dz}{dt} = ap + bq,$$

---

[2]) Vgl. auch Jahresber. **25** (1916/17), S. 301 f. und Math. Zeitschr. **3** (1919), S. 284—291; **8** (1920), S. 100—114.

[3]) Für eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit einer reellen unabhängigen Veränderlichen hat Love (Am. Journ. of Math. 1914, 1916) den Fall mehrfacher Wurzeln der charakteristischen Gleichungen nach der Methode von Dini behandelt. — Für lineare Differentialgleichungen beliebiger Ordnung mit beliebigen Wurzeln der charakteristischen Gleichung zeigt Trjitzinsky [Act. math. **62** (1934)], daß aus den formalen Reihen analytische Lösungen hergeleitet werden können, welche durch diese Reihen asymptotisch dargestellt werden. Unter wesentlichen Einschränkungen findet er [Transact. Am. Math. Soc. **37** (1935)] als Lösungen Laplacesche Integrale und Fakultätenreihen.

[4]) Vgl. H[2]., S. 390/91 und S. 397.

$$\frac{dp}{dt} = a\,\frac{(y_0-\beta'+bt)z+(\beta-1-x_0-at)p+(y_0+bt)q}{x_0+at}+bz$$
$$= (2b+\ldots)z+(-a+\ldots)p+(b+\ldots)q,$$
$$\frac{dq}{dt} = (2a+\ldots)z+(a+\ldots)p+(-b+\ldots)q,$$

wo an Stelle der Punkte Potenzreihen von $\frac{1}{t}$ stehen, die für $t=\infty$ verschwinden. Dabei ist $a \neq 0$, $b \neq 0$ vorausgesetzt.

Zur Unbestimmtheitsstelle $t=\infty$ gehört die charakteristische Gleichung

$$\begin{vmatrix} -\varkappa, & a, & b \\ 2b, & -a-\varkappa, & b \\ 2a, & a, & -b-\varkappa \end{vmatrix} = 0$$

mit den Wurzeln $-a-b$, $2\sqrt{ab}$, $-2\sqrt{ab}$, welche voneinander verschieden sind, wenn $a \neq b$ ist. Im Falle $a=b=1$ haben wir die Wurzeln -2, -2, 2; die charakteristische Determinante

$$\begin{vmatrix} -\varkappa, & 1, & 1 \\ 2, & -1-\varkappa, & 1 \\ 2, & 1, & -1-\varkappa \end{vmatrix}$$

hat die Elementarteiler $\varkappa+2$, $\varkappa+2$, $\varkappa-2$.

Im Falle $b=0$, $a=1$ ist $x=x_0+t$, $y=y_0$; wir haben die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p,$$
$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{(y_0-\beta')z+(\beta-1-x)p+y_0 q}{x}$$
$$= (0+\ldots)z+(-1+\ldots)p+(0+\ldots)q,$$
$$\frac{\partial q}{\partial x} = z.$$

Die charakteristische Determinante

$$\begin{vmatrix} -\varkappa, & 1, & 0 \\ 0, & -1-\varkappa, & 0 \\ 1, & 0, & -\varkappa \end{vmatrix}$$

hat die Nullstellen 0, 0, -1 und die Elementarteiler $\varkappa^2$, $\varkappa+1$.

Das Differentialgleichungssystem der Funktion[5])

$$\Phi_2(\beta,\beta',\gamma,x,y) = \sum \frac{(\beta,\lambda)\,(\beta',\mu)}{(\gamma,\lambda+\mu)\,(1,\lambda)\,(1,\mu)}\,x^\lambda y^\mu,$$

nämlich

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

---

[5]) H[2]., S. 397f.

$$dp = \frac{\beta(x-y)z + [(x-\gamma)(x-y) - \beta' y]p + \beta y q}{x(x-y)}\,dx + \frac{\beta' p - \beta q}{x-y}\,dy,$$

$$dq = \frac{\beta' p - \beta q}{x-y}\,dx + \frac{\beta'(x-y)z - \beta' x p + [(y-\gamma)(x-y) + \beta x]q}{y(x-y)}\,dy,$$

hat die singulären Linien der Bestimmtheit $x = 0$, $y = 0$ und die singulären Linien der Unbestimmtheit $x = \infty$, $y = \infty$.

Wenn wir $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$ setzen und zunächst $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$ annehmen, haben wir Differentialgleichungen

$$\frac{dz}{dt} = ap + bq,$$

$$\frac{dp}{dt} = (0 + \ldots)z + (a + \ldots)p + (0 + \ldots)q,$$

$$\frac{dq}{dt} = (0 + \ldots)z + (0 + \ldots)p + (b + \ldots)q,$$

wo an Stelle der Punkte Potenzreihen von $\frac{1}{t}$ stehen, welche für $t = \infty$ verschwinden. Die charakteristische Gleichung

$$\begin{vmatrix} -\varkappa, & a, & b \\ 0, & a - \varkappa, & 0 \\ 0, & 0, & b - \varkappa \end{vmatrix} = 0$$

hat drei verschiedene Wurzeln 0, a, b.

Unter der Annahme $a = b = 1$ erhält man die charakteristische Determinante

$$\begin{vmatrix} -\varkappa, & 1, & 1 \\ 0, & 1 - \varkappa & 0 \\ 0, & 0, & 1 - \varkappa \end{vmatrix}$$

mit den Nullstellen $0, 1, 1$, welchen die Elementarteiler $\varkappa$, $\varkappa - 1$, $\varkappa - 1$ entsprechen.

Im Falle $a = 1$, $b = 0$ haben wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} -\varkappa, & 1, & 0 \\ 0, & 1 - \varkappa, & 0 \\ 0, & 0, & -\varkappa \end{vmatrix}$$

mit den Nullstellen $0, 0, 1$ und den Elementarteilern $\varkappa$, $\varkappa$, $\varkappa - 1$.

Das Differentialgleichungssystem der Funktion

$$\Phi_2(\beta, \gamma, x, y) = \sum \frac{(\beta, \lambda)}{(\gamma, \lambda + \mu)(1, \lambda)(1, \mu)} x^\lambda y^\mu \text{ [6]},$$

nämlich

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

$$dp = \frac{\beta x z + [x(x-\gamma) - y]p + \beta y q}{x^2}\,dx + \frac{p - \beta q}{x}\,dy,$$

$$dq = \frac{p - \beta q}{x}\,dx + \frac{z - p + (\beta - \gamma)q}{y}\,dy,$$

[6]) H²., S. 404 f.

hat die singuläre Linie der Bestimmtheit $y = 0$ und die singulären Linien der Unbestimmtheit $x = 0$, $x = \infty$, $y = \infty$.

Setzt man wieder $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, so hat man unter der Annahme $a \neq 0$, $b \neq 0$ Differentialgleichungen

$$\frac{dz}{dt} = ap + bq,$$

$$\frac{dp}{dt} = (0 + \ldots) z + (a + \ldots) p + (0 + \ldots) q,$$

$$\frac{dq}{dt} = (0 + \ldots) z + (0 + \ldots) p + (0 + \ldots) q.$$

Die charakteristische Determinante

$$\begin{vmatrix} -\varkappa, & a, & b \\ 0, & \varkappa - a, & 0 \\ 0, & 0, & -\varkappa \end{vmatrix}$$

hat die Nullstellen $0, 0, a$ und die Elementarteiler $\varkappa^2$, $\varkappa - a$, weil wegen $b \neq 0$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ \varkappa - a, & 0 \end{vmatrix}$$

für $\varkappa = 0$ von Null verschieden ist. Im Falle $a = 1$, $b = 0$ hat man die Determinante

$$\begin{vmatrix} -\varkappa, & 1, & 0 \\ 0, & \varkappa - 1, & 0 \\ 0, & 0, & -\varkappa \end{vmatrix}$$

mit den Nullstellen $0, 0, 1$ und den Elementarteilern $\varkappa, \varkappa, \varkappa - 1$.

Wenn $a = 0$, $b = 1$, also $x = x_0$, $y = y_0 + t$ ist, haben wir die Differentialgleichungen

$$\frac{dz}{dt} = q,$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{x_0} p - \frac{\beta}{x_0} q,$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{y_0 + t} z - \frac{1}{y_0 + t} p + \frac{\beta - \gamma}{y_0 + t} q$$

mit der charakteristischen Determinante

$$\begin{vmatrix} -\varkappa, & 0, & 1 \\ 0, & \frac{1}{x_0} - \varkappa, & -\frac{\beta}{x_0} \\ 0, & 0, & -\varkappa \end{vmatrix},$$

deren Nullstellen $0, 0, \frac{1}{x_0}$, deren Elementarteiler $\varkappa^2$, $\varkappa - \frac{1}{x_0}$ sind.

Zur Untersuchung der Unbestimmtheitsstelle $x = 0$ führen wir die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p,$$
$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\beta x z + [x(x-\gamma) - y]\, p + \beta y q}{x^2},$$
$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{p - \beta q}{x}$$

durch die Substitution $x = \frac{1}{\xi}$ über in

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = -\frac{1}{\xi^2} p,$$
$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = -\frac{\beta}{\xi} z + \left(y + \frac{\gamma}{\xi} - \frac{1}{\xi^2}\right) p - \beta y q,$$
$$\frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{\xi} p + \frac{\beta}{\xi} q.$$

Zur singulären Stelle $\xi = 0$ gehört die Determinante

$$\begin{vmatrix} -\varkappa, & 0, & 0 \\ 0, & y - \varkappa, & -\beta y \\ 0, & 0, & -\varkappa \end{vmatrix}$$

mit den Elementarteilern $\varkappa$, $\varkappa$, $\varkappa - y$.

Die Differentialgleichungssysteme der bisher betrachteten Funktionen Γ_2, Φ_2, Φ_3 haben drei linear unabhängige Integrale und die singulären Linien der Unbestimmtheit $x = \infty$, $y = \infty$. Dieselben beiden Eigenschaften kommen außerdem nur den Funktionen Φ_1 und Γ_1 zu[7]).

Das Differentialgleichungssystem der Funktion

$$\Phi_1(\alpha, \beta, \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha, \lambda + \mu)(\beta, \mu)}{(\gamma, \lambda + \mu)(1, \lambda)(1, \mu)} x^\lambda y^\mu \,{}^{8}),$$

nämlich

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$dp = \frac{\alpha\beta x z + [-\gamma x - y(1-x) + (\alpha + \beta + 1) x^2]\, p + \beta y q}{x^2(1-x)} dx + \frac{p - \beta q}{x} dy,$$
$$dq = \frac{p - \beta q}{x} dx + \frac{\alpha z + (x-1)\, p + (y + \beta - \gamma)\, q}{y} dy,$$

hat die singulären Linien der Bestimmtheit $x = 1$, $y = 0$ und die singulären Linien der Unbestimmtheit $x = 0$, $x = \infty$, $y = \infty$.

Wenn man $x = at$, $y = bt$ setzt, erhält man die Differentialgleichungen

$$\frac{dz}{dt} = ap + bq,$$
$$\frac{dp}{dt} = (0 + \ldots)\, z + (0 + \ldots)\, p + (0 + \ldots)\, q,$$
$$\frac{dq}{dt} = (0 + \ldots)\, z + (a + \ldots)\, p + (b + \ldots)\, q.$$

---

[7]) B., S. 9.

[8]) A.-K., S. 128.

Zur Unbestimmtheitsstelle $t = \infty$ gehört die Determinante

$$\begin{vmatrix} -\varkappa, & a, & b \\ 0, & -\varkappa, & 0 \\ 0, & a, & b-\varkappa \end{vmatrix}$$

mit den Elementarteilern $\varkappa$, $\varkappa$, $\varkappa - b$ im Falle $b \neq 0$, den Elementarteilern $\varkappa$, $\varkappa^2$ im Falle $b = 0$.

Die Funktion

$$\Gamma_1(\alpha, \beta, \beta', x, y) = \sum \frac{(\alpha, \lambda)\,(\beta, \mu - \lambda)\,(\beta', \lambda - \mu)}{(1, \lambda)\,(1, \mu)}\, x^\lambda y^\mu$$

genügt den Differentialgleichungen[9])

$$x(x+1)r - y(x+1)s + [(1+\alpha+\beta')x - \beta + 1]\,p - \alpha y q + \alpha\beta' z = 0,$$
$$-xs + yt - xp + (y - \beta' + 1)q + \beta z = 0,$$

aus welchen, wenn $\beta + \beta' \neq 0$ ist, die Differentialgleichung

$$s = xp + \alpha z$$

folgt. Wir haben demnach die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} x(x+1)r &= [x^2y + xy - (1+\alpha+\beta+\beta')x + \beta - 1]\,p \\ &\qquad + \alpha y q + \alpha(xy + y - \beta')z, \\ yt &= x(x+1)p - (y - \beta' + 1)q + (\alpha x - \beta)z, \\ s &= xp + \alpha z, \end{aligned}$$

mit deren Hilfe wir das System bilden:

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy.$$

Wir setzen $x = at$, $y = bt$ (mit anderer Bedeutung von t) und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= ap + bq, \\ \frac{dp}{dt} &= \left(2\alpha b - \frac{\alpha\beta'}{a t^2} + \dots\right) z + \left(\frac{\alpha b}{a t} - \frac{\alpha b}{a^2 t^2} + \dots\right) q \\ &\qquad + \left(2abt - \frac{1+\alpha+\beta+\beta'}{t} + \frac{\alpha + 2\beta + \beta'}{a t^2} + \dots\right) p, \\ \frac{dq}{dt} &= \left(2\alpha a - \frac{\beta}{t}\right) z + (2a^2 t + a)\,p - \left(b + \frac{1-\beta'}{t}\right) q. \end{aligned}$$

Wir haben die Unbestimmtheitsstelle $t = \infty$ vom *Range* 2; die charakteristische Determinante

$$\begin{vmatrix} -\varkappa, & 0, & 0 \\ 0, & 2ab - \varkappa, & 0 \\ 0, & 2a^2 & -\varkappa \end{vmatrix} = -\varkappa^2(\varkappa - 2ab)$$

hat im Falle $a \neq 0$, $b \neq 0$ die Elementarteiler $\varkappa$, $\varkappa$, $\varkappa - 2ab$.

---

[9]) H[1]., § 6; H[2]., S. 385/86.

§ 2.

Die Systeme linearer Differentialgleichungen mit Unbestimmtheitsstelle, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat, können nach den in der Einleitung angeführten Arbeiten des Verfassers untersucht werden. Hier kommen in den meisten Fällen Unbestimmtheitsstellen vom Rang $k = 1$ in Betracht, so daß die dortigen Entwicklungen wesentlich einfacher werden. Wir benutzen die folgenden vereinfachten Ergebnisse.

In dem System linearer Differentialgleichungen

$$\text{(A)} \qquad \frac{d y_\alpha}{d x} + \sum_{\beta=1}^{m} P_{\alpha\beta}(x)\, y_\beta = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

sei

$$P_{\alpha\beta}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a_{\alpha\beta}^{(\lambda)}}{x^\lambda}$$

in der Umgebung von $x = \infty$ regulär. Die Gleichung

$$|a_{\alpha\beta}^{(0)} - \varkappa\, \delta_{\alpha\beta}| = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m),$$

wo $\delta_{\alpha\alpha} = 1$, $\delta_{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha \gtrless \beta)$ ist, habe m verschiedene Wurzeln $a_1, \ldots, a_m$. Durch eine lineare Transformation von $y_1, \ldots, y_m$ erreicht man, daß $a_{\alpha\alpha}^{(0)} = a_\alpha$, $a_{\alpha\beta}^{(0)} = 0$ $(\alpha \gtrless \beta)$ ist. Jetzt wird das System (A) durch (im allgemeinen divergente) Reihen

$$y_\alpha = e^{-a x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

befriedigt, wo a eine der Zahlen $a_1, \ldots, a_m$, etwa $a = a_1$ ist. Wir nehmen $a_1 = 0$ an, was durch die Substitution $y_\alpha = e^{-a_1 x} z_\alpha$ erreicht werden kann. Das System (A) wird dann durch Reihen

$$y_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

befriedigt, wo $r = a_{11}^{(1)}$ und $A_{10} \neq 0$, $A_{20} = \ldots = A_{m0} = 0$ ist. Durch die Substitution $y_\alpha = x^\varrho z_\alpha$ wird $a_{\alpha\alpha}^{(1)}$ und damit r um ϱ vermehrt, so daß der reelle Teil von r positiv vorausgesetzt werden kann[10]).

Den Differentialgleichungen (A) ordnen wir die Integralgleichungen

$$\text{(B)} \qquad (t - a_\alpha)\, w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t G_{\alpha\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \quad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

---

[10]) Man kann auch nach Jahresber. 24, S. 74 f., oder nach Math. Zeitschr. 3, S. 291 f. verfahren, ohne $\Re(r) > 0$ anzunehmen.

zu, wo $a_1 = 0$ und

$$G_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\alpha\beta}^{(\lambda)} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

eine ganze Funktion ist. Wir beschreiben um $t = 0$ einen Kreis $\mathfrak{K}$, welcher weder im Innern noch auf der Peripherie einen der Punkte $a_2, \ldots, a_m$ enthält; wir betrachten einen Sektor $\mathfrak{S}$, welcher von zwei von $t = 0$ nach $t = \infty$ gehenden Geraden begrenzt wird und eine der Stellen $a_2, \ldots, a_m$ weder im Innern noch auf der Begrenzung enthält. Es ist eine Lösung $w_\alpha(t)$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$ der Integralgleichungen (B) so vorhanden, daß $t^{-r+1} w_\alpha(t)$ im Kreis $\mathfrak{K}$ und im Sektor $\mathfrak{S}$ im Endlichen überall regulär ist; im Kreis $\mathfrak{K}$ ist

$$w_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{\alpha n} \frac{t^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)}.$$

Gehört $t = |t| e^{i\omega}$ einem Sektor $\mathfrak{S}$ an, so ist

$$|w_\alpha(t)| < C e^{h|t|} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

wo $h > \sigma(\omega)$ und C hinreichend groß ist; dabei ist $\sigma(\omega) \geqq 0$ so gewählt, daß in der Halbebene $\Re(x e^{i\omega}) > \sigma(\omega)$ alle Koeffizienten $P_{\alpha\beta}(x)$ von (A) regulär sind. Die über die Gerade $\arg t = \omega$ erstreckten Laplaceschen Integrale

$$y_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t) e^{-tx} dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

genügen in der Halbebene $\Re(x e^{i\omega}) > \sigma(\omega)$ den Differentialgleichungen (A). Für große $|x|$ gelten die asymptotischen Gleichungen

$$y_\alpha \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}}.$$

Wir ändern die bisherigen Betrachtungen etwas ab.

Dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{d y_\alpha}{d x} + a_\alpha y_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a_{\alpha\beta}^{(\lambda)}}{x^\lambda} y_\beta = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

in welchem nicht mehr $a_1 = 0$ vorausgesetzt wird, ordnen wir die Integralgleichungen

$$(t - a_\alpha) w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_{a_i}^{t} G_{\alpha\beta}(t - \tau) w_\beta(\tau) d\tau \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

zu, wo die untere Grenze a_i (i eine der Zahlen $1, \ldots, m$) für alle m Integralgleichungen dieselbe ist. Die ganze Funktion

$$G_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\alpha\beta}^{(\lambda)} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

ist von i unabhängig. Mit der Lösung

$$w_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}^{(i)} (t - a_i)^{r_i + n - 1}}{\Gamma(r_i + n)} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

bilden wir die Laplaceschen Integrale

$$y_\alpha = \int_{a_i}^{\infty} w_\alpha(t) e^{-tx} dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

welche dem Differentialgleichungssystem genügen und durch die diesem formal genügenden Reihen

$$y_\alpha = e^{-a_i x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}^{(i)}}{x^{r_i + n}} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

asymptotisch dargestellt werden.

In gewissen Beispielen von § 5 ist $a_{\alpha\beta}^{(\lambda)} = 0$ $(\lambda = 2, 3, \ldots)$, also $G_{\alpha\beta}(t) = a_{\alpha\beta}^{(1)}$. Durch Differentiation der Integralgleichungen ergeben sich die Differentialgleichungen

$$(t - a_\alpha) \frac{d w_\alpha}{d t} = \sum_{\beta=1}^{m} (a_{\alpha\beta}^{(1)} - \delta_{\alpha\beta}) w_\beta(t) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

mit den Bedingungen

$$w_1(a_i) = \ldots = w_{i-1}(a_i) = w_{i+1}(a_i) = \ldots = w_m(a_i) = 0.$$

Der reelle Teil von $r_i = a_{ii}^{(1)}$ wird als positiv vorausgesetzt.

Übrigens können die Integralgleichungen stets dann durch Differentialgleichungen ersetzt werden, wenn die Koeffizienten des vorgelegten Differentialgleichungssystems rationale Funktionen sind.

§ 3.

Wir lassen jetzt mehrfache Wurzeln der charakteristischen Gleichung zu, beschränken uns aber auf den Fall $m = 3$, d. h. auf das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d y_\alpha}{d x} + \sum_{\beta=1}^{3} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a_{\alpha\beta}^{(\lambda)}}{x^\lambda} y_\beta = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Bevor wir den Fall einer einfachen und einer zweifachen Nullstelle der Determinante

$$\Delta(\varkappa) = |a_{\alpha\beta}^{(0)} - \varkappa \delta_{\alpha\beta}| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

betrachten, behandeln wir den rascher zu erledigenden Fall einer *dreifachen Nullstelle* von $\Delta(\varkappa)$; wir können voraussetzen, daß diese $\varkappa = 0$ ist. Die Determinante $\Delta(\varkappa)$ besitzt dann entweder die Elementarteiler $\varkappa, \varkappa, \varkappa$ (Fall I) oder die Elementarteiler $\varkappa^2, \varkappa$ (Fall II) oder den Elementarteiler $\varkappa^3$ (Fall III).

Im Falle I haben wir das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d y_\alpha}{d x} + \sum_{\beta=1}^{3} P_{\alpha\beta}(x)\, y_\beta = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3); \quad P_{\alpha\beta}(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a_{\alpha\beta}^{(\lambda)}}{x^\lambda},$$

dessen Koeffizienten $P_{\alpha\beta}(x)$ in der Umgebung von $x = \infty$ regulär sind. Wenn die Determinante

$$|a_{\alpha\beta}^{(1)} - r\,\delta_{\alpha\beta}| = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

drei (nicht notwendig verschiedene) lineare Elementarteiler $r - r_1$, $r - r_2$, $r - r_3$ besitzt und wenn zwischen r_1, r_2, r_3 keine von Null verschiedene ganzzahlige Differenz besteht, wird das Differentialgleichungssystem durch drei Systeme von konvergenten Reihen

$$y_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

mit $r = r_1, r_2, r_3$ befriedigt. Allgemein kann man nach Anwendung der Substitution $x = \frac{1}{\xi}$ die Sätze in meiner Arbeit Math. Annalen **39** (1891), S. 391 f. benutzen.

Im Falle II betrachten wir die Differentialgleichungen

$$\frac{d y_1}{d x} + \sum_{\beta=1}^{3} \left(\frac{a_{1\beta}^{(1)}}{x} + \frac{a_{1\beta}^{(2)}}{x^2} + \ldots\right) y_\beta = 0,$$

$$\frac{d y_2}{d x} + y_1 + \sum_{\beta=1}^{3} \left(\frac{a_{2\beta}^{(1)}}{x} + \frac{a_{2\beta}^{(2)}}{x^2} + \ldots\right) y_\beta = 0,$$

$$\frac{d y_3}{d x} + \sum_{\beta=1}^{3} \left(\frac{a_{3\beta}^{(1)}}{x} + \frac{a_{3\beta}^{(2)}}{x^2} + \ldots\right) y_\beta = 0.$$

Durch die Substitution

$$x = \mathfrak{x}^2; \quad y_1 = Y_1, \quad y_2 = \mathfrak{x}\, Y_2, \quad y_3 = Y_3$$

gehen sie über in

$$\frac{dY_1}{d\mathfrak{x}} + \left(\frac{2 a_{11}^{(1)}}{\mathfrak{x}} + \frac{2 a_{11}^{(2)}}{\mathfrak{x}^3} + \ldots\right) Y_1$$
$$+ \left(2 a_{12}^{(1)} + \frac{2 a_{12}^{(2)}}{\mathfrak{x}^2} + \ldots\right) Y_2 + \left(\frac{2 a_{13}^{(1)}}{\mathfrak{x}} + \frac{2 a_{13}^{(2)}}{\mathfrak{x}^3} + \ldots\right) Y_3 = 0,$$

$$\frac{dY_2}{d\mathfrak{x}} + \left(2 + \frac{2 a_{21}^{(1)}}{\mathfrak{x}^2} + \frac{2 a_{21}^{(2)}}{\mathfrak{x}^4} + \ldots\right) Y_1$$
$$+ \left(\frac{2 a_{22}^{(1)} + 1}{\mathfrak{x}} + \frac{2 a_{22}^{(2)}}{\mathfrak{x}^3} + \ldots\right) Y_2 + \left(\frac{2 a_{23}^{(1)}}{\mathfrak{x}^2} + \frac{2 a_{23}^{(2)}}{\mathfrak{x}^4} + \ldots\right) Y_3 = 0,$$

$$\frac{dY_3}{d\mathfrak{x}} + \left(\frac{2 a_{31}^{(1)}}{\mathfrak{x}} + \frac{2 a_{31}^{(2)}}{\mathfrak{x}^2} + \ldots\right) Y_1$$
$$+ \left(2 a_{32}^{(1)} + \frac{2 a_{32}^{(2)}}{\mathfrak{x}^2} + \ldots\right) Y_2 + \left(\frac{2 a_{33}^{(1)}}{\mathfrak{x}} + \frac{2 a_{33}^{(2)}}{\mathfrak{x}^3} + \ldots\right) Y_3 = 0.$$

Dieses Differentialgleichungssystem kann, da seine charakteristische Gleichung

$$\begin{vmatrix} -\varkappa, & 2a_{12}^{(1)}, & 0 \\ 2, & -\varkappa, & 0 \\ 0, & 2a_{32}^{(1)}, & -\varkappa \end{vmatrix} = -\varkappa(\varkappa^2 - 4a_{12}^{(1)}) = 0,$$

wenn $a_{12}^{(1)} \neq 0$ vorausgesetzt wird, drei verschiedene Wurzeln $0, \pm 2\sqrt{a_{12}^{(1)}}$ besitzt, nach Jahresber. **24** behandelt werden.

Die zu $\varkappa = 0$ gehörige Lösung der Differentialgleichungen für Y_1, Y_2, Y_3 kann aus den Differentialgleichungen für y_1, y_2, y_3 hergeleitet werden, indem man setzt:

$$y_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}} \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Durch Koeffizientenvergleichung findet man:

$$r = a_{33}^{(1)} - \frac{a_{13}^{(1)} a_{32}^{(1)}}{a_{12}^{(1)}},$$

$$A_{10} = 0, \quad A_{20} = -\frac{a_{13}^{(1)}}{a_{12}^{(1)}} A_{30},$$

wo A_{30} willkürlich bleibt, usw.

Im Falle III haben wir die Differentialgleichungen

$$\frac{dy_1}{dx} + \sum_{\beta=1}^{3}\left(\frac{a_{1\beta}^{(1)}}{x} + \frac{a_{1\beta}^{(2)}}{x^2} + \ldots\right) y_\beta = 0,$$

$$\frac{dy_2}{dx} + y_1 + \sum_{\beta=1}^{3}\left(\frac{a_{2\beta}^{(1)}}{x} + \frac{a_{2\beta}^{(2)}}{x^2} + \ldots\right) y_\beta = 0,$$

$$\frac{dy_3}{dx} + y_2 + \sum_{\beta=1}^{3}\left(\frac{a_{3\beta}^{(1)}}{x} + \frac{a_{3\beta}^{(2)}}{x^2} + \ldots\right) y_\beta = 0,$$

welche durch die Substitution

$$x = \mathfrak{x}^3; \quad y_1 = Y_1, \quad y_2 = \mathfrak{x}\, Y_2, \quad y_3 = \mathfrak{x}^2 Y_3$$

übergehen in

$$\mathfrak{x}^{-1}\frac{dY_1}{d\mathfrak{x}} + \left(\frac{3a_{11}^{(1)}}{\mathfrak{x}^2} + \frac{3a_{11}^{(2)}}{\mathfrak{x}^5} + \ldots\right)Y_1$$
$$+ \left(\frac{3a_{12}^{(1)}}{\mathfrak{x}} + \frac{3a_{12}^{(2)}}{\mathfrak{x}^4} + \ldots\right)Y_2 + \left(3a_{13}^{(1)} + \frac{3a_{13}^{(2)}}{\mathfrak{x}^3} + \ldots\right)Y_3 = 0,$$

$$\mathfrak{x}^{-1}\frac{dY_2}{d\mathfrak{x}} + \left(3 + \frac{3a_{21}^{(1)}}{\mathfrak{x}^3} + \frac{3a_{21}^{(2)}}{\mathfrak{x}^6} + \ldots\right)Y_1$$
$$+ \left(\frac{3a_{22}^{(1)} + 1}{\mathfrak{x}^2} + \frac{3a_{22}^{(2)}}{\mathfrak{x}^5} + \ldots\right)Y_2 + \left(\frac{3a_{23}^{(1)}}{\mathfrak{x}} + \frac{3a_{23}^{(2)}}{\mathfrak{x}^4} + \ldots\right)Y_3 = 0,$$

$$\mathfrak{x}^{-1}\frac{dY_3}{d\mathfrak{x}} + \left(\frac{3a_{31}^{(1)}}{\mathfrak{x}^4} + \frac{3a_{31}^{(2)}}{\mathfrak{x}^7} + \ldots\right)Y_1$$
$$+ \left(3 + \frac{3a_{32}^{(1)}}{\mathfrak{x}^3} + \frac{3a_{32}^{(2)}}{\mathfrak{x}^6} + \ldots\right)Y_2 + \left(\frac{3a_{33}^{(1)} + 2}{\mathfrak{x}^2} + \frac{3a_{33}^{(2)}}{\mathfrak{x}^5} + \ldots\right)Y_3 = 0.$$

Die charakteristische Gleichung dieses Differentialgleichungssystems mit der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ vom Rang 2, nämlich

$$\begin{vmatrix} -\varkappa, & 0, & 3a_{13}^{(1)} \\ 3, & -\varkappa, & 0 \\ 0, & 3, & -\varkappa \end{vmatrix} = -\varkappa^3 + 27 a_{13}^{(1)} = 0,$$

hat, wenn $a_{13}^{(1)} \neq 0$ ist, drei verschiedene Wurzeln $\varkappa = 3\sqrt[3]{a_{13}^{(1)}}$, so daß nach Jahresber. **24** oder Math. Zeitschr. **3**, S. 284–291; **8**, S. 112–114 verfahren werden kann.

§ 4.

Die charakteristische Gleichung $\Delta(\varkappa) = 0$ unseres Differentialgleichungssystems habe jetzt *eine Doppelwurzel* $a_1 = a_2$ und *eine einfache Wurzel* $a_3 \neq a_1$. Dann hat die Determinante $\Delta(\varkappa)$ entweder die Elementarteiler $\varkappa - a_1, \varkappa - a_1, \varkappa - a_3$ (Fall 1) oder die Elementarteiler $(\varkappa - a_1)^2, \varkappa - a_3$ (Fall 2). Das Differentialgleichungssystem kann im Falle 1 auf die Form

$$\frac{dy_\alpha}{dx} + a_\alpha y_\alpha + \sum_{\beta=1}^{3}\left(\frac{a_{\alpha\beta}^{(1)}}{x} + \frac{a_{\alpha\beta}^{(2)}}{x^2} + \ldots\right) y_\beta = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

mit $a_1 = a_2$, im Falle 2 auf die Form

$$\frac{dy_1}{dx} + a_1 y_1 + \sum_{\beta=1}^{3}\left(\frac{a_{1\beta}^{(1)}}{x} + \frac{a_{1\beta}^{(2)}}{x^2} + \ldots\right) y_\beta = 0,$$

$$\frac{dy_2}{dx} + a_1 y_2 + y_1 + \sum_{\beta=1}^{3}\left(\frac{a_{2\beta}^{(1)}}{x} + \frac{a_{2\beta}^{(2)}}{x^2} + \ldots\right) y_\beta = 0,$$

$$\frac{dy_3}{dx} + a_3 y_3 + \sum_{\beta=1}^{3}\left(\frac{a_{3\beta}^{(1)}}{x} + \frac{a_{3\beta}^{(2)}}{x^2} + \ldots\right) y_\beta = 0$$

gebracht werden. In beiden Fällen kann $a_1 = 0$ oder $a_3 = 0$ vorausgesetzt werden; man erreicht dies durch die Substitution $y_\alpha = e^{-a_1 x} z_\alpha$ bez. $y_\alpha = e^{-a_3 x} z_\alpha$.

Indem wir im Falle 1 $a_1 = 0$ annehmen, betrachten wir das System

$$(\mathrm{A}')\quad \begin{cases} \dfrac{dy_\alpha}{dx} + \displaystyle\sum_{\beta=1}^{3}\left(\frac{a_{\alpha\beta}^{(1)}}{x} + \frac{a_{\alpha\beta}^{(2)}}{x^2} + \ldots\right) y_\beta = 0 & (\alpha = 1, 2), \\ \dfrac{dy_3}{dx} + a y_3 + \displaystyle\sum_{\beta=1}^{3}\left(\frac{a_{3\beta}^{(1)}}{x} + \frac{a_{3\beta}^{(2)}}{x^2} + \ldots\right) y_\beta = 0 \end{cases}$$

mit $a \neq 0$, welches durch Reihen von der Form

$$y_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

formal befriedigt wird. Es ist $A_{30} = 0$ und

$$(a_{11}^{(1)} - r) A_{10} + a_{12}^{(1)} A_{20} = 0,$$
$$a_{21}^{(1)} A_{10} + (a_{22}^{(1)} - r) A_{20} = 0,$$

also

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} - r, & a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)}, & a_{22}^{(1)} - r \end{vmatrix} = 0.$$

Aus der dritten Gleichung (A′) folgt eine Formel, welche A_{3n} durch $A_{1,n-1}$, $A_{2,n-1}$, $A_{3,n-1}$ usw. ausdrückt. Aus den beiden ersten Gleichungen (A′) ergeben sich Formeln

$$(a_{11}^{(1)} - r - n) A_{1n} + a_{12}^{(1)} A_{2n} + \ldots = 0,$$
$$a_{21}^{(1)} A_{1n} + (a_{22}^{(1)} - r - n) A_{2n} + \ldots = 0,$$

wo nach Einführung des erwähnten Ausdrucks für A_{3n} an Stelle der Punkte nur $A_{1,n-1}$, $A_{2,n-1}$, $A_{3,n-1}, \ldots$ stehen. Wenn die obige Determinante zwei lineare Elementarteiler $r - r_1$, $r - r_2$ besitzt und wenn $r_1 - r_2$ keine von Null verschiedene ganze Zahl ist, sind zwei Reihensysteme von der angegebenen Form für y_α vorhanden. Wie in § 2 kann der Realteil von r positiv angenommen werden.

Den Differentialgleichungen (A′) werden die Integralgleichungen

$$(\mathrm{B}') \begin{cases} t\, w_\alpha(t) = \sum\limits_{\beta=1}^{3} \int\limits_0^t G_{\alpha\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau & (\alpha = 1, 2), \\ (t-a)\, w_3(t) = \sum\limits_{\beta=1}^{3} \int\limits_0^t G_{3\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \end{cases}$$

zugeordnet, wobei

$$G_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\alpha\beta}^{(\lambda)} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

eine ganze Funktion ist. Der um $t = 0$ beschriebene Kreis $\mathfrak{K}$ und der Sektor $\mathfrak{S}$, welcher von zwei von $t = 0$ nach $t = \infty$ gehenden Geraden begrenzt wird, dürfen den Punkt a nicht enthalten. Jedem der beiden Werte von r entspricht eine Lösung $w_\alpha(t)\,(\alpha = 1, 2, 3)$ der Integralgleichungen (B′), so daß $t^{-r+1} w_\alpha(t)$ im Kreis $\mathfrak{K}$ und im Sektor $\mathfrak{S}$ im Endlichen regulär ist; im Kreis $\mathfrak{K}$ ist

$$w_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{\alpha n} \frac{t^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)}.$$

Wenn $t = |t|\, e^{i\omega}$ dem Sektor $\mathfrak{S}$ angehört, ist

$$|w_\alpha(t)| < C e^{h|t|} \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

wo $h > \sigma(\omega)$ und C hinreichend groß ist; $\sigma(\omega)$ ist wie in § 2 definiert. Der Beweis wird wie Jahresber. 24, S. 321/22 geführt.

Die über die Gerade $\arg t = \omega$ erstreckten Laplaceschen Integrale

$$y_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t)\, e^{-tx}\, dt \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

genügen in der Halbebene $\Re(x e^{i\omega}) > \sigma(\omega)$ den Differentialgleichungen (A′) und erfüllen für große $|x|$ die asymptotischen Gleichungen

$$y_\alpha \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}}.$$

Es ergeben sich so zwei Lösungen von (A′).

Im Falle 2 haben wir, wenn wir $a_1 = 0$ annehmen, die Differentialgleichungen

$$(\mathrm{A}'')\left\{\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx} + \sum_{\beta=1}^{3}\left(\frac{a_{1\beta}^{(1)}}{x} + \frac{a_{1\beta}^{(2)}}{x^2} + \dots\right) y_\beta = 0,\\
&\frac{dy_2}{dx} + y_1 + \sum_{\beta=1}^{3}\left(\frac{a_{2\beta}^{(1)}}{x} + \frac{a_{2\beta}^{(2)}}{x^2} + \dots\right) y_\beta = 0,\\
&\frac{dy_3}{dx} + a\,y_3 + \sum_{\beta=1}^{3}\left(\frac{a_{3\beta}^{(1)}}{x} + \frac{a_{3\beta}^{(1)}}{x^2} + \dots\right) y_\beta = 0
\end{aligned}\right.$$

mit $a \neq 0$. Durch die Substitution

$$x = \mathfrak{x}^2; \quad y_1 = Y_1, \quad y_2 = \mathfrak{x}\, Y_2, \quad y_3 = Y_3$$

gehen sie über in

$$\frac{dY_1}{d\mathfrak{x}} + \left(\frac{2a_{11}^{(1)}}{\mathfrak{x}} + \frac{2a_{11}^{(2)}}{\mathfrak{x}^3} + \dots\right) Y_1$$
$$+ \left(2a_{12}^{(1)} + \frac{2a_{12}^{(2)}}{\mathfrak{x}^2} + \dots\right) Y_2 + \left(\frac{2a_{13}^{(1)}}{\mathfrak{x}} + \frac{2a_{13}^{(2)}}{\mathfrak{x}^3} + \dots\right) Y_3 = 0,$$

$$\frac{dY_2}{d\mathfrak{x}} + \left(2 + \frac{2a_{21}^{(1)}}{\mathfrak{x}^2} + \frac{2a_{21}^{(2)}}{\mathfrak{x}^4} + \dots\right) Y_1$$
$$+ \left(\frac{2a_{22}^{(1)} + 1}{\mathfrak{x}} + \frac{2a_{22}^{(2)}}{\mathfrak{x}^3} + \dots\right) Y_2 + \left(\frac{2a_{23}^{(1)}}{\mathfrak{x}^2} + \frac{2a_{23}^{(2)}}{\mathfrak{x}^4} + \dots\right) Y_3 = 0,$$

$$\mathfrak{x}^{-1}\frac{dY_3}{d\mathfrak{x}} + \left(\frac{2a_{31}^{(1)}}{\mathfrak{x}^2} + \frac{2a_{31}^{(2)}}{\mathfrak{x}^4} + \dots\right) Y_1$$
$$+ \left(\frac{2a_{32}^{(1)}}{\mathfrak{x}} + \frac{2a_{32}^{(2)}}{\mathfrak{x}^3} + \dots\right) Y_2 + \left(2a + \frac{2a_{33}^{(1)}}{\mathfrak{x}^2} + \frac{2a_{33}^{(2)}}{\mathfrak{x}^4} + \dots\right) Y_3 = 0.$$

Setzt man

$$Y_\alpha = e^{\varkappa' \mathfrak{x}} Z_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

so hat man die Differentialgleichungen

$$\frac{dZ_1}{d\mathfrak{x}} + \left(\varkappa' + \frac{2a_{11}^{(1)}}{\mathfrak{x}} + \dots\right) Z_1 + \left(2a_{12}^{(1)} + \dots\right) Z_2 + \left(\frac{2a_{13}^{(1)}}{\mathfrak{x}} + \dots\right) Z_3 = 0,$$

$$\frac{dZ_2}{dx} + \left(2 + \frac{2a_{21}^{(1)}}{x^2} + \dots\right)Z_1 + \left(\varkappa' + \frac{2a_{22}^{(1)}+1}{x} + \dots\right)Z_2 + \left(\frac{2a_{23}^{(1)}}{x^2} + \dots\right)Z_3 = 0.$$

$$x^{-1}\frac{dZ_3}{dx} + \left(\frac{2a_{31}^{(1)}}{x^2} + \dots\right)Z_1$$
$$+ \left(\frac{2a_{32}^{(1)}}{x} + \dots\right)Z_2 + \left(2a + \frac{\varkappa'}{x} + \frac{2a_{33}^{(1)}}{x^2} + \dots\right)Z_3 = 0.$$

Damit diese durch Reihen

$$Z_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

befriedigt werden, muß, wie sich durch Vergleichung der Koeffizienten von $\frac{1}{x^r}$ ergibt,

$$\varkappa' A_{10} + 2a_{12}^{(1)} A_{20} = 0,$$
$$2A_{10} + \varkappa' A_{20} = 0,$$
$$A_{30} = 0$$

sein. Hiernach ist $\varkappa'^2 = 4a_{12}^{(1)}$, so daß unter der Annahme $a_{12}^{(1)} \neq 0$ die beiden Werte

$$\varkappa' = \pm 2\sqrt{a_{12}^{(1)}}$$

verschieden sind, und

$$A_{10} : A_{20} = \varkappa' : -2, \qquad A_{30} = 0.$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten von $\frac{1}{x^{r+1}}$ ergeben sich die Gleichungen

$$\varkappa' A_{11} + 2a_{12}^{(1)} A_{21} + (2a_{11}^{(1)} - r) A_{10} = 0,$$
$$2A_{11} + \varkappa' A_{21} + (2a_{22}^{(1)} - r + 1) A_{20} = 0.$$

Wenn man diese nach Multiplikation mit $2, -\varkappa$ addiert und den Wert von $A_{10} : A_{20}$ einsetzt, findet man

$$r = a_{11}^{(1)} + a_{22}^{(1)} + \frac{1}{2}.$$

Durch Einführung der neuen Veränderlichen

$$\mathfrak{Z}_1 = 2Z_1 - \varkappa' Z_2, \qquad \mathfrak{Z}_2 = 2Z_1 + \varkappa' Z_2, \qquad \mathfrak{Z}_3 = Z_3$$

erhält man die Differentialgleichungen

$$(\mathrm{A}) \left\{ \begin{aligned} \frac{d\mathfrak{Z}_1}{dx} + \sum_{\beta=1}^{3} \left(\frac{\mathfrak{a}_{1\beta}^{(1)}}{x} + \dots\right)\mathfrak{Z}_\beta &= 0, \\ \frac{d\mathfrak{Z}_2}{dx} + 2\varkappa'\mathfrak{Z}_2 + \sum_{\beta=1}^{3} \left(\frac{\mathfrak{a}_{2\beta}^{(1)}}{x} + \dots\right)\mathfrak{Z}_\beta &= 0, \\ x^{-1}\frac{d\mathfrak{Z}_3}{dx} + 2a\mathfrak{Z}_3 + \sum_{\beta=1}^{3} \left(\frac{\mathfrak{a}_{3\beta}^{(1)}}{x} + \dots\right)\mathfrak{Z}_\beta &= 0; \end{aligned} \right.$$

dabei ist

$$\mathfrak{a}_{11}^{(1)} = a_{11}^{(1)} + a_{22}^{(1)} + \tfrac{1}{2} = r,\ \mathfrak{a}_{12}^{(1)} = a_{11}^{(1)} - a_{22}^{(1)} - \tfrac{1}{2},\ \mathfrak{a}_{13}^{(1)} = 4\, a_{13}^{(1)},$$

$$\mathfrak{a}_{21}^{(1)} = a_{11}^{(1)} - a_{22}^{(1)} - \tfrac{1}{2},\ \mathfrak{a}_{22}^{(1)} = r,\ \mathfrak{a}_{23}^{(1)} = 4\, a_{13}^{(1)},$$

$$\mathfrak{a}_{31}^{(1)} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{\varkappa'},\ \mathfrak{a}_{32}^{(1)} = \frac{a_{32}^{(1)}}{\varkappa'},\ \mathfrak{a}_{33}^{(1)} = \varkappa'.$$

Die Koeffizienten der Differentialgleichungen (A) seien in der Halbebene $\Re(\mathfrak{x} e^{i\omega}) > \sigma(\omega)$ regulär. In dieser Halbebene gelten unter Einführung der ganzen Funktionen

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \mathfrak{a}_{\alpha\beta}^{(\lambda)} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

die Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{a}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}}{\mathfrak{x}^{\lambda}} = \int_0^{\infty} \mathfrak{G}_{\alpha\beta}(t)\, e^{-t\mathfrak{x}}\, dt;$$

für $t = |t| e^{i\omega}$ ist

$$|\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(t)| < A\, e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|t|},\ |\mathfrak{G}'_{\alpha\beta}(t)| < A'\, e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|t|},$$

wo ε eine beliebig kleine und A, A' hinreichend große (von ε unabhängige) positive Größen sind; die Laplaceschen Integrale sind über die Gerade $\arg t = \omega$ erstreckt.

Die Differentialgleichungen (A) werden durch Reihen

$$\mathfrak{Z}_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{A}_{\alpha n}}{\mathfrak{x}^{r+n}} \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

worin $r = \mathfrak{a}_{11}^{(1)}$, $\mathfrak{A}_{20} = \mathfrak{A}_{30} = 0$ ist, formal befriedigt. Wir suchen sie durch Laplacesche Integrale mit dem Integrationsweg $\arg t = \omega$

$$\mathfrak{Z}_\alpha = \int_0^{\infty} w_\alpha(t)\, e^{-t\mathfrak{x}}\, dt \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

zu lösen. Es ist

$$\frac{d\mathfrak{Z}_\alpha}{d\mathfrak{x}} = -\int_0^{\infty} t\, w_\alpha(t)\, e^{-t\mathfrak{x}}\, dt,$$

$$\mathfrak{x}^{-1} \frac{d\mathfrak{Z}_3}{d\mathfrak{x}} = -\frac{1}{\mathfrak{x}} \int_0^{\infty} t\, w_3(t)\, e^{-t\mathfrak{x}}\, dt = -\int_0^{\infty} \int_0^{t} \tau\, w_3(\tau)\, d\tau \cdot e^{-t\mathfrak{x}}\, dt$$

unter der Voraussetzung

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t\mathfrak{x}} \int_0^{t} \tau\, w_3(\tau)\, d\tau = 0.$$

Hiernach folgen aus den Differentialgleichungen (A) die Integralgleichungen

$$
\text{(B)} \begin{cases} t\,w_1(t) = \sum\limits_{\beta=1}^{3} \int\limits_0^t \mathfrak{G}_{1\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau, \\ (t-2\varkappa')\, w_2(t) = \sum\limits_{\beta=1}^{3} \int\limits_0^t \mathfrak{G}_{2\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau, \\ 2a w_3(t) + \sum\limits_{\beta=1}^{2} \int\limits_0^t \mathfrak{G}_{3\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau + \int\limits_0^t [-\tau + \mathfrak{G}_{33}(t-\tau)]\, w_3(\tau)\, d\tau = 0, \end{cases}
$$

die wir unter Anwendung der Bezeichnung

$$
\begin{aligned}
f_{1\beta}(t,\tau) &= \mathfrak{G}_{1\beta}(t-\tau) && (\beta = 1,2,3),\\
f_{2\beta}(t,\tau) &= \frac{\mathfrak{G}_{2\beta}(t-\tau)}{t-2\varkappa'} && (\beta = 1,2,3),\\
f_{3\beta}(t,\tau) &= -\frac{\mathfrak{G}_{3\beta}(t-\tau)}{2a} && (\beta = 1,2),\\
f_{33}(t,\tau) &= \frac{\tau - \mathfrak{G}_{33}(t-\tau)}{2a}
\end{aligned}
$$

auf die Form bringen:

$$
\begin{aligned}
t\,w_1(t) &= \sum_{\beta=1}^{3} \int_0^t f_{1\beta}(t,\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau,\\
w_\alpha(t) &= \sum_{\beta=1}^{3} \int_0^t f_{\alpha\beta}(t,\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \qquad (\alpha = 2,3).
\end{aligned}
$$

Wir beschreiben um $t = 0$ einen Kreis $\mathfrak{K}$, welcher den Punkt $2\varkappa$ weder im Innern, noch auf der Peripherie enthält; wir betrachten einen Sektor $\mathfrak{S}$, welcher von zwei von $t = 0$ nach $t = \infty$ gehenden Geraden begrenzt wird und die Stelle $t = 2\varkappa'$ weder im Innern noch auf der Begrenzung enthält. Wenn t dem Kreis $\mathfrak{K}$ oder dem Sektor $\mathfrak{S}$ und τ der Geraden $0 \ldots t$ angehört, sind die Funktionen $f_{\alpha\beta}(t,\tau)$ $(\alpha, \beta = 1,2,3)$ regulär. Es ist

$$
f_{11}(0,0) = \mathfrak{a}_{11}^{(1)} = \varrho + 1 = r,
$$

wobei der reelle Teil von r positiv angenommen werden kann (vgl. § 2). Nach Jahresber. **24**, S. 316—318 haben die Integralgleichungen eine Lösung

$$
w_\alpha(t) = t^{r-1}\,\mathfrak{p}_\alpha(t) \qquad (\alpha = 1,2,3),
$$

wo $\mathfrak{p}_\alpha(t)$ im Kreis $\mathfrak{K}$ und im Sektor $\mathfrak{S}$ im Endlichen überall regulär ist. Im Kreis $\mathfrak{K}$ ist

$$
w_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{A}_{\alpha n} \frac{t^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)} \qquad (\alpha = 1,2,3).
$$

Wir nehmen an, t befinde sich im Sektor $\mathfrak{S}$ auf der Geraden $\arg t = \omega$, wo $\Re \frac{e^{2i\omega}}{a} < 0$ sein möge, und es sei $h > \sigma(\omega) \geqq 0$. Wir zeigen, daß

$$|w_\alpha(t)| < C e^{h|t|}$$

ist, wenn die positive Konstante C hinreichend groß genommen wird.

Aus den beiden ersten Integralgleichungen (B) folgt

$$(\mathfrak{B}_1) \qquad |w_1(t)| \leqq \frac{1}{|t|} \sum_{\beta=1}^{3} \int_0^{|t|} |\mathfrak{G}_{1\beta}(t-\tau)| \cdot |w_\beta(\tau)|\, d|\tau|,$$

$$(\mathfrak{B}_2) \qquad |w_2(t)| \leqq \frac{1}{|t - 2\varkappa'|} \sum_{\beta=1}^{3} \int_0^{|t|} |\mathfrak{G}_{2\beta}(t-\tau)| \cdot |w_\beta(\tau)|\, d|\tau|.$$

Durch Differentiation der dritten Integralgleichung erhalten wir

$$\frac{dw_3}{dt} - \frac{1}{2a} t\, w_3(t) = -\sum_{\beta=1}^{3} \frac{\mathfrak{a}_{3\beta}^{(1)}}{2a} w_\beta(t) - \frac{1}{2a} \sum_{\beta=1}^{3} \int_0^t \mathfrak{G}'_{3\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau.$$

Wir fassen[11]) $w_3(t) = w_3(|t| e^{i\omega})$ als Funktion von $|t|$ auf und multiplizieren die Gleichung

$$\frac{\partial w_3}{\partial |t|} - \frac{e^{2i\omega}}{2a} |t|\, w_3(t) = -e^{i\omega} \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\mathfrak{a}_{3\beta}^{(1)}}{2a} w_\beta(t) - \frac{e^{i\omega}}{2a} \sum_{\beta=1}^{3} \int_0^t \mathfrak{G}'_{3\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau$$

mit der zu $w_3(t)$ konjugierten Größe. Der reelle Teil der linken Seite ist nicht größer als die Summe der absoluten Beträge der Glieder der rechten Seite. Wir erhalten so

$$(\mathfrak{B}_3) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial |w_3(t)|^2}{\partial |t|} - |t| \cdot |w_3(t)|^2 \Re \frac{e^{2i\omega}}{2a} \leqq \sum_{\beta=1}^{3} \left| \frac{\mathfrak{a}_{3\beta}^{(1)}}{2a} \right| \cdot |w_\beta(t)| \cdot |w_3(t)|$$
$$+ \frac{1}{|2a|} \sum_{\beta=1}^{3} \int_0^{|t|} |\mathfrak{G}'_{3\beta}(t-\tau)| \cdot |w_3(t)| \cdot |w_\beta(\tau)|\, d|\tau|.$$

Wir verstehen unter $\tilde{\mathfrak{S}}$ einen Teil des Sektors $\mathfrak{S}$, für welchen $\Re \frac{e^{2i\omega}}{a} < 0$ ist. Es sei R eine beliebig gewählte positive Zahl und C so groß angenommen, daß für $|t| \leqq R$ und für alle ω des Sektors $\tilde{\mathfrak{S}}$

$$|w_\alpha(t)| \leqq C e^{h|t|} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

ist. Wir behaupten, daß, wenn R hinreichend groß gewählt war, diese Ungleichungen auch für $|t| > R$ und für alle genannten ω gelten.

---

[11]) Vgl. Jahresber. 24, S. 219f.

Denn wäre dies nicht der Fall, so sei R' die untere Grenze derjenigen Werte von $|t|$, für welche diese Ungleichungen nicht bei allen ω gelten. Dann sind Werte $\alpha = \alpha'$, $\omega = \omega'$ so vorhanden, daß für $|t| = R'$, $\omega = \omega'$, $\alpha = \alpha'$ $|w_\alpha(t)| = Ce^{h|t|}$, aber für $\alpha = 1, 2, 3$, $|t| \leqq R'$ und alle ω von $\mathfrak{S}$ $|w_\alpha(t)| \leqq Ce^{h|t|}$ ist.

Ist $\alpha' = 1$, so folgt aus der Ungleichung $(\mathfrak{B}_1)$ für $\alpha = 1$, $|r| = R'$, $\omega = \omega'$

$$Ce^{h|t|} \leqq \frac{3}{|t|} \int\limits_0^{|t|} A\, e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)(|t|-|\tau|)} \cdot Ce^{h|\tau|}\, d|\tau|$$

oder nach Division mit $Ce^{h|t|}$, wenn $0 < \varepsilon < h - \sigma(\omega)$ ist,

$$1 \leqq \frac{3A}{(h-\sigma(\omega)-\varepsilon)|t|}.$$

Nimmt man R hinreichend groß, so ist die rechte Seite der für $|t| = R' > R$ geltenden Ungleichung kleiner als 1, also ein Widerspruch vorhanden. — Der Fall $\alpha' = 2$ wird ebenso behandelt.

Ist $\alpha' = 3$, so wenden wir die Ungleichung $(\mathfrak{B}_3)$ an. Für $|t| = R'$, $\omega = \omega'$ ist

$$\frac{1}{2}\frac{\partial |w_3(t)|^2}{\partial |t|} \geqq \frac{1}{2}\frac{d(C^2 e^{2h|t|})}{d|t|} = hC^2 e^{2h|t|},$$

also

$$hC^2 e^{2h|t|} - C^2 e^{2h|t|}|t|\,\Re\frac{e^{2i\omega}}{a}$$

$$\leqq \sum_{\beta=1}^{3}\left|\frac{\mathfrak{a}_{3\beta}^{(1)}}{2a}\right| \cdot C^2 e^{2h|t|} + \frac{3}{|a|}\int\limits_0^{|t|} A' e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)(|t|-|\tau|)} C^2 e^{2h|\tau|}\, d|\tau|$$

oder

$$\frac{h}{|t|} - \Re\frac{e^{2i\omega}}{a} \leqq \frac{1}{|t|}\sum_{\beta=1}^{3}\left|\frac{\mathfrak{a}_{3\beta}^{(1)}}{2a}\right| + \frac{3A'}{|a|(2h-\sigma(\omega)-\varepsilon)|t|};$$

hieraus folgt $-\Re\dfrac{e^{2i\omega}}{a} \leqq 0$ im Widerspruch mit der Annahme $\Re\dfrac{e^{2i\omega}}{a} < 0$.

Nehmen wir, was keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, a reell negativ an, so ist die Ungleichung

$$|w_\alpha(t)| < Ce^{h|t|} \quad \text{für } \Re(e^{2i\omega}) = \cos 2\omega > 0$$

erfüllt, d. h. für die Sektoren $-\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{4}$ und $-\frac{5\pi}{4} < \omega < -\frac{3\pi}{4}$, soweit diese dem Sektor $\mathfrak{S}$ angehören, d. h. den Punkt $\varkappa'$ nicht enthalten.

Das Laplacesche Integral

$$\mathfrak{Z}_\alpha = \int\limits_0^\infty w_\alpha(t)\, e^{-t\varkappa}\, dt$$

mit dem Integrationsweg $\arg t = \omega$ existiert nur in einem Gebiet, welches der Ungleichung $-\frac{\pi}{2} - \omega < \arg \mathfrak{x} < \frac{\pi}{2} - \omega$ genügt. Ist z. B. $a_{12}^{(1)}$ reell negativ, so sind die beiden rein imaginären Werte von $\varkappa'$ in keinem der beiden Sektoren $-\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{4}$ und $-\frac{5\pi}{4} < \omega < -\frac{3\pi}{4}$ enthalten. Je nachdem ω in dem ersten oder zweiten dieser beiden Intervalle variiert, liegt das Gültigkeitsgebiet des Laplaceschen Integrals zwischen $-\frac{3\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$ oder zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{7\pi}{4}$. Wegen $x = \mathfrak{x}^2$ ist in beiden Fällen das Differentialgleichungssystem (A″) vermittelst Laplacescher Integrale in einem Gebiet gelöst, für welches $-\frac{3\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}$ ist. — Ist z. B. $a_{12}^{(1)}$ reell positiv, so ist für $\varkappa' > 0$ $(\varkappa' < 0)$ das Intervall

$$-\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{4} \quad \left(-\frac{5\pi}{4} < \omega < -\frac{3\pi}{4}\right)$$

in die beiden Intervalle

$$-\frac{\pi}{4} < \omega < 0 \text{ und } 0 < \omega < \frac{\pi}{4}\left(-\frac{5\pi}{4} < \omega < -\pi \text{ und } -\pi < \omega < -\frac{3\pi}{4}\right)$$

zerlegt. Für $\varkappa' > 0$ $(\varkappa' < 0)$ treten an Stelle des Gültigkeitsgebietes

$$-\frac{3\pi}{4} < \arg \mathfrak{x} < \frac{3\pi}{4} \quad \left(\frac{\pi}{4} < \arg \mathfrak{x} < \frac{7\pi}{4}\right)$$

die Gültigkeitsgebiete

$$-\frac{3\pi}{4} < \arg \mathfrak{x} < \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad -\frac{\pi}{2} < \arg \mathfrak{x} < \frac{3\pi}{4}$$

$$\left(\frac{\pi}{4} < \arg \mathfrak{x} < \frac{3\pi}{2} \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{2} < \arg \mathfrak{x} < \frac{7\pi}{4}\right)$$

von Integralen. Wegen $x = \mathfrak{x}^2$ haben wir Lösungen des Differentialgleichungssystems (A″) in Gebieten, welche in den Sektoren

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg x < \pi \quad \text{und} \quad -\pi < \arg x < \frac{3\pi}{2}$$

liegen. — Das Laplacesche Integral $\mathfrak{Z}_\alpha$ wird durch die formale Reihe für $\mathfrak{Z}_\alpha$ mit dem einen oder anderen Wert von $\varkappa'$ asymptotisch dargestellt.

In den Differentialgleichungen am Anfang von § 4 setzen wir jetzt $a_3 = 0$. Indem wir die Rolle von y_1 und y_3 vertauschen, betrachten wir entweder das System

$$\frac{dy_1}{dx} + \sum_{\beta=1}^{3}\left(\frac{a_{1\beta}^{(1)}}{x} + \ldots\right) y_\beta = 0,$$

$$\frac{dy_2}{dx} + a y_2 + \sum_{\beta=1}^{3}\left(\frac{a_{2\beta}^{(1)}}{x} + \ldots\right) y_\beta = 0,$$

$$\frac{dy_3}{dx} + a y_3 + \sum_{\beta=1}^{3}\left(\frac{a_{3\beta}^{(1)}}{x} + \ldots\right) y_\beta = 0$$

mit $a \neq 0$ oder das System, welches aus diesem hervorgeht, wenn man die dritte Differentialgleichung durch

$$\frac{d y_3}{d x} + a y_3 + y_2 + \sum_{\beta=1}^{3} \left(\frac{a_{3\beta}^{(1)}}{x} + \ldots\right) y_\beta = 0$$

ersetzt.

Diese Differentialgleichungen werden durch Reihen

$$y_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}}$$

formal befriedigt; es ist $r = a_{11}^{(1)}$ und A_{10} beliebig, $A_{20} = 0$, $A_{30} = 0$.

Den Differentialgleichungen ordnen wir unter Anwendung der Bezeichnung

$$G_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\alpha\beta}^{(\lambda)} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

die Integralgleichungen zu:

$$t w_1(t) = \sum_{\beta=1}^{3} \int_0^t G_{1\beta}(t-\tau) w_\beta(\tau) d\tau,$$

$$(t-a) w_2(t) = \sum_{\beta=1}^{3} \int_0^t G_{2\beta}(t-\tau) w_\beta(\tau) d\tau,$$

$$(t-a) w_3(t) = \sum_{\beta=1}^{3} \int_0^t G_{3\beta}(t-\tau) w_\beta(\tau) d\tau.$$

Im Falle des abgeänderten Differentialgleichungssystems ist die dritte Integralgleichung durch

$$(t-a) w_3(t) = w_2(t) + \sum_{\beta=1}^{3} \int_0^t G_{3\beta}(t-\tau) w_\beta(\tau) d\tau$$

oder unter Berücksichtigung der zweiten Integralgleichung durch

$$(t-a)^2 w_3(t) = \sum_{\beta=1}^{3} \int_0^t [G_{2\beta}(t-\tau) + (t-a) G_{3\beta}(t-\tau)] w_\beta(\tau) d\tau$$

zu ersetzen.

Die Integralgleichungen lassen sich schreiben:

$$t w_1(t) = \sum_{\beta=1}^{3} \int_0^t f_{1\beta}(t,\tau) w_\beta(\tau) d\tau,$$

$$w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{3} \int_0^t f_{\alpha\beta}(t,\tau) w_\beta(\tau) d\tau \qquad (\alpha = 2, 3);$$

dabei ist

$$f_{1\beta}(t,\tau) = G_{1\beta}(t-\tau),$$

$$f_{\alpha\beta}(t,\tau) = \frac{G_{\alpha\beta}(t-\tau)}{t-a} \qquad (\alpha = 2, 3);$$

im Falle des abgeänderten Differentialgleichungssystems ist

$$f_{3\beta}(t,\tau) = \frac{G_{2\beta}(t-\tau)}{(t-a)^2} + \frac{G_{3\beta}(t-\tau)}{t-a}.$$

Wir beschreiben um $t = 0$ einen Kreis $\mathfrak{K}$ von einem Radius kleiner als $|a|$; wir betrachten einen Sektor $\mathfrak{S}$, welcher von zwei von $t = 0$ nach $t = \infty$ gehenden Geraden begrenzt wird und die Stelle a weder im Innern, noch auf der Begrenzung enthält. Die Funktionen $f_{\alpha\beta}(t,\tau)$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ sind regulär, wenn t dem Kreis $\mathfrak{K}$ oder dem Sektor $\mathfrak{S}$ und τ der Geraden $0 \ldots t$ angehört. Es ist

$$f_{11}(0,0) = \varrho + 1 = a_{11}^{(1)} = r,$$

wo der reelle Teil von r positiv angenommen werden kann. Die Integralgleichungen besitzen eine solche Lösung $w_\alpha(t)$, daß $t^{-r+1} w_\alpha(t)$ im Kreis $\mathfrak{K}$ und im Sektor $\mathfrak{S}$ im Endlichen regulär und im Kreis $\mathfrak{K}$

$$w_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{\alpha n} \frac{t^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)}$$

ist. Das Verfahren Jahresber. **24**, S. 321/22 ist hier ohne weiteres anwendbar. Wie früher werden die Differentialgleichungen durch Laplacesche Integrale befriedigt.

§ 5.

Die in § 1 gestellten Aufgaben können mit den in § 2 bis 4 dargestellten Methoden behandelt werden. Wir führen einen Teil der Aufgaben unter vereinfachten Voraussetzungen durch[12]).

Die *Lösungen des Differentialgleichungssystems der Funktion* Γ_2 mögen unter der Annahme untersucht werden, daß der Punkt x, y auf der Geraden $x = at$, $y = bt$ ins Unendliche geht. Die in § 1 aufgestellten Differentialgleichungen sind für $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

$$\frac{dz}{dt} = ap + bq,$$

$$\frac{dp}{dt} = 2bz - ap + bq - \frac{\beta'}{t} z + \frac{\beta - 1}{t} p = 0,$$

$$\frac{dq}{dt} = 2az + ap - bq - \frac{\beta}{t} z + \frac{\beta' - 1}{t} q = 0;$$

---

[12]) Der in den folgenden Beispielen auftretende Exponent r kann mit positivem Realteil vorausgesetzt werden. Wie in § 2 erreicht man durch eine einfache Transformation der abhängigen Veränderlichen, daß der reelle Teil von r beliebig groß wird.

durch die Substitution

$$z_1 = \frac{a p - b q}{a - b},$$

$$z_2 = z + \frac{\sqrt{a}\, p - \sqrt{b}\, q}{\sqrt{a} - \sqrt{b}},$$

$$z_3 = z + \frac{\sqrt{a}\, p + \sqrt{b}\, q}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

oder

$$z = -z_1 + \frac{z_2 + z_3}{2},$$

$$p = z_1 - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \frac{z_2 - z_3}{2},$$

$$q = z_1 - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \frac{z_2 - z_3}{2}$$

gehen sie über in

$$\frac{d z_1}{d t} + (a + b) z_1 + \frac{\sum_{k=1}^{3} a_{1k}^{(1)} z_k}{t} = 0,$$

$$\frac{d z_2}{d t} + 2\sqrt{a b}\, z_2 + \frac{\sum_{k=1}^{3} a_{2k}^{(1)} z_k}{t} = 0,$$

$$\frac{d z_3}{d t} - 2\sqrt{a b}\, z_3 + \frac{\sum_{k=1}^{3} a_{3k}^{(1)} z_k}{t} = 0,$$

wo die $a_{\alpha\beta}^{(1)}$ homogene Funktionen 0-ten Grades in a, b sind:

$$a_{11}^{(1)} = 1 - \beta - \beta', \quad a_{12}^{(1)} = \frac{\beta' \sqrt{a} + \beta \sqrt{b}}{2(\sqrt{a} + \sqrt{b})}, \quad a_{13}^{(1)} = \frac{\beta' \sqrt{a} - \beta \sqrt{b}}{2(\sqrt{a} - \sqrt{b})},$$

$$a_{21}^{(1)} = 1 - \beta - \beta', \quad a_{22}^{(1)} = \tfrac{1}{2}, \quad a_{23}^{(1)} = a_{13}^{(1)} - \tfrac{1}{2},$$

$$a_{31}^{(1)} = 1 - \beta - \beta', \quad a_{32}^{(1)} = a_{12}^{(1)} - \tfrac{1}{2}, \quad a_{33}^{(1)} = \tfrac{1}{2}.$$

Zunächst sei $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$. Wenn wir

$$z_i = e^{-(a+b)t} \mathfrak{z}_i\ \text{[13]}$$

setzen, haben wir die Differentialgleichungen

$$\frac{d \mathfrak{z}_1}{d t} + \ldots = 0,$$

$$\frac{d \mathfrak{z}_2}{d t} - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \mathfrak{z}_2 + \ldots = 0,$$

$$\frac{d \mathfrak{z}_3}{d t} - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \mathfrak{z}_3 + \ldots = 0$$

[13]) Der Index i durchläuft die Werte 1, 2, 3.

mit der formalen Lösung

$$\mathfrak{z}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{z}_{in}}{t^{r+n}}.$$

Es ist $r = a_{11}^{(1)} = 1 - \beta - \beta'$ und $\mathfrak{z}_{20} = \mathfrak{z}_{30} = 0$. Aus

$$n\,\mathfrak{z}_{1n} = a_{12}^{(1)}\mathfrak{z}_{2n} + a_{13}^{(1)}\mathfrak{z}_{3n},$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2\,\mathfrak{z}_{2n} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k}^{(1)}\mathfrak{z}_{k,\,n-1} - (r+n-1)\,\mathfrak{z}_{2,\,n-1},$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2\,\mathfrak{z}_{3n} = \sum_{k=1}^{3} a_{3k}^{(1)}\mathfrak{z}_{k,\,n-1} - (r+n-1)\,\mathfrak{z}_{3,\,n-1}$$

ergibt sich $\mathfrak{z}_{in} = \mathfrak{z}_{in}(a, b)$ als rationale Funktion von $\sqrt{a}, \sqrt{b}$, welche in a, b homogen vom Grad $-n$ ist:

$$\mathfrak{z}_{in}(\tau a, \tau b) = \tau^{-n}\,\mathfrak{z}_{in}(a, b).$$

Demnach haben wir

$$z_i = e^{-(a+b)t}\,t^{\beta+\beta'-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{z}_{in}(a, b)}{t^n},$$

dabei ist

$$e^{-(a+b)t} = e^{-x-y}, \quad \frac{\mathfrak{z}_{in}(a, b)}{t^n} = \mathfrak{z}_{in}(x, y).$$

Die Substitution

$$z_i = e^{2\sqrt{ab}\,t}\,\mathfrak{z}_i$$

führt auf die Differentialgleichungen

$$\frac{d\mathfrak{z}_1}{dt} + (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2\,\mathfrak{z}_1 + \ldots = 0,$$

$$\frac{d\mathfrak{z}_2}{dt} + 4\sqrt{ab}\,\mathfrak{z}_2 + \ldots = 0,$$

$$\frac{d\mathfrak{z}_3}{dt} + \ldots = 0$$

mit der Lösung

$$\mathfrak{z}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{z}_{in}}{t^{r+n}}.$$

Dabei ist $r = a_{33}^{(1)} = \frac{1}{2}$ und $\mathfrak{z}_{10} = \mathfrak{z}_{20} = 0$, ferner

$$n\,\mathfrak{z}_{3n} = a_{31}^{(1)}\mathfrak{z}_{1n} + a_{32}^{(1)}\mathfrak{z}_{2n},$$

$$-(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2\,\mathfrak{z}_{1n} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}^{(1)}\mathfrak{z}_{k,\,n-1} - (r+n-1)\,\mathfrak{z}_{1,\,n-1},$$

$$-4\sqrt{ab}\,\mathfrak{z}_{2n} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k}^{(1)}\mathfrak{z}_{k,\,n-1} - (r+n-1)\,\mathfrak{z}_{2,\,n-1}$$

so daß $\mathfrak{z}_{in}$ wie vorhin von a, b abhängt. Wir haben

$$z_i = e^{2\sqrt{ab}\,t}\,t^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{z}_{in}(a, b)}{t^n};$$

es ist

$$e^{2\sqrt{abt}} = e^{2\sqrt{xy}}, \quad \frac{\mathfrak{z}_{in}(a, b)}{t^n} = \mathfrak{z}_{in}(x, y).$$

Durch Änderung des Vorzeichens von $\sqrt{b}$ ergibt sich hieraus eine weitere Lösung.

Der Fall $a = b = 1$ ist besonders zu behandeln.

Die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= p + q, \\
\frac{dp}{dt} &= 2z - p + q - \frac{\beta'}{t} z + \frac{\beta - 1}{t} p, \\
\frac{dq}{dt} &= 2z + p - q - \frac{\beta}{t} z + \frac{\beta' - 1}{t} q
\end{aligned}$$

gehen durch die Substitution

$$z_1 = p - q, \quad z_2 = z - \frac{p+q}{2}, \quad z_3 = z + \frac{p+q}{2}$$

über in

$$\frac{dz_1}{dt} + 2z_1 + \frac{\sum\limits_{k=1}^{3} a_{1k}^{(1)} z_k}{t} = 0,$$

$$\frac{dz_2}{dt} + 2z_2 + \frac{\sum\limits_{k=1}^{3} a_{2k}^{(1)} z_k}{t} = 0,$$

$$\frac{dz_3}{dt} - 2z_3 + \frac{\sum\limits_{k=1}^{3} a_{3k}^{(1)} z_k}{t} = 0;$$

dabei ist

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(1)} &= 1 - \frac{\beta + \beta'}{2}, & a_{12}^{(1)} &= 0, & a_{13}^{(1)} &= \beta' - \beta, \\
a_{21}^{(1)} &= \frac{\beta - \beta'}{4}, & a_{22}^{(1)} &= \frac{1 - \beta - \beta'}{2}, & a_{23}^{(1)} &= -\frac{1}{2}, \\
a_{31}^{(1)} &= \frac{\beta' - \beta}{4}. & a_{32}^{(1)} &= \frac{\beta + \beta' - 1}{2}, & \sigma_{33}^{(1)} &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Wenn man

$$z_i = e^{-2t} \mathfrak{z}_i$$

setzt, hat man die Differentialgleichungen

$$\frac{d\mathfrak{z}_1}{dt} + \ldots = 0, \quad \frac{d\mathfrak{z}_2}{dt} + \ldots = 0, \quad \frac{d\mathfrak{z}_3}{dt} - 4\mathfrak{z}_3 + \ldots = 0$$

von der Form (A′) in § 4. Es ist

$$\mathfrak{z}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{z}_{in}}{t^{r+n}},$$

$\mathfrak{z}_{20} = 0$ und

$$\left(1 - \frac{\beta + \beta'}{2} - r\right)\mathfrak{z}_{10} = 0.$$

$$\frac{\beta - \beta'}{4}\mathfrak{z}_{10} + \left(\frac{1 - \beta - \beta'}{2} - r\right)\mathfrak{z}_{20} = 0,$$

also entweder

(1) $$r = 1 - \frac{\beta + \beta'}{2}, \quad \mathfrak{z}_{20} = \frac{\beta - \beta'}{2}\mathfrak{z}_{10}$$

oder

(2) $$r = \frac{1 - \beta - \beta'}{2}, \quad \mathfrak{z}_{10} = 0.$$

Der Ansatz

$$z_i = e^{2t}\mathfrak{z}_i$$

führt auf die Differentialgleichungen

$$\frac{d\mathfrak{z}_1}{dt} + 4\mathfrak{z}_1 + \ldots = 0, \quad \frac{d\mathfrak{z}_2}{dt} + 4\mathfrak{z}_2 + \ldots = 0, \quad \frac{d\mathfrak{z}_3}{dt} + \ldots = 0.$$

Wir setzen

$$\mathfrak{z}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{z}_{in}}{t^{r+n}}$$

und haben $r = \frac{1}{2}$, $\mathfrak{z}_{10} = \mathfrak{z}_{20} = 0$.

Zu den Differentialgleichungen für z_1, z_2, z_3, wie sie im allgemeinen Falle $a \neq b$ gelten, gehören nach § 2 die Differentialgleichungen

$$(\zeta - a - b)\frac{dw_1}{d\zeta} = (a_{11}^{(1)} - 1)\, w_1(\zeta) + a_{12}^{(1)} w_2(\zeta) + a_{13}^{(1)} w_3(\zeta),$$

$$(\zeta - 2\sqrt{ab})\frac{dw_2}{d\zeta} = a_{21}^{(1)} w_1(\zeta) + (a_{22}^{(1)} - 1)\, w_2(\zeta) + a_{23}^{(1)} w_3(\zeta),$$

$$(\zeta + 2\sqrt{ab})\frac{dw_3}{d\zeta} = a_{31}^{(1)} w_1(\zeta) + a_{32}^{(1)} w_2(\zeta) + (a_{33}^{(1)} - 1)\, w_3(\zeta)$$

mit einer der Bedingungen:

(1) $$w_2(a + b) = w_3(a + b) = 0;$$

(2) $$w_1(2\sqrt{ab}) = w_3(2\sqrt{ab}) = 0;$$

(3) $$w_1(-2\sqrt{ab}) = w_2(-2\sqrt{ab}) = 0.$$

Die Laplaceschen Integrale

$$z_i = \int^{\infty} w_i(\zeta)\, e^{-\zeta t} d\zeta$$

stellen, je nachdem als untere Grenze $a + b$, $2\sqrt{ab}$ oder $-2\sqrt{ab}$ gewählt wird, drei verschiedene Lösungen der Differentialgleichungen für z_1, z_2, z_3 dar, die durch die aufgestellten Reihen asymptotisch dargestellt werden.

Im Ausnahmefall haben wir Differentialgleichungen

$$(\zeta - 2)\frac{dw_1}{d\zeta} = \ldots, \quad (\zeta - 2)\frac{dw_2}{d\zeta} = \ldots, \quad (\zeta + 2)\frac{dw_3}{d\zeta} = \ldots,$$

die unter einer der folgenden Bedingungen zu lösen sind:

(1) $$w_2(2) = w_3(2) = 0;$$

(2) $$w_1(2) = w_3(2) = 0:$$

(3) $$w_1(-2) = w_2(-2) = 0.$$

Wir haben zwei Systeme Laplacescher Integrale

$$z_i = \int^{\infty} w_i(\zeta)\, e^{-\zeta t} d\zeta$$

mit der unteren Grenze 2 und eines mit der unteren Grenze -2, welche durch die für den Ausnahmefall ermittelten Reihen asymptotisch dargestellt werden.

Auch in den *Differentialgleichungen der Funktion* Φ_2 setzen wir $x = at$, $y = bt$. Wenn wir in § 1 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ setzen, haben wir die Differentialgleichungen

$$\frac{dz}{dt} = ap + bq,$$

$$\frac{dp}{dt} = ap + \frac{\beta z - \gamma p}{t},$$

$$\frac{dq}{dt} = bq + \frac{\beta' z - \gamma q}{t},$$

welche durch die Substitution

$$z_1 = z - p - q, \quad z_2 = p, \quad z_3 = q,$$

$$z = z_1 + z_2 + z_3, \quad p = z_2, \quad q = z_3$$

in

$$\frac{dz_1}{dt} + \frac{a_{11}^{(1)} z_1 + a_{12}^{(1)} z_2 + a_{13}^{(1)} z_3}{t} = 0,$$

$$\frac{dz_2}{dt} - az_2 + \frac{a_{21}^{(1)} z_1 + a_{22}^{(1)} z_2 + a_{23}^{(1)} z_3}{t} = 0,$$

$$\frac{dz_3}{dt} - bz_3 + \frac{a_{31}^{(1)} z_1 + a_{32}^{(1)} z_2 + a_{33}^{(1)} z_3}{t} = 0$$

übergehen; dabei ist

$$a_{11}^{(1)} = \beta + \beta', \quad a_{12}^{(1)} = \beta + \beta' - \gamma, \quad a_{13}^{(1)} = \beta + \beta' - \gamma,$$

$$a_{21}^{(1)} = -\beta, \quad a_{22}^{(1)} = \gamma - \beta, \quad a_{23}^{(1)} = -\beta,$$

$$a_{31}^{(1)} = -\beta', \quad a_{32}^{(1)} = -\beta' \quad a_{33}^{(1)} = \gamma - \beta'.$$

Wir machen die Annahme $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a + b \neq 0$. Unsere Differentialgleichungen besitzen als erste formale Lösung

$$z_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_{in}}{t^{r+n}}.$$

Dabei ist $r = a_{11}^{(1)} = \beta + \beta'$ und $z_{20} = z_{30} = 0$. Aus den Rekursionsformeln

$$n z_{1n} = a_{12}^{(1)} z_{2n} + a_{13}^{(1)} z_{3n}.$$

$$a z_{2n} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k}^{(1)} z_{k,\,n-1} - (r+n-1)\,\mathfrak{z}_{2,\,n-1},$$

$$b z_{3n} = \sum_{k=1}^{3} a_{3k}^{(1)} z_{k,\,n-1} - (r+n-1)\,\mathfrak{z}_{3,\,n-1}$$

ergibt sich $z_{in} = z_{in}(a, b)$ als ganze homogene Funktion n-ten Grades von $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, so daß

$$z_{in}(\tau a, \tau b) = \tau^{-n} z_{in}(a, b)$$

ist. Wir haben demnach

$$z_i = \frac{1}{t^{\beta+\beta'}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_{in}(a, b)}{t^n} = \frac{1}{t^{\beta+\beta'}} \sum_{n=0}^{\infty} z_{in}(x, y).$$

Als zweite Lösung haben wir

$$z_i = e^{at} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{z}_{in}}{t^{r+n}}.$$

Es ist $r = a_{22}^{(1)} = \gamma - \beta$ und $\mathfrak{z}_{10} = \mathfrak{z}_{30} = 0$, ferner

$$n\,\mathfrak{z}_{2n} = a_{21}^{(1)} \mathfrak{z}_{1n} + a_{23}^{(1)} \mathfrak{z}_{3n},$$

$$a\,\mathfrak{z}_{1n} + \sum_{k=1}^{3} a_{1k}^{(1)} \mathfrak{z}_{k,\,n-1} = (r+n-1)\,\mathfrak{z}_{1,\,n-1},$$

$$(a-b)\,\mathfrak{z}_{3n} + \sum_{k=1}^{3} a_{3k}^{(1)} \mathfrak{z}_{k,\,n-1} = (r+n-1)\,\mathfrak{z}_{3,\,n-1}$$

so daß sich $\mathfrak{z}_{in} = \mathfrak{z}_{in}(a, b)$ als ganze homogene Funktion n-ten Grades von $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a-b}$ ergibt:

$$\mathfrak{z}_{in}(\tau a, \tau b) = \tau^{-n} \mathfrak{z}_{in}(a, b).$$

Es ist also

$$z_i = e^{at} t^{\beta-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{z}_{in}(a, b)}{t^n}.$$

Dabei ist

$$e^{at} = e^{x}, \qquad \frac{\mathfrak{z}_{in}(a, b)}{t^n} = \mathfrak{z}_{in}(x, y).$$

Man erhält eine dritte Lösung, wenn man in der zweiten a und b vertauscht.

Im Falle $a = b = 1$ werden die Veränderlichen z_1, z_2, z_3 beibehalten. Die erste Lösung bleibt bestehen. Die Substitution

$$z_i = e^t \mathfrak{z}_i$$

führt zu den Differentialgleichungen

$$\frac{d\mathfrak{z}_1}{dt} + \mathfrak{z}_1 + \ldots = 0, \quad \frac{d\mathfrak{z}_2}{dt} + \ldots = 0, \quad \frac{d\mathfrak{z}_3}{dt} + \ldots = 0$$

von der Form (A′) in § 4. Man hat

$$\mathfrak{z}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{z}_{in}}{t^{r+n}};$$

es ist $\mathfrak{z}_{10} = 0$ und

$$(\gamma - \beta - r)\mathfrak{z}_{20} - \beta\mathfrak{z}_{30} = 0,$$
$$-\beta'\mathfrak{z}_{20} + (\gamma - \beta' - r)\mathfrak{z}_{30} = 0,$$

also entweder

(1) $\qquad r = \gamma, \qquad \mathfrak{z}_{20} + \mathfrak{z}_{30} = 0,$

oder

(2) $\qquad r = \gamma - \beta - \beta', \qquad \beta'\mathfrak{z}_{20} = \beta\mathfrak{z}_{30}.$

Die Laplaceschen Integrale, welche durch die aufgestellten Reihen asymptotisch dargestellt werden, können wieder nach der in § 2 dargestellten Methode gebildet werden.

Die *Differentialgleichungen der Funktion* Φ_3 gehen für $x = at$, $y = bt$ über in

$$\frac{dz}{dt} = ap + bq,$$
$$\frac{dp}{dt} = ap + \frac{\beta z - \gamma p}{t},$$
$$\frac{dq}{dt} = \frac{z - \gamma q}{t}$$

oder, wenn

$$z_1 = q, \quad z_2 = p - z, \quad z_3 = p$$

gesetzt wird, in die Gleichungen

$$\frac{dz_1}{dt} + \frac{\gamma z_1 + z_2 - z_3}{t} = 0,$$
$$\frac{dz_2}{dt} + bz_1 + \frac{\beta z_2 + (\gamma - \beta)z_3}{t} = 0,$$
$$\frac{dz_3}{dt} - az_3 + \frac{\beta z_2 + (\gamma - \beta)z_3}{t} = 0,$$

welche die Form (A″) in § 4 haben, wenn $a \neq 0$, $b \neq 0$ ist. Hier beschränken wir uns der Einfachheit halber auf reelle positive Werte von a, b (und von t).

Durch die Substitution

$$t = \mathfrak{t}^2, \quad z_1 = e^{\varkappa' \mathfrak{t}} Z_1, \quad z_2 = \mathfrak{t} e^{\varkappa' \mathfrak{t}} Z_2, \quad z_3 = e^{\varkappa' \mathfrak{t}} Z_3,$$

$$\mathfrak{Z}_1 = \varkappa' Z_1 - 2 Z_2, \quad \mathfrak{Z}_2 = \varkappa' Z_1 + 2 Z_2, \quad \mathfrak{Z}_3 = Z_3,$$

wo nacheinander beide Werte $\varkappa' = \pm 2\sqrt{b}$ einzuführen sind, ergeben sich unter Anwendung der Bezeichnung

$$\mathfrak{a}_{11}^{(1)} = \mathfrak{a}_{22}^{(1)} = \beta + \gamma + \frac{1}{2}, \quad \mathfrak{a}_{12}^{(1)} = \mathfrak{a}_{21}^{(1)} = -\beta + \gamma - \frac{1}{2},$$

$$\mathfrak{a}_{13}^{(1)} = \mathfrak{a}_{23}^{(1)} = -2\varkappa', \qquad \mathfrak{a}_{13}^{(2)} = -\mathfrak{a}_{23}^{(2)} = 4(\beta - \gamma),$$

$$\mathfrak{a}_{31}^{(1)} = -\frac{\beta}{2}, \quad \mathfrak{a}_{32}^{(1)} = \frac{\beta}{2}, \quad \mathfrak{a}_{33}^{(1)} = \varkappa', \quad \mathfrak{a}_{33}^{(2)} = 2(\gamma - \beta)$$

die Differentialgleichungen [14])

$$\frac{d\mathfrak{Z}_1}{d\mathfrak{t}} + \frac{1}{\mathfrak{t}} \sum_{k=1}^{3} \mathfrak{a}_{1k}^{(1)} \mathfrak{Z}_k + \frac{\mathfrak{a}_{13}^{(2)}}{\mathfrak{t}^2} \mathfrak{Z}_3 = 0,$$

$$\frac{d\mathfrak{Z}_2}{d\mathfrak{t}} + 2\varkappa' \mathfrak{Z}_2 + \frac{1}{\mathfrak{t}} \sum_{k=1}^{3} \mathfrak{a}_{2k}^{(1)} \mathfrak{Z}_k + \frac{\mathfrak{a}_{23}^{(2)}}{\mathfrak{t}^2} \mathfrak{Z}_3 = 0,$$

$$\mathfrak{t}^{-1} \frac{d\mathfrak{Z}_3}{d\mathfrak{t}} - 2a\, \mathfrak{Z}_3 + \frac{1}{\mathfrak{t}} \sum_{k=1}^{3} \mathfrak{a}_{3k}^{(1)} \mathfrak{Z}_k + \frac{\mathfrak{a}_{33}^{(2)}}{\mathfrak{t}^2} \mathfrak{Z}_3 = 0.$$

Diese werden formal befriedigt durch Reihen

$$\mathfrak{Z}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{A}_{in}}{\mathfrak{t}^{r+n}},$$

worin $r = \beta + \gamma + \frac{1}{2}$, $\mathfrak{A}_{20} = \mathfrak{A}_{30} = 0$ ist und die $\mathfrak{A}_{in}$ sowohl für $\varkappa' = +2\sqrt{b}$ (positiv) als auch für $\varkappa' = -2\sqrt{b}$ (negativ) zu bilden sind. Diesen Differentialgleichungen ordnen wir die Integralgleichungen

$$\zeta w_1(\zeta) = \sum_{k=1}^{3} \mathfrak{a}_{1k}^{(1)} \int_0^{\zeta} w_k(\tau)\, d\tau + \mathfrak{a}_{13}^{(2)} \int_0^{\zeta} (\zeta - \tau)\, w_3(\tau)\, d\tau,$$

$$(\zeta - 2\varkappa')\, w_2(\zeta) = \sum_{k=1}^{3} \mathfrak{a}_{2k}^{(1)} \int_0^{\zeta} w_k(\tau)\, d\tau + \mathfrak{a}_{23}^{(2)} \int_0^{\zeta} (\zeta - \tau)\, w_3(\tau)\, d\tau,$$

$$2a\, w_3(\zeta) = \sum_{k=1}^{3} \mathfrak{a}_{3k}^{(1)} \int_0^{\zeta} w_k(\tau)\, d\tau + \int_0^{\zeta} [-\tau + \mathfrak{a}_{33}^{(2)} (\zeta - \tau)]\, w_3(\tau)\, d\tau$$

zu, welche durch zweimalige Differentiation in Differentialgleichungen übergehen. Die Lösung

$$w_i(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{A}_{in} \frac{\zeta^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)}$$

[14]) Die Größe a in den Gleichungen (A) ist hier durch $-a$ ersetzt.

und ihre Fortsetzung (wie in § 4) dient zur Bildung der Laplaceschen Integrale

$$\mathfrak{Z}_i = \int_0^\infty w_i(\zeta) e^{-\zeta t} d\zeta.$$

Was in § 4 über die Integrationswege und Gültigkeitsgebiete der den Differentialgleichungen (A) genügenden Laplaceschen Integrale gesagt worden ist, gilt auch hier, wenn man $\varkappa' = \pm 2\sqrt{a_{12}^{(1)}}$ durch $\varkappa' = \pm 2\sqrt{b}$, ferner t, x und x bzw. durch ζ, t und t ersetzt.

Durch die Substitution

$$z_i = e^{a t} u_i$$

erhalten wir unter Anwendung der Bezeichnung

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)} &= \gamma, & a_{12}^{(1)} &= 1, & a_{13}^{(1)} &= -1, \\ a_{21}^{(1)} &= 0, & a_{22}^{(1)} &= b, & a_{23}^{(1)} &= \gamma - \beta, \\ a_{31}^{(1)} &= 0, & a_{32}^{(1)} &= \beta, & a_{33}^{(1)} &= \gamma - \beta \end{aligned}$$

die Differentialgleichungen

$$\frac{d u_1}{dt} + a u_1 + \frac{1}{t} \sum_k a_{1k}^{(1)} u_k = 0,$$

$$\frac{d u_2}{dt} + a u_2 + b u_1 + \frac{1}{t} \sum_k a_{2k}^{(1)} u_k = 0,$$

$$\frac{d u_3}{dt} + \frac{1}{t} \sum_k a_{3k}^{(1)} u_k = 0$$

mit der formalen Lösung

$$u_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{in}}{t^{r+n}},$$

worin $r = \gamma - \beta$, $A_{10} = A_{20} = 0$ ist. Die entsprechenden Integralgleichungen

$$(\zeta - a) w_1(\zeta) = \sum_k a_{1k}^{(1)} \int_0^\zeta w_k(\tau) d\tau,$$

$$(\zeta - a) w_2(\zeta) = b w_1(\zeta) + \sum_k a_{2k}^{(1)} \int_0^\zeta w_k(\tau) d\tau,$$

$$\zeta w_3(\zeta) = \sum_k a_{3k}^{(1)} \int_0^\zeta w_k(\tau) d\tau$$

gehen durch Differentiation in Differentialgleichungen erster Ordnung über. Mit der Lösung

$$w_i(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{in} \frac{\zeta^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)}$$

und deren Fortsetzung bilden wir die Laplaceschen Integrale

$$u_i = \int_0^\infty w_i(\zeta) e^{-\zeta t} d\zeta,$$

welche, wenn das Argument $\omega = \arg \zeta$ des Integrationsweges zwischen 0 und -2π variiert, für $-\frac{\pi}{2} < \arg t < \frac{5\pi}{2}$ (insbesondere auch für $\arg t = 0$ und $\arg t = 2\pi$) existieren und durch die oben angegebenen formalen Reihen asymptotisch dargestellt werden.

Das *Differentialgleichungssystem der Funktion* Γ_1, in welchem $x = at$, $y = bt$ gesetzt wird, ist am Ende von § 1. aufgestellt. Durch die Substitution

$$z_1 = z, \quad z_2 = q - \frac{a}{b} p, \quad z_3 = p$$

geht es über in

$$\frac{dz_1}{dt} = bz_2 + 2az_3,$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \left(-\frac{\beta}{t} + \ldots\right) z_1 + \left(-b - \frac{1+\alpha-\beta'}{t} + \ldots\right) z_2 + \left(\frac{a(\beta+2\beta')}{bt} + \ldots\right) z_3,$$

$$t^{-1}\frac{dz_3}{dt} = \left(\frac{2b\alpha}{t} + \ldots\right) z_1 + \left(\frac{0}{t} + \ldots\right) z_2 + \left(2ab + \frac{0}{t} + \ldots\right) z_3,$$

wo an Stelle der Punkte Glieder mit $t^{-2}, \ldots$ stehen. Setzt man

$$Z_1 = z_1 + z_2, \quad Z_2 = z_2, \quad Z_3 = z_3,$$

so hat man Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{dZ_1}{dt} + 2aZ_3 + \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{a_{1k}^{(1)}}{t} + \ldots\right) Z_k = 0,$$

$$\frac{dZ_2}{dt} + bZ_2 + \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{a_{2k}^{(1)}}{t} + \ldots\right) Z_k = 0,$$

$$t^{-1}\frac{dZ_3}{dt} - 2abZ_3 + \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{a_{3k}^{(1)}}{t} + \ldots\right) Z_k = 0;$$

dabei ist

$a_{11}^{(1)} = a_{21}^{(1)} = \beta$, $a_{12}^{(1)} = a_{22}^{(1)} = 1 + \alpha - \beta - \beta'$, $a_{13}^{(1)} = a_{23}^{(1)} = -\frac{a(\beta+2\beta')}{b}$,
$a_{31}^{(1)} = -2b\alpha$, $a_{32}^{(1)} = 2b\alpha$, $a_{33}^{(1)} = 0$.

Dieses System, in welchem $a \neq 0$, $b \neq 0$ sein möge, kann ähnlich behandelt werden wie das System (A) in § 4. In den auf (A) bezüglichen Formeln ist $2\varkappa'$ durch b, a durch $-ab$ zu ersetzen; der Hinzutritt des Gliedes $2aZ_3$ bedingt keine wesentlichen Änderungen. Wir nehmen $a > 0$, $b > 0$ an.

Unserem Differentialgleichungssystem, welches durch Reihen

$$Z_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{in}}{t^{r+n}}$$

mit $A_{20} = A_{30}$ formal befriedigt wird, ordnen wir die Integralgleichungen

$$\zeta w_1(\zeta) = 2a w_3(\zeta) + \sum_{k=1}^{3} \int_0^{\zeta} G_{1k}(\zeta - \tau) w_k(\tau) d\tau,$$

$$(\zeta - b) w_2(\zeta) = \sum_{k=1}^{3} \int_0^{\zeta} G_{2k}(\zeta - \tau) w_k(\tau) d\tau,$$

$$ab w_3(\zeta) = \sum_{k=1}^{2} \int_0^{\zeta} G_{3k}(\zeta - \tau) w_k(\tau) d\tau + \int_0^{\zeta} [-\tau + G_{33}(\zeta - \tau)] w_3(\tau) d\tau$$

zu, wobei

$$G_{ik}(\zeta) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{ik}^{(\lambda)} \frac{\zeta^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

ist. Vermittels der Lösung mit der singulären Stelle $\zeta = b$

$$w_i(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{in} \frac{\zeta^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)}$$

bilden wir die Laplaceschen Integrale

$$Z_i = \int_0^{\infty} w_i(\zeta) e^{-\zeta t} d\zeta,$$

deren Integrationsweg $\arg \zeta = \omega$ wegen $ab > 0$ die Bedingung $\cos 2\omega > 0$ erfüllen muß; wegen $b > 0$ ist $\omega = 0$ auszuschließen. Demnach kommen die Intervalle $-\frac{5\pi}{4} < \omega < -\frac{3\pi}{4}$, $0 < \omega < \frac{\pi}{4}$ und $-\frac{\pi}{4} < \omega < 0$ in Betracht. Ihnen entsprechen Gültigkeitsgebiete der Laplaceschen Integrale, welche den Sektoren $\frac{\pi}{4} < \arg t < \frac{7\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4} < \arg t < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \arg t < \frac{3\pi}{4}$ angehören. In den Gültigkeitsgebieten genügen die Laplaceschen Integrale den Differentialgleichungen und werden durch die formalen Reihen asymptotisch dargestellt.

Wenn man

$$Z_i = e^{-bt} \mathfrak{Z}_i$$

setzt, erhält man die Differentialgleichungen

$$\frac{d\mathfrak{Z}_1}{dt} - b\mathfrak{Z}_1 + 2a\mathfrak{Z}_3 + \sum_k \left(\frac{a_{1k}^{(1)}}{t} + \ldots\right) \mathfrak{Z}_k = 0,$$

$$\frac{d\mathfrak{Z}_2}{dt} + \sum_k \left(\frac{a_{2k}^{(1)}}{t} + \ldots\right) \mathfrak{Z}_k = 0,$$

$$t^{-1} \frac{d\mathfrak{Z}_3}{dt} - \left(2ab + \frac{b}{t}\right) \mathfrak{Z}_3 + \sum_k \left(\frac{a_{3k}^{(1)}}{t} + \ldots\right) \mathfrak{Z}_k = 0,$$

welchen Integralgleichungen

$$(\zeta + b)\, w_1(\zeta) = 2a\, w_3(\zeta) + \ldots,$$
$$\zeta\, w_2(\zeta) = \ldots,$$
$$a b\, w_3(\zeta) = \ldots$$

entsprechen. Der formalen Lösung der Differentialgleichungen

$$\mathfrak{Z}_\iota = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{A}_{\iota n}}{t^{r+n}}$$

mit $\mathfrak{A}_{10} = \mathfrak{A}_{20} = 0$ entspricht die Lösung

$$w_\iota(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{A}_{\iota n} \frac{\zeta^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)}$$

der Integralgleichungen mit der singulären Stelle $\zeta = -b$. Der Integrationsweg $\arg \zeta = \omega$ der Laplaceschen Integrale

$$\mathfrak{Z}_\iota = \int_0^{\infty} w_\iota(\zeta)\, e^{-\zeta t}\, d\zeta,$$

welche den Differentialgleichungen genügen und durch die formalen Reihen asymptotisch dargestellt werden, muß den Intervallen $-\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{4}$, $-\frac{5\pi}{4} < \omega < -\pi$, $-\pi < \omega < -\frac{3\pi}{4}$ angehören, so daß die Gültigkeitsgebiete der Integrale in den Sektoren $-\frac{3\pi}{4} < \arg t < \frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} < \arg t < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \arg t < \frac{7\pi}{4}$ liegen.

Durch die Substitution

$$Z_\iota = e^{abt^2}\, U_\iota$$

erhält man die Differentialgleichungen

$$t^{-1}\frac{dU_1}{dt} + 2ab\,U_1 + \frac{2a}{t}\,U_3 + \sum_k \left(\frac{a_{1k}^{(1)}}{t^2} + \ldots\right) U_k = 0,$$

$$t^{-1}\frac{dU_2}{dt} + \left(2ab + \frac{b}{t}\right) U_2 + \sum_k \left(\frac{a_{2k}^{(1)}}{t^2} + \ldots\right) U_k = 0,$$

$$t^{-1}\frac{dU_3}{dt} + \sum_k \left(\frac{a_{3k}^{(1)}}{t} + \ldots\right) U_k = 0$$

mit der formalen Lösung

$$U_\iota = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\iota n}}{t^{r+n}},$$

wo $r = a_{33}^{(2)} - \frac{1}{b}\, a_{31}^{(1)}$ und $A_{10} = A_{20} = 0$ ist. Wir wenden auf dieses System die in Math. Zeitschr. **3**, S. 284–291 dargestellte Methode an (für

die es nicht wesentlich ist, daß die a. a. O. mit $a_2, \ldots, a_m$ bezeichneten Größen voneinander verschieden sind). Den Differentialgleichungen ordnen wir die Integralgleichungen zu:

$$2(\zeta - ab)\, w_i(\zeta) = \sum_k \int_0^\zeta G_{ik}(\zeta - \tau)\, w_k(\tau)\, d\tau \qquad (i = 1, 2),$$

$$2\zeta\, w_3(\zeta) = \sum_k \int_0^\zeta G_{3k}(\zeta - \tau)\, w_k(\tau)\, d\tau;$$

dabei ist

$$G_{3k}(\zeta) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a_{3k}^{(\lambda)}\, \zeta^{\frac{\lambda}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)},$$

$$G_{ik}(\zeta) = \sum_{\lambda=2}^{\infty} \frac{a_{ik}^{(\lambda-1)}\, \zeta^{\frac{\lambda}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \qquad \text{für } i = 1,\ k = 1, 2 \text{ und } i = 2,\ k = 1, 3,$$

während die Reihe auf der rechten Seite in den Fällen $i = 1$, $k = 3$; $i = 2$, $k = 2$ bzw. die Funktionen darstellt:

$$G_{13}(\zeta) - \frac{2a\,\zeta^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}; \quad G_{22}(\zeta) - \frac{b\,\zeta^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Vermittels der Lösung

$$w_i(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{in} \frac{\zeta^{\frac{r+n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{r+n}{2}\right)}$$

der Integralgleichungen mit der singulären Stelle $\zeta = ab > 0$ und ihrer Fortsetzung bilden wir die Laplaceschen Integrale

$$U_i = \int_0^\infty w_i(\zeta)\, e^{-\zeta t^2}\, d\zeta,$$

welche den Differentialgleichungen genügen und durch die oben angegebenen formalen Reihen asymptotisch dargestellt werden. Der Integrationsweg $\arg \zeta = \omega$ variiert entweder zwischen 0 und 2π oder zwischen -2π und 0. Demnach existieren die Laplaceschen Integrale in einem Gebiet, welches entweder dem Sektor $-\frac{5\pi}{4} < \arg t < \frac{\pi}{4}$ oder dem Sektor $-\frac{\pi}{4} < \arg t < \frac{5\pi}{4}$ angehört.

Man hätte übrigens auch Laplacesche Integrale von derselben Form wie bei dem Differentialgleichungssystem (A) verwenden können; die an der dortigen Methode anzubringenden Abänderungen sind leicht ersichtlich.

§ 6.

Das *Differentialgleichungssystem der Funktion* Φ_2 hat in der Umgebung des *Schnittpunktes* $x = 0$, $y = 0$ *der drei singulären Linien der Bestimmtheit* $x = 0$, $y = 0$, $x = y$ nur das eine bekannte Integral Φ_2. Um das Verhalten des allgemeinen Integrals bei der Annäherung an die Stelle $x = 0$, $y = 0$ zu untersuchen, setzen wir, wie in § 5, $x = at$, $y = bt$, wodurch wir wieder das Differentialgleichungssystem

$$\frac{dz}{dt} = ap + bq,$$
$$\frac{dp}{dt} = \frac{\beta z - (\gamma - at)p}{t},$$
$$\frac{dq}{dt} = \frac{\beta' z - (\gamma - bt)q}{t}$$

erhalten. Wir lassen jetzt t zur singulären Stelle $t = 0$ gehen, die eine Stelle der Bestimmtheit mit der determinierenden Gleichung

$$\begin{vmatrix} -\varrho, & 0, & 0 \\ \beta, & -\gamma-\varrho, & 0 \\ \beta', & 0, & -\gamma-\varrho \end{vmatrix} = \varrho(\varrho+\gamma)^2 = 0$$

ist; die Determinante auf der linken Seite hat die Elementarteiler ϱ, $\varrho+\gamma$, $\varrho+\gamma$.

Wir haben eine Lösung in Form beständig konvergenter Reihen

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} z_n t^n, \quad p = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n, \quad q = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n;$$

z_0 ist willkürlich,

$$p_0 = \frac{\beta z_0}{\gamma}, \quad q_0 = \frac{\beta' z_0}{\gamma};$$

z_n, p_n, q_n bestimmen sich aus den Rekursionsformeln

$$n z_n = a p_{n-1} + b q_{n-1},$$
$$(n+\gamma) p_n - \beta z_n = a p_{n-1},$$
$$(n+\gamma) q_n - \beta' z_n = b q_{n-1}$$

als ganze homogene Funktionen n-ten Grades von a, b, welche den Faktor z_0 enthalten. Die Reihe, welche man so für z erhält, stimmt, wenn wieder $x = at$, $y = bt$ gesetzt wird, mit $z_0 \Phi_2(x, y)$ überein.

Wir haben eine weitere Lösung in Form beständig konvergenter Reihen

$$z = t^{-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{z}_n t^n, \quad p = t^{-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{p}_n t^n, \quad q = t^{-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{q}_n t^n;$$

es ist $\mathfrak{z}_0 = 0$, während $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{q}_0$ willkürlich sind; $\mathfrak{z}_n$, $\mathfrak{p}_n$, $\mathfrak{q}_n$ ergeben sich aus den Rekursionsformeln

$$(n-\gamma)\mathfrak{z}_n = a\mathfrak{p}_{n-1} + b\mathfrak{q}_{n-1},$$
$$n\mathfrak{p}_n - \beta\mathfrak{z}_n = a\mathfrak{p}_{n-1},$$
$$n\mathfrak{q}_n - \beta'\mathfrak{z}_n = b\mathfrak{q}_{n-1}$$

als lineare homogene Funktionen von $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{q}_0$ und als ganze homogene Funktionen n-ten Grades von a, b. Wenn wir

$$\mathfrak{z}_n(a, b) = \mathfrak{p}_0 \mathfrak{z}_n^{(1)}(a, b) + \mathfrak{q}_0 \mathfrak{z}_n^{(2)}(a, b)$$

setzen, so daß $\mathfrak{z}_n^{(1)}(a, b)$, $\mathfrak{z}_n^{(2)}(a, b)$ ganze homogene Funktionen n-ten Grades von a, b sind, stellen die Reihen

$$z = t^{-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{z}_n^{(h)}(a, b) t^n = t^{-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{z}_n^{(h)}(x, y) \qquad (h = 1, 2)$$

und die entsprechenden Reihen für p, q das Verhalten zweier Integrale bei der Annäherung an $x = 0$, $y = 0$ dar.

Das *Differentialgleichungssystem der Appellschen Funktion*[15])

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha, \lambda + \mu)(\beta, \lambda)(\beta', \mu)}{(\gamma, \lambda + \mu)(1, \lambda)(1, \mu)} x^\lambda y^\mu,$$

nämlich

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy,$$

wobei

$$r = \frac{\alpha\beta(x-y)z - [\gamma(x-y) - (\alpha+\beta+1)x^2 + (\alpha+\beta-\beta'+1)xy + \beta' y]p + \beta y(1-y)q}{x(1-x)(x-y)},$$

$$s = \frac{\beta' p - \beta q}{x - y}$$

ist und t aus r durch Vertauschung von β, β', von x, y und von p, q hervorgeht, hat die singulären Stellen der Bestimmtheit $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$, $y = 0$, $y = 1$, $y = \infty$, $x = y$. Wir kennen in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ nur die eine Reihe $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$ und in der Umgebung von $x = \infty$, $y = \infty$ nur die eine Reihe

$$x^{-\beta} y^{-\beta'} F_1\left(\beta + \beta' - \gamma + 1, \beta, \beta', \beta + \beta' - \alpha + 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right).$$

Um das Verhalten sämtlicher Integrale bei der Annäherung an den *Schnittpunkt* $x = \infty$, $y = \infty$ *der drei singulären Linien* $x = \infty$, $y = \infty$, $x = y$ zu untersuchen, setzen wir $x = at$, $y = bt$ (mit anderer Bedeutung von t), wodurch wir die Differentialgleichungen erhalten:

$$\frac{dz}{dt} = ap + bq,$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\alpha\beta z - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)at]p + \beta btq}{t(1 - at)},$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\alpha\beta' z + \beta' atp - [\gamma - (\alpha + \beta' + 1)bt]q}{t(1 - bt)}.$$

Um das Verhalten der Integrale in der Umgebung der singulären Stelle der Bestimmtheit $t = \infty$ zu untersuchen, setzen wir

$$z = Z, \quad p = \frac{P}{at}, \quad q = \frac{Q}{bt};$$

---

[15]) A.-K., S. 44, 53.

wir erhalten die Differentialgleichungen

$$t\frac{dZ}{dt} = P + Q,$$

$$t(at-1)\frac{dP}{dt} = -at(\alpha\beta Z + (\alpha+\beta)P + \beta Q) + \gamma P,$$

$$t(bt-1)\frac{dQ}{dt} = -bt(\alpha\beta' Z + \beta' P + (\alpha+\beta')Q) + \gamma Q.$$

Die linke Seite

$$\begin{vmatrix} -\varrho, & 1, & 1 \\ -\alpha\beta, & -\alpha-\beta-\varrho, & -\beta \\ -\alpha\beta', & -\beta', & -\alpha-\beta'-\varrho \end{vmatrix} = -(\varrho+\beta+\beta')(\varrho+\alpha)^2$$

der determinierenden Gleichung hat die Elementarteiler $\varrho+\beta+\beta'$, $\varrho+\alpha$, $\varrho+\alpha$.

Wir haben zunächst die Lösung

$$Z = t^{-\beta-\beta'}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathfrak{Z}_n}{t^n}, \quad P = t^{-\beta-\beta'}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathfrak{P}_n}{t^n}, \quad Q = t^{-\beta-\beta'}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathfrak{Q}_n}{t^n};$$

es ist $\mathfrak{P}_0 = \beta\mathfrak{Z}_0$, $\mathfrak{Q}_0 = \beta'\mathfrak{Z}_0$, und aus den Rekursionsformeln

$$(n+\beta+\beta')\mathfrak{Z}_n + \mathfrak{P}_n + \mathfrak{Q}_n = 0,$$

$$(n-\alpha\beta)\mathfrak{Z}_n - (\alpha-\beta')\mathfrak{P}_n - \beta\mathfrak{Q}_n = -(n-1)\frac{\mathfrak{Z}_{n-1}}{a} + (\beta+\beta'-\gamma)\frac{\mathfrak{P}_{n-1}}{a},$$

$$(n-\alpha\beta')\mathfrak{Z}_n - \beta'\mathfrak{P}_n - (\alpha-\beta)\mathfrak{Q}_n = -(n-1)\frac{\mathfrak{Z}_{n-1}}{b} + (\beta+\beta'-\gamma)\frac{\mathfrak{Q}_{n-1}}{b}$$

ergeben sich $\mathfrak{Z}_n$, $\mathfrak{P}_n$, $\mathfrak{Q}_n$ als ganze homogene Funktionen n-ten Grades von $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$. Schreibt man $\mathfrak{Z}_n = \mathfrak{Z}_n\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$, so ist

$$Z = t^{-\beta-\beta'}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathfrak{Z}_n\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)}{t^n} = t^{-\beta-\beta'}\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{Z}_n\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right);$$

$$z a^{-\beta} b^{-\beta'} = x^{-\beta} y^{-\beta'}\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{Z}_n\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$$

ist die bekannte Reihe.

Wir haben die weitere Lösung

$$Z = t^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathfrak{Z}_n}{t^n}, \quad P = t^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathfrak{P}_n}{t^n}, \quad Q = t^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathfrak{Q}_n}{t^n};$$

es ist

$$\mathfrak{Z}_0 = -\frac{\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{Q}_0}{\alpha},$$

wo $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{Q}_0$ willkürlich sind, und aus den Rekursionsformeln

$$(n+\alpha)\,\mathfrak{Z}_n + \mathfrak{P}_n + \mathfrak{Q}_n = 0,$$

$$n\,\mathfrak{Z}_n + n\,\mathfrak{P}_n = (\alpha - \gamma - n + 1)\,\frac{\mathfrak{P}_{n-1}}{a},$$

$$n\,\mathfrak{Z}_n + n\,\mathfrak{Q}_n = (\alpha - \gamma - n + 1)\,\frac{\mathfrak{Q}_{n-1}}{b}$$

ergeben sich $\mathfrak{Z}_n$, $\mathfrak{P}_n$, $\mathfrak{Q}_n$ als lineare homogene Funktionen von $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{Q}_0$ und als ganze homogene Funktionen n-ten Grades von $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$. Wir schreiben

$$\mathfrak{Z}_n = \mathfrak{Z}_n\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) = \mathfrak{P}_0\,\mathfrak{Z}_n^{(1)}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) + \mathfrak{Q}_0\,\mathfrak{Z}_n^{(2)}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right).$$

Dann stellen die Reihen

$$Z = t^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{Z}_n^{(h)}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)}{t^n} = t^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{Z}_n^{(h)}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \qquad (h = 1, 2)$$

und die entsprechenden Reihen für P, Q zwei weitere Lösungen unseres Differentialgleichungssystems dar.

(Eingegangen am 18. 5. 1935.)

Fortsetzungsrelationen bei den Lösungen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen.

Von

Ludwig Hopf in Aachen.

I. Problemstellung.

Die allgemeinste Methode, um Lösungen linearer Differentialgleichungen zu gewinnen und zu diskutieren, besteht in der Entwicklung in Reihen, deren Koeffizienten unmittelbar der Differentialgleichung entnommen werden können. Man erhält in bekannter Weise *konvergente Reihen* von einem nicht oder unwesentlich singulären Punkt aus und *semikonvergente (asymptotische)* Reihen von einem wesentlich singulären, meist ins Unendliche verlegten Punkt aus. Die große Schwierigkeit, welche dieser Methode bisher anhaftet, liegt in der Frage der Zusammengehörigkeit der Reihen. Eine derartige semikonvergente Reihe vom Unendlichen aus ist zwar immer eine Lösung der Differentialgleichung, aber nur bis auf einen nicht beliebig verkleinerbaren Rest, und die Folge davon ist, daß sie *nicht für alle Argumente dieselbe* Lösung darzustellen braucht; es bleibt also hier zunächst noch das Problem, die bestimmte partikuläre Lösung der Differentialgleichung, die etwa für positiv reelle Variable durch eine solche semikonvergente Reihe angenähert wird, zu andern Argumenten der Variablen fortzusetzen und für die *ganze* komplexe *Ebene* festzulegen. Auch wissen wir zunächst noch nicht, welche Partikulärlösung vom Punkt im Endlichen aus und welche vom Unendlichen aus *zusammengehören* oder welche asymptotische Reihe eine bestimmte, durch eine konvergente Reihe gegebene Lösung bei großen Werten der Variablen annähert.

Die folgenden Überlegungen sollen einen Weg zeigen, auf dem sowohl die Fortsetzung einer asymptotischen partikulären Lösung von einem Argument zu beliebigen anderen, als auch ihre Verknüpfung mit den konvergenten Reihen aus dem Endlichen gewonnen werden können.

Die asymptotische Lösung, welche zu einem irgendwie eindeutig definierten Integral der Differentialgleichung gehört, wird mit unbestimmten Konstanten für jedes Azimut hingeschrieben, nachdem durch Einführung einer geeigneten unabhängigen Variablen Eindeutigkeit der Lösung klargestellt ist. Dann werden *Cauchysche Rundintegrale* über diese asymptotischen Lösungen, multipliziert mit verschiedenen Potenzen der unabhängigen Variablen, gebildet und identifiziert mit den entsprechenden

Koeffizienten der vom Nullpunkt aus entwickelten konvergenten Potenzreihen, und zwar mit den negativen und den positiven Potenzen. Daraus, daß eine Anzahl solcher Potenzen verschwinden muß, ergeben sich gerade genügend Bedingungen, um die in der asymptotischen Entwicklung auftretenden Koeffizienten — die *Umlaufkonstanten* — zu bestimmen. Alle anderen Koeffizienten nehmen dann von selbst — wie immer wieder durch Proben gezeigt werden wird — die richtigen Werte an. Der Gang der Rechnung ist am einfachsten aus I, § 3 und § 4 zu erkennen; der Beweis, daß man derartige Cauchysche Integrale bilden kann, findet sich in I, § 5. Von Fällen, in welchen die Cauchyschen Integrale nicht konvergieren, daher unsere Methode nicht direkt angewendet werden kann, ist in II, § 4 die Rede.

II. Einfachster Fall.

§ 1.

Reihen vom Nullpunkt aus.

Die Methode soll zunächst an einem einfachsten Fall erläutert werden; wir suchen die Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + x^n y = 0; \tag{1}$$

es gibt keine andere allgemeine Methode, um zu den Lösungen zu gelangen, als die Reihenentwicklungen. Die Differentialgleichung hat keinen singulären Punkt im Endlichen; die Lösungen sind also ganze transzendente Funktionen und werden durch folgende Reihenentwicklungen vom Punkte $x = 0$ aus dargestellt:

$$y_1 = 1 - \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+1)} + \frac{x^{2n+4}}{(n+2)(n+1)(2n+4)(2n+3)} - \ldots, \tag{2}$$

$$y_2 = x - \frac{x^{n+3}}{(n+3)(n+2)} + \frac{x^{2n+5}}{(n+3)(n+2)(2n+5)(2n+4)} - \ldots. \tag{3}$$

Die folgenden Überlegungen werden sich im wesentlichen auf die Tatsache stützen, daß eine Lösung von (1), nach Potenzen von x entwickelt, keine anderen als die in (2) und (3) vorkommenden Potenzen enthält, keine negativen Potenzen und keine zwischen x^1 und x^{n+2} usw. gelegenen. Wir werden diese Bedingungen später dazu benutzen, um einen allgemeineren, die Differentialgleichung befriedigenden Ausdruck so zu spezialisieren, daß er eine Lösung wird.

Daß die Formulierung solcher Bedingungen nicht auf unendlich viele Gleichungen führen muß, folgt einfach daraus, daß die Rekursion für die Koeffizienten eine endliche Anzahl von Gliedern hat.

§ 2.

Asymptotische Näherungen.

Lösungen lassen sich andererseits auch aus den bekannten asymptotischen Näherungen aufbauen, welche die Differentialgleichung näherungsweise befriedigen. Diese werden in unserem einfachen Fall leicht durch den Ansatz gewonnen:

$$y_{\mathrm{I,\,II}} = \frac{\exp(i\, a_0\, x^{\gamma})}{x^{\mu}} \left(1 + \frac{b_1}{x^{\beta}} + \frac{b_2}{x^{2\beta}} + \ldots\right). \tag{4}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt in bekannter Weise die Zahlwerte; es werden:

$$y_{\mathrm{I,II}} = \frac{\exp\left(\pm i \frac{2}{n+2} x^{\frac{n+2}{2}}\right)}{x^{n/4}} \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{4}\left(\frac{n}{4}+1\right)\left(\frac{2}{n+2}\right)^2 \frac{1}{\pm i \frac{2}{n+2} x^{\frac{n+2}{2}}} \right.$$
$$+ \frac{1}{2^2 \cdot 2} \cdot \frac{n}{4}\left(\frac{n}{4}+1\right)\left(\frac{n}{4}+\frac{n+2}{2}\right)\left(\frac{n}{4}+1+\frac{n+2}{2}\right)$$
$$\left. \left(\frac{2}{n+2}\right)^4 \frac{1}{\left(\pm i \frac{2}{n+2} x^{\frac{n+2}{2}}\right)^2} + \ldots\right]. \tag{5}$$

Dabei gilt, wenn wir unter b_m den Koeffizienten von $\dfrac{1}{\left(\pm i \frac{2}{n+2} x^{\frac{n+2}{2}}\right)^m}$ verstehen, das Rekursionsgesetz

$$\frac{b_m}{b_{m-1}} = \frac{1}{2} \, \frac{\left\{\frac{n}{4} + (m-1)\frac{n+2}{2}\right\} \left\{\frac{n}{4} + 1 + (m-1)\frac{n+2}{2}\right\}}{m} \left(\frac{2}{n+2}\right)^2. \tag{6}$$

Diese Koeffizienten nehmen bei großem m mit wachsendem m zu, die Entwicklungen sind nur semikonvergent.

Die Ausdrücke y_{I} und y_{II} sind die einzigen, welche man beim Ansatz (4) als Näherungen asymptotischen Charakters erhält; aber weder y_{I} noch y_{II} für sich stellen eine überall gültige Lösung näherungsweise dar. Zwar nähern y_{I} und y_{II} nach Poincaré *bei jedem Azimut von x eine Lösung der Differentialgleichung asymptotisch an, aber nicht überall dieselbe Lösung.*

Um nun eine asymptotische Lösung aus y_{I} und y_{II} *aufzubauen*, die überall in der x-Ebene dasselbe Integral der Differentialgleichung annähert, müssen wir das Verhalten dieser Ausdrücke im Unendlichen beachten. Setzen wir $x = r e^{i\varphi}$, so geht in gewissen Gebieten von φ der reelle Teil

des Arguments der einen Exponentialfunktion in (5) gegen $+\infty$, der reelle Teil des Arguments der anderen Exponentialfunktion gegen $-\infty$; der eine Ausdruck geht also mit wachsendem r ins Unendliche, der andere gegen Null; in anderen Gebieten von φ sind die Vorzeichen der Argumente und somit die Größenordnungen der beiden Ausdrücke die umgekehrten. Geht nun etwa y_{I} gegen Null, während y_{II} gegen unendlich geht, so bleibt y_{I} tief unter der Fehlergrenze von y_{II} und der aus beiden additiv zusammengesetzte Ausdruck ändert seinen Wert nicht dadurch, daß die Konstante, mit welcher y_{I} multipliziert ist, ihren Wert langsam ändert; aber diese Änderung macht sich in dem folgenden φ-Bereiche, in welchem y_{I} sich dem Unendlichen nähert, stark geltend. Eine asymptotisch unmerkliche Änderung, nämlich eine langsame Konstantenänderung oder auch ein Sprung, der im Grenzwert $r \to \infty$ unmerklich wird, tritt aber auf wenn wir, von Azimut zu Azimut weiter schreitend, diejenigen asymptotischen Ausdrücke aufsuchen, welche überall dieselbe Lösung approximieren.

Wir können also bei jedem Azimut den numerischen Wert der Lösung nur so weit angeben, als er durch die größere der beiden asymptotischen Lösungen dargestellt wird; die komplexe Ebene zerfällt nun in verschiedene Gebiete, in deren jedem entweder y_{I} oder y_{II} überwiegen, und die begrenzt sind durch Strahlen, auf denen y_{I} und y_{II} von gleicher Größenordnung werden. Dies ist der Fall bei rein imaginärem Exponenten in der Exponentialfunktion von (5). In unserem Falle gibt es offenbar $n+2$ solche Strahlen, also auch $n+2$ Gebiete; in jedem ist unsere Lösung durch die größere asymptotische Lösung multipliziert mit einer Konstante dargestellt. In dieser Weise treten $n+2$ noch unbekannte Konstanten $A_1, A_2, \ldots, A_{n+2}$ auf.

Wir können nun entweder die allgemeinste, zwei willkürliche Konstanten enthaltende asymptotische Lösung suchen, wozu wir n Bedingungen für die A nötig haben, und haben dann nach denjenigen Werten der zwei übrigen Konstanten zu fragen, welche den partikulären Integralen (2) oder (3) entsprechen; oder wir können ein partikuläres asymptotisches Integral suchen, indem wir die in einem Gebiet „ausgezeichnete", d. h. durch den kleineren der beiden Ausdrücke $y_{\mathrm{I,\,II}}$ dargestellte Lösung durch Nullsetzen der betreffenden Konstante wählen und eine andere Konstante gleich 1 setzen; dann brauchen wir wieder n Bedingungen für die übrigen A und haben anzugeben, mit welchen zwei Konstanten sich dieses partikuläre Integral aus y_1 und y_2 zusammensetzt.

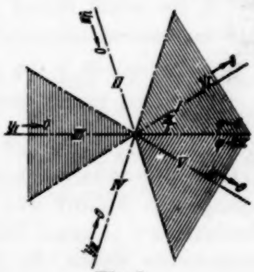


Fig. 1.

Als *Beispiel* diene der Fall $n = 3$. Die beiden asymptotischen Reihen lauten (in etwas veränderter Zusammenfassung):

$$(8) \qquad y_{\mathrm{I},\mathrm{II}} = \frac{\exp\left(\pm \frac{2}{5} i x^{5/2}\right)}{x^{3/4}} \left[1 + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\pm i \frac{2}{5} x^{5/2}\right)} \right.$$

$$\left. + \cdots \frac{13}{10} \cdot \frac{17}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\pm i \frac{2}{5} x^{5/2}\right)^2} + \cdots \frac{23}{10} \cdot \frac{27}{10} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\pm i \frac{2}{5} x^{5/2}\right)^3} + \cdots \right].$$

Dabei sollen die Punkte ... vor den Koeffizienten bedeuten, daß hier der Koeffizient des vorhergehenden Gliedes stehen soll.

In Fig. 1 ist die x-Ebene im Bereich $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ gezeichnet; auf den strichpunktierten Linien wird $x^{5/2}$ reell, somit werden die Ausdrücke y_{I} und y_{II} von der gleichen Größenordnung. In den schraffierten Gebieten geht y_{I} gegen Null, in den anderen y_{II}. Auf den ausgezogenen Linien werden die Exponenten $\pm i \frac{2}{5} x^{5/2}$ reell.

Wir suchen das partikuläre Integral f, das im Gebiete I ausgezeichnete Lösung ist, und setzen daher

$$(9) \qquad A_1 = 0, \quad A_2 = 1;$$

es wird im

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} \text{Gebiet I:} & f = y_{\mathrm{I}} & \text{Gebiet II:} & f = y_{\mathrm{I}} \\ \text{Gebiet III:} & f = A_3 y_{\mathrm{II}} & \text{Gebiet IV:} & f = A_4 y_{\mathrm{I}} \\ \text{Gebiet V:} & f = A_5 y_{\mathrm{II}} & & \end{array} \right.$$

Wir haben somit eine Funktion f überall im Bereich großer Werte von x definiert, die als asymptotische Lösung unserer Differentialgleichung angesehen werden kann und die folgende Eigenschaften hat:

1. Sie erfüllt überall die Differentialgleichung in einer Näherung, die mit wachsendem Absolutwert von x prozentual immer besser wird.

2. Sie enthält n (im Beispiel 3) willkürliche Konstanten.

3. Sie ist überall für große x eindeutig und hat nur an gewissen Stellen Sprünge, die mit wachsendem $|x|$ wie $e^{-\frac{2}{5}|x^{5/2}|}$ verschwinden. Letztere Eigenschaft drücken wir — im Hinblick auf die folgenden Überlegungen — dadurch aus, daß wir über die Funktion f und über die Produkte $x^\lambda f$ (λ ganze Zahl) auf geschlossenen, nur im Gebiete großer x verlaufenden Wegen, die den Nullpunkt nicht umschließen, integrieren; dann gelten die Beziehungen

$$(11) \qquad \lim_{x \to \infty} \oint f\,dx = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} \oint f x^\lambda\,dx = 0.$$

§ 3.

Bestimmung der Konstanten A.

Es ist nun die Frage, wie weit wir unsere asymptotisch gültige Lösung f durch Bestimmung der n (im Beispiel 3) Konstanten A der wirklichen Lösung anpassen können. Die zwei Konstanten, die im allgemeinen willkürlich bleiben müssen, haben wir in unserem Beispiel willkürlich gleich 1 bzw. 0 gesetzt. Um nun die richtigen Bedingungen für die Konstanten A zu finden, stellen wir die Koeffizienten der konvergenten Potenzreihen durch Cauchysche Rundintegrale über alle Azimute dar, wobei wir den Weg bei sehr großen Werten von $|x|$ verlaufen lassen und für die wirklichen Werte der Funktion die asymptotischen Lösungen einsetzen. Bilden wir das Integral über f auf einem geschlossenen Weg, der von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ bei $r \to \infty$ verläuft, so wird der Wert des Integrals kein anderer sein, als der Wert auf einem den Nullpunkt umschließenden Weg über diejenige Lösung der Differentialgleichung, der f asymptotisch gleich ist. Ein Residuum kann bei diesem Integral nach den Reihen (2) und (3) nicht auftreten. Durch die Gleichung

$$\oint f\,dx = 0 \tag{12}$$

wird daher ausgesprochen, daß ein Glied mit x^{-1} nicht in den Potenzreihen vorkommt, und mit x^{-1} werden auch die durch Rekursion damit verbundenen Glieder mit x^{-6}, $x^{-11} \ldots$, x^4, $x^9 \ldots$ ausgeschaltet. Und in der gleichen Weise erzwingen die Bedingungen

$$\oint f\,x\,dx = 0, \tag{13}$$

$$\oint f\,x^2\,dx = 0 \tag{14}$$

das Verschwinden der Glieder mit x^{-2} und x^{-3}, sowie der mit diesen durch Rekursion verbundenen Glieder. Wenn also die drei in f vorkommenden Konstanten so bestimmt werden, daß die Gl. (12), (13) und (14) erfüllt sind, so wird f zu einer Lösung, welche nur eine lineare Kombination der beiden Reihen (2) und (3) asymptotisch annähert, also die *asymptotische Form einer überall gültigen Lösung.*

Wir erhalten aus Gl. (12) die Bedingung ($x = r e^{i\varphi}$; $r \to \infty$):

$$\int\limits_{\varphi=2\pi/5}^{\varphi=4\pi/5} y_{\mathrm{I}}\,dx + A_3 \int\limits_{\varphi=4\pi/5}^{\varphi=6\pi/5} y_{\mathrm{II}}\,dx + A_4 \int\limits_{\varphi=6\pi/5}^{\varphi=8\pi/5} y_{\mathrm{I}}\,dx + A_5 \int\limits_{\varphi=8\pi/5}^{\varphi=10\pi/5} y_{\mathrm{II}}\,dx = 0. \tag{15}$$

welche wir dadurch vereinfachen, daß wir durch Einführung neuer Variabler allen Integralen dieselben Grenzen geben. Durch Einführung von $x = \xi \cdot e^{\frac{2}{5} i\pi}$ wird im 2. Integral von (15) das Vorzeichen von i umgekehrt, und das Integral wird gleich dem ersten bis auf einen vom Ausdruck $\frac{dx}{x^{3/4}}$ herrührenden Faktor:

$$(15\text{a})\qquad \int\limits_{\varphi = 4\pi/5}^{\varphi = 6\pi/5} y_{II}(x)\,dx = \int\limits_{\varphi = 2\pi/5}^{\varphi = 4\pi/5} y_{I}(\xi)\,d\xi \cdot \left(e^{\frac{2}{5} i\pi}\right)^{1-\frac{3}{4}} = e^{\frac{i\pi}{10}} \int\limits_{\varphi = 2\pi/5}^{\varphi = 4\pi/5} y_{I}(\xi)\,d\xi.$$

Die anderen Integrale lassen sich durch Einführung der entsprechenden Variablen in gleicher Weise umformen; so kommt (15) in die Form:

$$(16)\qquad \int\limits_{\varphi = 2\pi/5}^{\varphi = 4\pi/5} y_{I}\,dx\,[1 + e^{\frac{i\pi}{10}} A_3 + e^{\frac{2}{10} i\pi} A_4 + e^{\frac{3}{10} i\pi} A_5] = 0.$$

In gleicher Weise lassen sich (13) und (14) umformen zu:

$$(17)\qquad \int\limits_{\varphi = 2\pi/5}^{\varphi = 4\pi/5} y_{I}\,x\,dx\,[1 + e^{\frac{5}{10} i\pi} A_3 + e^{\frac{10}{10} i\pi} A_4 + e^{\frac{15}{10} i\pi} A_5] = 0.$$

$$(18)\qquad \int\limits_{\varphi = 2\pi/5}^{\varphi = 4\pi/5} y_{I}\,x^2\,dx\,[1 + e^{\frac{9}{10} i\pi} A_3 + e^{\frac{18}{10} i\pi} A_4 + e^{\frac{27}{10} i\pi} A_5] = 0.$$

So erhalten wir für die 3 Konstanten A 3 Gleichungen von sehr übersichtlicher Form; im allgemeinen Fall des Exponenten n in der Differentialgleichung bleibt die einfache Form erhalten; an Stelle der 3 Gleichungen treten n Gleichungen, durch welche die n Konstanten A zu bestimmen sind; der φ-Bereich eines Integrals geht von $\varphi = \frac{2\pi}{n+2}$ bis $\varphi = \frac{4\pi}{n+2}$ usw.; an Stelle des Zahlwertes $\frac{2}{5}$ in (15a) tritt $\frac{2}{n+2}$, an Stelle von $\frac{3}{4}$ tritt $\frac{n}{4}$, so daß an Stelle von $\frac{1}{10}$ der Zahlwert

$$\frac{2}{n+2}\left(1 - \frac{n}{4}\right) = \frac{4-n}{2(n+2)}$$

tritt.

Die Integrale in (16) bis (18) sind von Null verschieden; sie haben einen endlichen von Null verschiedenen Grenzwert, wenn $r \to \infty$; also müssen die eckigen Klammern verschwinden. Die Auflösung ergibt

$$(19)\qquad A_3 = 2i\cos\frac{\pi}{5} \qquad A_4 = -2\cos\frac{\pi}{5} \qquad A_5 = -i.$$

Diese Werte in (10) eingesetzt ergeben die *vollständigen Fortsetzungsrelationen der asymptotischen Näherungen*; die so definierte Funktion f ist die asymptotische Näherung an eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung, und zwar an dieselbe für jeden Wert des Azimuts φ.

§ 4.

Verknüpfung der asymptotischen mit den konvergenten Reihen.

Bilden wir nun ganz allgemein die geschlossenen Integrale $\oint f x^\lambda dx$ mit beliebigem ganzzahligem λ, indem wir den Integrationsweg im Unendlichen von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ führen, so müssen wir diejenigen Zahlwerte erhalten, die auch bei einem Umlauf um den Nullpunkt im Endlichen über die zu f gehörige Partikularlösung der Differentialgleichung herauskommen; es muß also $\oint f \frac{dx}{x}$ der Faktor des konstanten Gliedes der Reihe (2) sein, $\oint f \frac{dx}{x^n}$ der Faktor des mit x^{n-1} multiplizierten Reihengliedes. Wir können also aus unserem Ausdruck für f durch solche Integrationen die ganzen Reihen (2) und (3) gewinnen, und zwar — was die Hauptsache ist — mit den Konstanten multipliziert, die gerade zu der partikulären Lösung f gehören. So geben uns insbesondere *die beiden Integrale* $\oint f \frac{dx}{x}$ und $\oint f \frac{dx}{x^2}$ *die Fortsetzungsrelationen der asymptotischen Entwicklungen zu den konvergenten Reihen hin und somit die volle Darstellung der gesuchten partikulären Lösung in der ganzen x-Ebene.*

In unserem Beispiel ist:

$$(20)\quad \oint f \frac{dx}{x} = \int_{\varphi=2\pi/5}^{\varphi=4\pi/5} y_1 \frac{dx}{x}\left[1 + e^{-\frac{3}{10}i\pi}\cdot 2i\cos\frac{\pi}{5} - e^{-\frac{6}{10}i\pi}\, 2\cos\frac{\pi}{5} - i e^{-\frac{9}{10}i\pi}\right]$$

$$= \int_{\varphi=2\pi/5}^{\varphi=4\pi/5} y_1 \frac{dx}{x}\cdot e^{\frac{3}{10}i\pi}\, 2\sin\frac{\pi}{5}\left(1 + 4\cos^2\frac{\pi}{5}\right)$$

und

$$(21)\quad \oint f \frac{dx}{x^2} = \int_{\varphi=2\pi/5}^{\varphi=4\pi/5} y_1 \frac{dx}{x^2}\left[1 + e^{-\frac{7}{10}i\pi}\, 2i\cos\frac{\pi}{5} - e^{-\frac{14}{10}i\pi}\, 2\cos\frac{\pi}{5} - i e^{-\frac{21}{10}i\pi}\right]$$

$$= \int_{\varphi=2\pi/5}^{\varphi=4\pi/5} y_1 \frac{dx}{x^2}\, e^{-\frac{3}{10}i\pi}\, 2\sin\frac{\pi}{5}\left(1 + 4\cos^2\frac{\pi}{5}\right).$$

Nun ist

$$\int\limits_{\varphi=2\pi/5}^{\varphi=4\pi/5} y_{\mathrm{I}}\,\frac{dx}{x} = \int\limits_{\varphi=2\pi/5}^{\varphi=4\pi/5} \frac{\exp\left(i\,\frac{2}{5}x^{5/2}\right)}{x^{7/4}}\left[1+\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{1}{i\,\frac{2}{5}\,x^{5/2}}+\ldots\right]dx$$

$$= e^{\frac{3}{10}i\pi}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{13}{10}}\int\frac{\exp(z)}{z^{13/10}}\left[1+\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{1}{z}+\ldots\right]dz,\quad \text{wenn}\quad z = i\,\tfrac{2}{5}\,x^{5/2}.$$

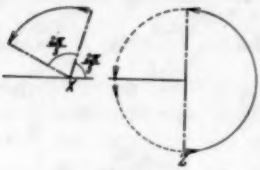


Fig. 2.

Dabei geht der Integrationsweg auf der z-Ebene durch alle Azimute von $-\frac{\pi}{2}$ über 0 nach $+\frac{\pi}{2}$ oder, was hier dasselbe Resultat ergibt, von $-\pi$ über 0 nach $+\pi$ (Fig. 2). Nun gilt bei diesem Weg allgemein die aus der Theorie der Π-Funktionen bekannte Formel:

$$\oint\frac{\exp(z)}{z^{t}}\,dz = \frac{2\pi i}{\Pi(t-1)}. \tag{22}$$

So ergibt sich

$$\oint f\,\frac{dx}{x} = e^{\frac{9}{20}i\pi}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{13}{10}} 2\sin\frac{\pi}{5}\left(1+4\cos^2\frac{\pi}{5}\right)\frac{2\pi i}{\Pi\left(\frac{3}{10}\right)}\left[1+\frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{10}}{1\cdot\frac{13}{10}}\cdot\frac{1}{2}\right. \tag{23}$$

$$\left.+\ldots\frac{\frac{13}{10}\cdot\frac{17}{10}}{2\cdot\frac{23}{10}}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots\frac{\frac{23}{10}\cdot\frac{27}{10}}{3\cdot\frac{33}{10}}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots\right]$$

$$= e^{\frac{9}{20}i\pi}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{13}{10}} 2\sin\frac{\pi}{5}\left(1+4\cos^2\frac{\pi}{5}\right)\cdot\frac{2\pi i}{\Pi\left(\frac{3}{10}\right)}\cdot F\left(\frac{3}{10},\frac{7}{10},\frac{13}{10},\frac{1}{2}\right),$$

wenn F die hypergeometrische Reihe bedeutet.

Ebenso ergibt sich:

$$\oint f\,\frac{dx}{x^2} = e^{i\frac{\pi}{20}}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{17}{10}} 2\sin\frac{\pi}{5}\left(1+4\cos^2\frac{\pi}{5}\right)\frac{2\pi i}{\Pi\left(\frac{7}{10}\right)} F\left(\frac{3}{10},\frac{7}{10},\frac{17}{10},\frac{1}{2}\right). \tag{24}$$

Durch die Integration sind aus den semikonvergenten Reihen absolut konvergente geworden.

Die Integrale $\oint f x^{\lambda}\,dx$ für alle Werte von λ werden proportional $\int\limits_{\varphi=2\pi/5}^{\varphi=4\pi/5} y_{\mathrm{I}}\,x^{\lambda}\,dx$; dabei nimmt der Proportionalitätsfaktor, wie man aus den eckigen Klammern in (16) bis (18) sieht, periodisch immer wieder dieselben Werte an, so z. B. für $\lambda = 0,\ \pm 5,\ \pm 10$ usw. immer den Wert $(1+e^{i\frac{\pi}{10}}A_3+e^{\frac{2}{10}i\pi}A_4+e^{\frac{3}{10}i\pi}A_5)$, den wir gleich 0 gesetzt haben. In der konvergenten Reihe für unsere Lösungen fallen also alle Glieder mit $x^2, x^7, \ldots,\ x^3, x^8, \ldots,\ x^4, x^9, \ldots$ weg, und es bleiben nur Glieder mit

$x^0, x^5, \ldots, x^1, x^6, \ldots$ stehen, wie es nach den Reihen (2) und (3) sein muß.

Nun müssen wir aber noch die Integrale $\oint f x^3 dx$, $\oint f x^4 dx$ usw. betrachten, deren von den A abhängige Faktoren mit den Faktoren der Reihenglieder in (23) oder (24) identisch werden, also nicht verschwinden. Wenn die von uns gefundene asymptotische Lösung wirklich ein Integral der Differentialgleichung annähert, so müssen diese Integrale von selbst verschwinden, und da die von den A abhängigen Ausdrücke dies nicht tun, müssen wir das Verschwinden der Integrale $\int\limits_{\varphi=2\pi/5}^{\varphi=4\pi/5} y_I x^3 dx$ usw. erwarten. In der Tat finden wir diese Integrale alle proportional

$$F\left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{3}{10} - \nu, \frac{1}{2}\right) \quad \text{oder} \quad F\left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{7}{10} - \nu, \frac{1}{2}\right),$$

wobei ν eine positive, ungerade Zahl bedeutet. Nun gilt allgemein

$$(25)\quad F\left(\alpha, 1-\alpha, \alpha-\nu, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha} F(1-\alpha, -\nu, \alpha-\nu, -1) = 0,$$

wie man leicht durch Hinschreiben der Reihe verifiziert; damit ist das Verschwinden der Residuen, die zu negativen Potenzen in den Reihen vom Nullpunkt aus führen würden, bewiesen. Im allgemeinen Fall (1) wird in (25) $\alpha = \frac{n}{2(n+2)}$.

Wir können die numerische Genauigkeit unseres Verfahrens am Verhältnis der ersten beiden Reihenglieder der Reihe (2) prüfen; das erste ist durch $\oint f \frac{dx}{x}$, das zweite durch $\int f \frac{dx}{x^6}$ gegeben; beide Integrale haben denselben von den A abhängigen Faktor; der einzige Unterschied besteht darin, daß im zweiten der Faktor $-(\frac{5}{2}z)^2$ in den Nenner tritt. So wird der Reihenanfang

$$(26)\quad \oint f \frac{dx}{x} + x^5 \cdot \oint f \frac{dx}{x^6}$$

$$= e^{\frac{9}{20} i\pi} \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{13}{10}} 2 \sin\frac{\pi}{5}\left(1 + 4\cos^2\frac{\pi}{5}\right) 2\pi i \left[\frac{1}{\Pi(\frac{3}{10})} F\left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{13}{10}, \frac{1}{2}\right)\right.$$

$$\left. - \left(\frac{2}{5}\right)^2 \frac{1}{\Pi(\frac{23}{10})} F\left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{33}{10}, \frac{1}{2}\right)\right] = \text{const}\,(1 - 0{,}0501\, x^5)$$

mit Rechenschiebergenauigkeit und Beschränkung auf vier Glieder der hypergeometrischen Reihen.

Der wirkliche Wert des Faktors von x^5 ist nach (2) $\frac{1}{4.5} = 0{,}0500$; er muß etwas tiefer liegen als der Näherungswert, da die erste Reihe von (26) bei Berücksichtigung weiterer Glieder stärker zunimmt als die zweite.

§ 5.

Fehlerabschätzung für die Integrale.

Die Berechtigung, solche geschlossenen Cauchyschen Integrale über asymptotische Ausdrücke auszuführen und das Ergebnis mit dem betreffenden Integral über die Lösung der Differentialgleichung zu identifizieren, müssen wir noch durch Betrachtung der Fehler erweisen. Der Fehler der asymptotischen Ausdrücke wird zwar mit wachsendem x immer kleiner *relativ* zum Betrag des betreffenden Ausdruckes, aber immer größer *absolut* genommen, denn er ist z. B. proportional $\frac{\exp\left(i\frac{2}{5}x^{5/2}\right)}{x^{3/4+5/2(m+1)}}$, wenn wir die Reihe mit dem m-ten Glied abbrechen. Nur dann kann das Resultat der Integration richtig sein, wenn auch die Fehler an den verschiedenen Stellen des Integrationsweges sich gegenseitig so aufheben, wie die Näherungswerte selbst.

Zum Beweise führen wir die Variable $z = i\frac{2}{n+2}x^{\frac{n+2}{2}}$ in die Differentialgleichung (1) ein und erhalten

$$\frac{d^2y}{dz^2} - y + \frac{n}{n+2}\frac{1}{z}\frac{dy}{dz} = 0. \tag{27}$$

Wir lösen die Differentialgleichung durch den Ansatz:

$$y = e^z[z^\mu + b_1 z^{\mu-1} + \ldots + b_m z^{\mu-m} + \varepsilon] \tag{28}$$

und bestimmen $\mu, b_1, \ldots, b_m$ wie früher durch das Verschwinden der mit $z^{\mu-1}, z^{\mu-2}\ldots z^{\mu-m-1}$ multiplizierten Summanden beim Einsetzen von (28) in (27).

Man erhält in Übereinstimmung mit (6)

$$\mu = -\frac{n}{2(n+2)}$$

und

$$\frac{b_m}{b_{m-1}} = \frac{1}{2m}\left(\frac{n}{2(n+2)} + m - 1\right)\left(\frac{n+4}{2(n+2)} + m - 1\right) \tag{29}$$

und für den Rest ε die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dz^2} + 2\frac{d\varepsilon}{dz} + \frac{n}{n+2}\cdot\frac{1}{z}\left(\varepsilon + \frac{d\varepsilon}{dz}\right) + b_m(\mu - m)\left(\mu - m - 1 + \frac{n}{n+2}\right)z^{\mu-m-2} = 0. \tag{30}$$

Nun erhält man mit Hilfe partieller Integration, auf dem Wege der Fig. 2, da e^z an den Grenzen einen sehr großen negativ reellen Exponenten hat (siehe Fig. 2), die Beziehungen:

$$\oint e^z \varepsilon\, dz = -\oint e^z \frac{d\varepsilon}{dz}\, dz = +\oint e^z \frac{d^2 \varepsilon}{dz^2}\, dz,$$

(31)

$$\oint e^z \frac{\varepsilon}{z}\, dz = -\oint \frac{e^z}{z} \frac{d\varepsilon}{dz}\, dz + \oint e^z \frac{\varepsilon}{z^2}\, dz.$$

Wird nun (30) auf demselben Wege integriert, so ergibt sich:

$$(32)\quad \oint e^z \varepsilon\, dz - \frac{n}{n+2} \oint e^z \frac{\varepsilon}{z^2}\, dz$$
$$= \oint b_m (\mu - m)\left(\mu - m - 1 + \frac{n}{n+2}\right) \frac{e^z}{z - \mu + m + 2}\, dz.$$

Nun ist aber der zweite Summand auf der linken Seite von (32) bei großem m sehr klein gegen den ersten: denn es ist mit $\varepsilon = \frac{\eta}{z^m}$

$$(33)\quad \oint e^z \varepsilon\, dz = \oint e^z \frac{\eta}{z^m}\, dz = \oint e^z \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\eta}{z^m}\right) dz$$
$$= \oint e^z \left(\frac{\eta''}{z^m} - \frac{2\eta' m}{z^{m+1}} + m(m+1) \frac{\eta}{z^{m+2}}\right) dz.$$

Der letzte Summand allein ist um den großen Faktor m^2 größer als

$$\oint e^z \frac{\varepsilon}{z^2}\, dz = \oint e^z \frac{\eta}{z^{m+2}}\, dz$$

und kann durch die ersten beiden Summanden nicht aufgewogen werden, da hierzu η von der Größenordnung z^{-m} oder z^{m+1} sein müßte, was den strengen Abschätzungen nach der Theorie der asymptotischen Lösungen widerspricht.

Man kann also auf der linken Seite von (32) das zweite Integral gegenüber dem ersten vernachlässigen und erhält das Resultat, daß

$\oint e^z \varepsilon\, dz$ von der Größenordnung des letzten mitgenommenen Gliedes

$\oint \frac{b_m e^z}{z^{-\mu+m}}\, dz$ ist. Somit können wir den Fehler bei unseren Integrationen durch Mitnahme genügend vieler Glieder beliebig herunterdrücken, wenn die bei der Integration sich ergebende Reihe konvergiert; in diesem Falle strebt also die Reihe dem richtigen Grenzwert zu. Es gibt aber auch Fälle, in welchen diese Reihe divergiert, und dann ist natürlich unser Verfahren nicht anwendbar; dies wird immer dann der Fall sein, wenn das Integral über die kleinere asymptotische Lösung von derselben Größenordnung ist, wie das — durch gegenseitige Aufhebung infolge rascher Oszillation sehr kleine — Integral über die große asymptotische Lösung.

Um den vorhergehenden Beweis ganz streng zu führen, müßte man wohl die Laplacesche Transformierte heranziehen, wie es Horn und andere getan haben; da es mir mehr auf die praktische Anwendung der Methode ankam, habe ich diesen Weg noch nicht verfolgt.

Eine ergänzende Bemerkung erfordert die Methode, welche von der in einem Gebiet ausgezeichneten Lösung ausgeht; wir haben oben durch den Ansatz (9) dafür gesorgt, daß das eine Nachbargebiet den richtigen Anschluß hat; daß auch an der anderen Seite — das ist beim Übergang von $(n+2)$-ten zum ersten Gebiet — der Anschluß richtig wird, so daß die Lösung in dem ersten Gebiete wirklich eindeutig durch die kleinere asymptotische Lösung gegeben ist, folgt aus unserem ganz allgemeinen Beweis. Es läßt sich aber auch aus der Determinantenauflösung unseres Gleichungssystems (16) bis (18) unmittelbar verifizieren.

III. Verallgemeinerung auf zweistufige Differentialgleichungen.

§ 1.

Begriff der Stufe.

Um die Tragweite unserer Schlüsse und die Anwendbarkeit unseres Verfahrens zu erkennen, müssen wir vom speziellen Fall des vorigen Kapitels zum allgemeineren übergehen und uns die Bedeutung der bisherigen Spezialisierungen klar machen. Für die unmittelbare Anwendung unseres Verfahrens scheinen zwei Spezialisierungen wesentlich:

1. Im Endlichen der x-Ebene darf nur *eine* Stelle der Bestimmtheit sein, die wir in den Nullpunkt verlegen. An dieser Voraussetzung wird in der ganzen vorliegenden Arbeit festgehalten.

2. Um einfache nach Potenzen von x^{n+2} fortschreitende konvergente Reihen zu erhalten, von einem so einfachen Ansatz für die asymptotischen Näherungen ausgehen zu können und für die A durch Einführung neuer Variabler einfache, die Rundintegrale nicht mehr enthaltende Gleichungen zu erhalten, dafür ist wesentlich, daß die Rekursionsformeln nur zwei Glieder haben. Wir sind dabei nicht auf zwei Summanden in der Differentialgleichung beschränkt; wohl aber darf die Potenz der Variablen x in den einzelnen Summanden nur zwei verschiedene Werte haben. Wir wollen alle Summanden, die in x homogen sind, wie z. B.

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{a}{x} \frac{d y}{d x} + \frac{c}{x^2} y$$

zusammenfassen als eine „*Stufe*" der Differentialgleichung; vom Standpunkt der Reihenentwicklung ist eine solche Stufe genau so einfach, wie ein einzelnes Glied, läßt sich auch oft als ein Glied schreiben; wir können

also unsere Rechenweise ohne Schwierigkeit auf jede zweistufige Differentialgleichung übertragen. Alle mehrstufigen Differentialgleichungen führen auf im allgemeinen kompliziertere Rechnungen. Die „einstufige" Differentialgleichung ist die sogenannte homogene, die durch den Ansatz $y = x^s$ unmittelbar gelöst wird.

§ 2.

Überblick über die verschiedenen Fälle.

Die allgemeinste zweistufige Differentialgleichung zweiter Ordnung mit dem Nullpunkt als einziger Stelle der Bestimmtheit ist:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \left(\frac{a}{x} + b\, x^{n+1}\right)\frac{d y}{d x} + \left(\frac{c}{x^2} + g\, x^n\right) y = 0. \tag{34}$$

Die Singularität im Nullpunkt ist bestimmt durch die niedrigste Stufe der Differentialgleichung, d. i. durch die Lösungen von

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{a}{x}\frac{d y}{d x} + \frac{c}{x^2}\, y = 0; \tag{35}$$

diese sind

$$y = x^{-\frac{a-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 - c}} \tag{36}$$

Der *Exponent* in (36) kann *rational* oder irrational sein; den letzteren Fall, der wohl praktisch selten vorkommt, wollen wir ausschalten; der erstere bietet die Möglichkeit, durch Einführung einer gebrochenen Potenz von x als neuer Variabler zu einer Differentialgleichung ohne Singularitäten im Endlichen überzugehen; an der Zweistufigkeit ändert sich durch Einführung einer solchen neuen Variablen nichts, so daß unsere Methode anwendbar bleibt. Nun können in Gleichung (34) zwei Fälle eintreten, die verschiedene Behandlung fordern:

1. $b = 0$ führt im wesentlichen auf die im vorigen Paragraphen durchgeführte Rechnung zurück.

2. $b \neq 0$ führt zu neuen Problemen.

Im ersten Fall bestimmt das Glied $x^n y$, im zweiten das Glied $x^{n+1}\frac{d y}{d x}$ den Exponenten in der Exponentialfunktion der asymptotischen Näherung und somit den sogenannten „*Rang*" der Differentialgleichung.

§ 3.

Beispiel zum ersten Fall; Zylinderfunktion.

Für den *ersten Fall* wählen wir ein Beispiel, das einen Vergleich der numerischen Resultate mit den Ergebnissen früherer — komplizierterer — Berechnungen gestattet, nämlich die *Zylinderfunktionen*, bei denen man die Fortsetzungsrelationen aus der Integraldarstellung der partikulären Lösungen lange kennt.

Die Differentialgleichung der Zylinderfunktionen von der Ordnung $\frac{1}{3}$ lautet:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{1}{x}\frac{d y}{d x} + \left(1 - \frac{1}{9 x^2}\right) y = 0. \tag{37}$$

Aus den Summanden der niedrigsten Stufe folgt, daß die konvergenten Reihen mit $x^{1/3}$ und $x^{-1/3}$ beginnen. Wir führen daher

$$x^{1/3} = \xi \quad \text{und} \quad z = \xi y \tag{38}$$

als neue Variable ein und erhalten dann die im Endlichen singularitätenfreie Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{d \xi^2} - \frac{1}{\xi}\frac{d z}{d \xi} + 9 \xi^4 z = 0, \tag{39}$$

die gelöst wird durch die konvergenten Reihen vom Nullpunkt aus:

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 - \frac{\xi^6}{\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{3}} + \frac{\xi^{12}}{\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{12}{3}} - \dots + \frac{\xi^{6m}}{\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{3}\cdots\frac{6m-2}{3}\cdot\frac{6m}{3}} - \dots \\ z_2 &= \xi^2 - \frac{\xi^8}{\frac{6}{3}\cdot\frac{8}{3}} + \frac{\xi^{14}}{\frac{6}{3}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{12}{3}\cdot\frac{14}{3}} - \dots + \frac{\xi^{6m+2}}{\frac{6}{3}\cdot\frac{8}{3}\cdots\frac{6m}{3}\frac{6m+2}{3}} - \dots \end{aligned} \tag{40}$$

und durch die asymptotischen Näherungen:

$$\begin{aligned} z_{\mathrm{I,\,II}} = \frac{\exp(\pm i \xi^3)}{\xi^{1/2}}\Big[1 &+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{1}\frac{1}{\pm i \xi^3} \\ &+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{6}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{(\pm i \xi^3)^2} + \dots\Big] \end{aligned} \tag{41}$$

$$\left(\text{Bildungsgesetz: } \frac{b_m}{b_{m-1}} = \frac{1}{2}\frac{(m - \frac{5}{6})(m - \frac{1}{6})}{m}\right). \tag{42}$$

Wir erhalten diesmal, da $n = 4$, auf der ξ-Ebene sechs Gebiete, die in Fig. 3 gezeichnet sind; wieder bedeuten die strichpunktierten Linien rein imaginäre $i\xi^3$. Wir definieren eine partikuläre Lösung f dadurch, daß sie im Gebiet VI ausgezeichnete Lösung und im Gebiet I durch $1 \cdot z_{\mathrm{II}}$ asymptotisch dargestellt sei.

Fig. 3.

$$\begin{aligned} &\text{Gebiet I: } f = 1 \cdot z_{\mathrm{II}}, \\ &\quad\;\; ,, \;\; \text{II: } f = A_2 z_{\mathrm{I}}, \\ &\quad\;\; ,, \;\; \text{III: } f = A_3 z_{\mathrm{II}}, \\ &\quad\;\; ,, \;\; \text{IV: } f = A_4 z_{\mathrm{I}}, \\ &\quad\;\; ,, \;\; \text{V: } f = A_5 z_{\mathrm{II}}, \\ &\quad\;\; ,, \;\; \text{VI: } f = A_5 z_{\mathrm{II}} (A_6 = 0). \end{aligned} \tag{43}$$

Die vier weiteren Bedingungen sind dadurch gegeben, daß die Reihen (40) mit 1 und ξ^2 angehen, daß aber keine Reihe ein Glied ξ, ξ^{-1}, ξ^{-2} und ξ^{-3} enthalten kann; Glieder ξ^{-4} und ξ^{-6} können wie früher nicht durch

Wahl der A-Werte unterdrückt werden, das Glied ξ^{-5} fällt mit dem Glied ξ weg. Unsere Bedingungsgleichungen für die A lauten also zwangläufig:

$$(44) \qquad \oint f\,\frac{d\xi}{\xi^2} = 0, \quad \oint f\,d\xi = 0, \quad \oint f\,\xi\,d\xi = 0 \quad \text{und} \quad \oint f\,\xi^2\,d\xi = 0.$$

Die Integrale (44) setzen sich aus fünf Summanden mit Teilintegralen über einen Winkelraum von $\frac{\pi}{3}$ zusammen, die sich alle durch Einführung geeigneter Variablen auf eines zurückführen lassen, so daß die Integrale aus den Gleichungen für die A herausfallen. Diese Gleichungen lauten dann:

$$(45) \qquad \begin{aligned}
&1 + A_2 e^{\frac{i\pi}{6}} + A_3 e^{\frac{2}{6}i\pi} + A_4 e^{\frac{3}{6}i\pi} + A_5 e^{\frac{4}{6}i\pi} = 0,\\
&1 + A_2 e^{\frac{i\pi}{6}+\frac{i\pi}{3}} + A_3 e^{\frac{2}{6}i\pi+\frac{2}{3}i\pi} + A_4 e^{\frac{3}{6}i\pi+\frac{3}{3}i\pi} + A_5 e^{\frac{4}{6}i\pi+\frac{4}{3}i\pi} = 0,\\
&1 + A_2 e^{\frac{i\pi}{6}+\frac{2}{3}i\pi} + A_3 e^{\frac{2}{6}i\pi+\frac{4}{3}i\pi} + A_4 e^{\frac{3}{6}i\pi+\frac{6}{3}i\pi} + A_5 e^{\frac{4}{6}i\pi+\frac{8}{3}i\pi} = 0,\\
&1 + A_2 e^{\frac{i\pi}{6}+\frac{4}{3}i\pi} + A_3 e^{\frac{2}{6}i\pi+\frac{8}{3}i\pi} + A_4 e^{\frac{3}{6}i\pi+\frac{12}{3}i\pi} + A_5 e^{\frac{4}{6}i\pi+\frac{16}{3}i\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist:

$$(46) \qquad A_2 = i \quad A_3 = 0 \quad A_4 = i \quad A_5 = -1.$$

Wir vergleichen dies Ergebnis mit den bekannten Formeln der Zylinderfunktionen; unser f hängt mit der zweiten Hankelschen Funktion zusammen, die auch für positiv reelle x proportional $\frac{e^{-ix}}{x^{1/2}} = \frac{e^{-i\xi^3}}{\xi^{3/2}}$ ist. Mit dem konventionellen Faktor gilt:

$$(47) \qquad \frac{f}{\xi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{5}{12}i\pi}\, H^{(2)}_{1/3}(\xi^3).$$

Im gleichen Bereich gilt

$$(48) \qquad \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{+\frac{5}{12}i\pi}\, H^{(1)}_{1/3}(\xi^3) \sim \frac{e^{i\xi^3}}{\xi^{3/2}} = \frac{e^{ix}}{x^{1/2}}.$$

Bezeichnen wir mit x_0 einen Wert von x in unserm Gebiet I, so liefert die bekannte Theorie der Zylinderfunktionen die Umlaufsrelation:

$$H^{(2)}_{1/3}(x_0 e^{i\nu\pi}) = e^{i\pi/3}\,\frac{\sin\frac{\nu\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\,H^{(1)}_{1/3}(x_0) + \frac{\sin\frac{(\nu+1)\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\,H^{(2)}_{1/3}(x_0)$$

oder

$$(49) \qquad \frac{f}{\xi}(x_0 e^{i\nu\pi}) = -i\,\frac{\sin\frac{\nu\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\,\frac{e^{ix_0}}{x_0^{1/2}} + \frac{\sin\frac{(\nu+1)\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\,\frac{e^{-ix_0}}{x_0^{1/2}}.$$

Diese Formel ergibt, wenn wir wieder $x = x_0 e^{i\nu\pi}$ als Variable benutzen, im[1])

Gebiet II ($\nu = 1$):

$$\frac{f}{\xi} = \frac{-ie^{ix_0} + e^{-ix_0}}{x_0^{1/2}} = \frac{e^{-ix} + ie^{ix}}{x^{1/2}} \sim \frac{ie^{ix}}{x^{1/2}}$$

entsprechend unserem $i\, y_{II}$;

Gebiet III ($\nu = 2$)

$$\frac{f}{\xi} = \frac{-ie^{ix_0}}{x_0^{1/2}} = \frac{ie^{ix} + 0 \cdot e^{-ix}}{x^{1/2}}$$

entsprechend unserem $+ 0 \cdot y_I$;

Gebiet IV ($\nu = 3$)

$$\frac{f}{\xi} = \frac{-e^{-ix_0}}{x_0^{1/2}} = \frac{ie^{ix}}{x^{1/2}}$$

entsprechend unserem $i\, y_{II}$;

Gebiet V ($\nu = 4$):

$$\frac{f}{\xi} = \frac{ie^{ix_0} - e^{-ix_0}}{x_0^{1/2}} = \frac{ie^{ix} - e^{-ix}}{x^{1/2}}$$

entsprechend unserem $- 1 \cdot y_I$;

Gebiet VI ($\nu = 5$):

$$\frac{f}{\xi} = \frac{ie^{ix_0}}{x_0^{1/2}} = -\frac{e^{-ix}}{x^{1/2}}$$

entsprechend unserem $- 1 \cdot y_I$.

Die Verknüpfung unserer Lösung f mit den Reihen (40) vom Nullpunkt aus ist gegeben durch die Formel:

$$f = C_0\left(1 - \frac{\xi^6}{\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{3}} + \ldots\right) + C_2(\xi^2 - \ldots),$$

wobei

$$(50) \quad C_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint f\frac{d\xi}{\xi} \quad C_0 i\left(-\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 6}\right) = \frac{1}{2\pi i}\oint f\frac{d\xi}{\xi^7} \quad C_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint f\frac{d\xi}{\xi^3}$$

sein muß. Nun wird:

$$\oint f\frac{d\xi}{\xi} = \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/3} \frac{\exp(-i\xi^3)\, d\xi}{\xi^{3/2}}\left[1 + \frac{5}{72} \cdot \frac{1}{(-i\xi^3)} + \ldots\right]$$

$$\cdot \left\{1 + ie^{-\frac{i\pi}{6}} + ie^{-\frac{3}{6}i\pi} - e^{-\frac{4}{6}i\pi}\right\}.$$

[1]) Die Umlaufsrelation enthält beide Funktionen, die von uns betrachtete asymptotische nur die jeweils größere.

Nach Einführung von $-i\xi^3 = z$ und Verwendung von (22) ergibt sich

$$C_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint f\frac{d\xi}{\xi} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{e^{i\pi/12}}{\Pi(1/6)}F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{1}{2}\right) = e^{i\pi/12}\cdot 1{,}34\,(3)$$

(Rechenschiebergenauigkeit; 4 Reihenglieder).
Ferner wird:

$$C_6 = \frac{1}{2\pi i}\oint f\frac{d\xi}{\xi^7} = \frac{1}{2\pi i}\oint f\frac{d\xi}{\xi}\cdot\left(-\frac{1}{\frac{7}{6}\cdot\frac{13}{6}}\right)\frac{F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{19}{6}, \frac{1}{2}\right)}{F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{1}{2}\right)} = C_0\cdot(-0{,}374)$$

bei Berücksichtigung von 4 Reihengliedern gegenüber $C_6 = -0{,}375\,C_0$ nach (40), und

$$C_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint f\frac{d\xi}{\xi^3} = \frac{2\,e^{-\frac{7}{12}i\pi}}{\sqrt{3}\,\Pi(5/6)}F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{11}{6}, \frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{7}{12}i\pi}\cdot 1{,}28\,(5).$$

Aus der Theorie der Zylinderfunktionen hat man die Formel

$$\begin{aligned} H^{(2)}_{1/3}(x) &= -\frac{i}{\sin\pi/3}\left[e^{i\pi/3}J_{1/3}(x) - J_{-1/3}(x)\right] \\ &= -\frac{i}{\sin\pi/3}\left[\frac{e^{i\pi/3}x^{1/3}}{2^{1/3}\Pi(\frac{1}{3})}(1-\ldots) - \frac{x^{-1/3}}{2^{-1/3}\Pi(-\frac{1}{3})}(1-\ldots)\right]. \end{aligned} \tag{51}$$

Daraus ergibt sich bei Berücksichtigung von (47):

$$C_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{5}{12}i\pi}\frac{i}{\sin\pi/3\cdot 2^{-1/3}\,\Pi(-\frac{1}{3})} = e^{\frac{i\pi}{12}}\cdot 1{,}34\,(8)$$

und

$$C_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{5}{12}i\pi}\frac{-i\,e^{i\pi/3}}{\sin\pi/3\cdot 2^{1/3}\,\Pi(\frac{1}{3})} = e^{-\frac{7}{12}i\pi}\cdot 1{,}28\,(5).$$

Die Übereinstimmung ist vollkommen; auch die Glieder

$$C_{-6},\quad C_{-12}\ldots C_{-8},\quad C_{-14}\ldots$$

verschwinden, wie es sein muß, da die ihnen entsprechenden Residuen proportional den nach (25) verschwindenden hypergeometrischen Reihen sind, entweder

$$F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}-\nu, \frac{1}{2}\right) \text{ oder } F\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}-\nu, \frac{1}{2}\right) \quad (\nu \text{ ungerade}).$$

§ 4.

Durchführungsversuch und Schwierigkeiten im 2. Fall.

Ist $b \neq 0$ in (34), so treten ganz andersartige Schwierigkeiten auf als bisher. Wir denken uns durch Einführung einer anderen Variablen $b = 1$ gesetzt, gehen also von der Gleichung aus:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{a}{x} + x^{n+1}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{c}{x^2} + g\,x^n\right)y = 0. \tag{52}$$

Diese wird durch zwei konvergente Reihen vom Nullpunkt aus gelöst

$$y_{1,2} = x^{r_{1,2}} + a_1 x^{r_{1,2}+n+2} + a_2 x^{r_{1,2}+2(n+2)} + \dots \tag{53}$$

wobei

$$r_{1,2} = -\frac{a-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 - c},$$

was wir, wie oben, als ganzzahlig voraussetzen. Durch Einführung einer geeigneten, unabhängigen Variablen kann das erreicht werden, wenn der Wert zunächst nur rational angenommen wird.

Die asymptotischen Entwicklungen lauten:

$$y_{\mathrm{I}} = \exp\left(-\frac{x^{n+2}}{n+2}\right)\frac{1}{x^{\mu}}\left[1 + \frac{b_1}{x^{n+2}} + \frac{b_2}{x^{2(n+2)}} + \dots\right] \tag{54}$$

mit

$$\mu = n + 1 + a - g$$

und

$$y_{\mathrm{II}} = \frac{1}{x^{\nu}}\left[1 + \frac{c_1}{x^{n+2}} + \frac{c_2}{x^{2(n+2)}} + \dots\right]. \tag{55}$$

Der Exponent $n+2$, der bei der konvergenten und bei der asymptotischen Entwicklung der Lösungen auftritt, wird nach Poincaré der „*Rang*" der Differentialgleichung genannt. Der Rang wird hier durch das Glied $x^{n+1}\frac{dy}{dx}$ bestimmt; bei den vorher behandelten Beispielen war der Rang $\frac{n+2}{2}$; er war bestimmt durch das Glied $x^n y$.

Um die Zusammenhänge an einem Beispiel deutlich zu machen, fügen wir einfach in die oben benutzte Differentialgleichung der Zylinderfunktion ein Glied $x^{n+1}\frac{dy}{dx}$ ein; wir nehmen also die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + x^5\frac{dy}{dx} + 9x^4 y = 0. \tag{56}$$

Die konvergenten Reihenlösungen sind:

$$\begin{cases} y_1 = 1 - \frac{9}{4\cdot 6}x^6 + \frac{9}{4\cdot 6}\cdot\frac{15}{10\cdot 12}x^{12} - \dots \pm \frac{9}{4\cdot 6}\cdots\frac{6m+3}{(6m-2)\,6m}x^{6m} \mp \dots, \\ y_2 = x^2 - \frac{11}{6\cdot 8}x^8 + \frac{11}{6\cdot 8}\cdot\frac{17}{12\cdot 14}x^{14} - \dots \pm \frac{11}{6\cdot 8}\cdots\frac{6m+5}{6m(6m+2)}x^{6m+2} \mp \dots. \end{cases} \tag{57}$$

Die asymptotischen Näherungen lauten:

$$y_{\mathrm{I}} = \exp\left(-\frac{x^6}{6}\right)x^5\Big[1 - \left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{3}{6}\right)\cdot\frac{1}{1}\cdot\left(-\frac{6}{x^6}\right) + \cdots \tag{58}$$

$$+ \cdots \frac{(m-\frac{11}{6})(m-\frac{9}{6})}{m}\left(-\frac{6}{x^6}\right)^m + \cdots\Big],$$

(58a) $$y_{II} = x^{-9} + \frac{9 \cdot 11}{6} x^{-15} + \dots + \dots \frac{(3+6m)(5+6m)}{6m} x^{-9-6m} + \dots$$
$$= x^{-9}\left[1 + \frac{9}{6} \cdot \frac{11}{6} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{6}{x^6} + \dots + \dots \frac{(m - \frac{3}{6})(m + \frac{5}{6})}{m} \left(\frac{6}{x^6}\right)^m + \dots\right].$$

Hier enthält der Ausdruck y_{II} *keine Exponentialfunktion*; die Cauchyschen Integrale über $y_{II} x^{\lambda}$ können offenbar nichts zu den Koeffizienten der Gl. (57) beitragen, so lange $\lambda < 8$; die Rolle des Ausdrucks y_{II} muß also bei unserem Rechenverfahren eine ganz andere sein, als die von y_I. Wir teilen nun (Fig. 4) die x-Ebene wieder durch die Strahlen mit rein imaginärem x^6. Es ergeben sich zwölf Gebiete; in I, III, V, ... ist $y_{II} \gg y_I$, in II, IV, ... $y_I \gg y_{II}$; wo der eine Ausdruck groß ist, kann der andere sich ändern oder springen, und der allgemeinste Ausdruck, der unsere Differentialgleichung formal asymptotisch befriedigt, ist:

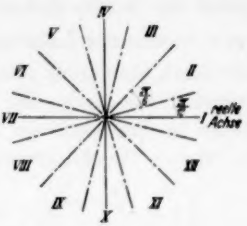


Fig. 4.

(59) In I: $A_1 y_{II}$, in II: $A_2 y_I$, in III: $A_3 y_{II}$, in IV: $A_4 y_I$ usw.,
in XII: $A_{12} y_I$.

Zur Bestimmung dieser zwölf Konstanten, von denen natürlich zwei unbestimmt bleiben müssen, stehen zunächst nach unserer Methode vier Gleichungen zur Verfügung, nämlich:

(60) $$\oint f \frac{dx}{x^2} = 0, \quad \oint f\,dx = 0, \quad \oint f\,x\,dx = 0 \quad \text{und} \quad \oint f\,x^2\,dx = 0.$$

Nun tragen zu diesen Integralen die Ausdrücke y_{II} nichts bei; denn die Integrale auf den im Unendlichen gelegenen Wegstrecken über x^{-9}, x^{-15}... werden Null. Dieses *Herausfallen von sechs Konstanten* aus unseren Bedingungsgleichungen ist kein Zufall, der etwa nur von der zufällig gewählten Zahl 9 herrührt; auch wenn g in (52) negative Werte hat, treten an die Stelle der Gl. (60) andere, aus denen die Ausdrücke y_{II} herausfallen. Ist z. B. $g = 2$, so daß y_{II} mit x^2 beginnt, so konvergieren die Integrale in (60) gar nicht mehr; wir können aber an Stelle dieser Bedingungen, die ja das Verschwinden von Potenzen x^{+1}, x^{-1}, x^{-2} und x^{-3} in den Reihen (57) verlangen, solche verwenden, die das Verschwinden der Potenzglieder x^{13}, x^{11}, x^{10} und x^9 fordern, also $\oint f \frac{dx}{x^{14}} = 0$, $\oint f \frac{dx}{x^{12}} = 0$ usw. Aus diesen allen fallen die sechs mit y_{II} verbundenen Konstanten heraus. Diese Konvergenzschwierigkeit wird sogleich noch weiter zu besprechen sein. Zunächst bestimmen wir die Koeffizienten von y_I; um zu ganz übersichtlichen Formeln zu kommen, berechnen wir die asymptotischen

Formeln von y_1 und y_2 gesondert; dann müssen wir zu den Bedingungen (60) noch eine hinzufügen, die das Verschwinden der Potenzglieder x^2, bzw. x^0 verlangt, d. i.:

$$
\text{(60a)} \qquad \begin{cases} \text{für } y_1 \text{ die Bedingung } \oint f \dfrac{dx}{x^3} = 0, \\[2ex] \text{für } y_2 \text{ die Bedingung } \oint f \dfrac{dx}{x} = 0. \end{cases}
$$

Jedes der in (60) und (60a) stehenden Integrale besteht nun wieder aus einer Summe von Integralen $\int y_I x^\lambda dx$ mit verschiedenen Grenzen, die sich alle durch Einführung passender Variablen ($x = \xi e^{i\pi/3}$ usw.) auf ein Integral zurückführen lassen, das aus der Gleichung für die A herausfällt. Da dieses Integral stets von Null verschieden ist, kommen wir für die Reihe y_2 zu dem Gleichungssystem ($A_2 = 1$ gesetzt):

$$
\text{(61)} \qquad \begin{cases}
1 + e^{\frac{i\pi}{3}\cdot(-2)} A_4 + e^{\frac{2i\pi}{3}\cdot(-2)} A_6 + e^{\frac{3}{3}i\pi\cdot(-2)} A_8 + e^{\frac{4}{3}i\pi\cdot(-2)} A_{10} \\
\qquad + e^{\frac{5}{3}i\pi\cdot(-2)} A_{12} = 0, \\[1ex]
1 + e^{\frac{i\pi}{3}\cdot(-1)} A_4 + e^{\frac{2}{3}i\pi\cdot(-1)} A_6 + e^{\frac{3}{3}i\pi\cdot(-1)} A_8 + e^{\frac{4}{3}i\pi\cdot(-1)} A_{10} \\
\qquad + e^{\frac{5}{3}i\pi\cdot(-1)} A_{12} = 0, \\[1ex]
1 + A_4 + A_6 + A_8 + A_{10} \\
\qquad + A_{12} = 0, \\[1ex]
1 + e^{\frac{i\pi}{3}\cdot 1} A_4 + e^{\frac{2}{3}i\pi\cdot 1} A_6 + e^{\frac{3}{3}i\pi\cdot 1} A_8 + e^{\frac{4}{3}i\pi\cdot 1} A_{10} \\
\qquad + e^{\frac{5}{3}i\pi\cdot 1} A_{12} = 0, \\[1ex]
1 + e^{\frac{i\pi}{3}\cdot 2} A_4 + e^{\frac{2i\pi}{3}\cdot 2} A_6 + e^{\frac{3}{3}i\pi\cdot 2} A_8 + e^{\frac{4}{3}i\pi\cdot 2} A_{10} \\
\qquad + e^{\frac{5}{3}i\pi\cdot 2} A_{12} = 0.
\end{cases}
$$

Die Lösung lautet[2]):

$$
\text{(62)} \qquad A_4 = A_8 = A_{12} = -1, \quad A_6 = A_8 = +1.
$$

Die Verknüpfung dieser asymptotischen Lösung (f_2) mit der Funktion y_2 am Nullpunkt, wo

$$
y_2 = C_2 x^2 + C_8 x^8 + \ldots,
$$

---

[2]) Dieses Ergebnis — wie auch manche früheren Teilergebnisse — kann man übrigens auch unmittelbar erhalten; denn aus (57) folgt, daß $\frac{y_2}{x^2}$ in jedem Sextanten der x-Ebene dieselben Werte annehmen muß. Die Verknüpfung mit den anderen A, sowie mit den konvergenten Reihen ist aber nur durch die Cauchyschen Integrale zu erhalten.

wird geliefert durch

$$2\pi i C_2 = \oint f_2 \frac{dx}{x^3} = \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/3} y_1 \frac{dx}{x^3} \cdot [1 - A_4 + A_6 - A_8 + A_{10} - A_{12}]$$

$$= 6 \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/3} y_1 \frac{dx}{x^3}.$$

Durch die Einführung $-\frac{x^6}{6} = z$ wird dieses Integral wieder auf eine Reihe nach reziproken Π-Funktionen zurückgeführt, und wir erhalten:

$$2\pi i C_2 = i\sqrt{6} \cdot \frac{2\pi i}{\Pi(-\frac{1}{2})} F\left(-\frac{5}{6}, -\frac{3}{6}, \frac{1}{2}, 1\right). \tag{63}$$

Ebenso:

$$2\pi i C_8 = 6 \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/3} y_1 \frac{dx}{x^9} = -i\frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{2\pi i}{\Pi(\frac{1}{2})} F\left(-\frac{5}{6}, -\frac{3}{6}, \frac{3}{2}, 1\right). \tag{63a}$$

Wir können diese Ergebnisse nicht ganz durch andere Rechnungen *kontrollieren*, da es keinen anderen Weg gibt, um bei der vorgelegten Differentialgleichung diese Fortsetzungsrelationen zu berechnen; wohl aber muß bei richtiger Rechnung das Verhältnis $\frac{C_8}{C_2}$ mit dem Koeffizienten des 2. Gliedes der Reihe in (57) übereinstimmen:

$$\frac{C_8}{C_2} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(\frac{1}{2})} \cdot \frac{F(-\frac{5}{6}, -\frac{3}{6}, \frac{3}{2}, 1)}{F(-\frac{5}{6}, -\frac{3}{6}, \frac{1}{2}, 1)} = 0{,}230 \tag{64}$$

mit Rechenschiebergenauigkeit und drei Reihengliedern gegenüber $\frac{11}{6 \cdot 8} = 0{,}229$ in (57).

Um die durch die *Reihe* y_1 (57) gegebene *Partikularlösung* f_1 zu erhalten, müssen wir die 2. Gleichung des Systems (61) weglassen, dafür die aus $\oint f_1 \frac{dx}{x^3} = 0$ folgende Gleichung:

$$1 - A_4 + A_6 - A_8 + A_{10} - A_{12} = 0 \tag{65}$$

hinzunehmen. Die Lösung ist dann:

$$A_4 = e^{\frac{i\pi}{3}} \quad A_6 = e^{\frac{2}{3}i\pi} \quad A_8 = e^{\frac{3}{3}i\pi} \quad A_{10} = e^{\frac{4}{3}i\pi} \quad A_{12} = e^{\frac{5}{3}i\pi}, \tag{66}$$

und wenn wir jetzt $f_1 = C_0 + C_6 x^6 + \ldots$ setzen, erhalten wir:

$$2\pi i C_0 = \oint f_1 \frac{dx}{x} = 6 \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/3} y_1 \frac{dx}{x} = e^{\frac{i\pi}{3}} 6^{\frac{1}{6}} \frac{2\pi i}{\Pi(-\frac{5}{6})} F\left(-\frac{5}{6}, -\frac{3}{6}, \frac{1}{6}, 1\right),$$

$$2\pi i C_6 = \oint f_1 \frac{dx}{x^7} = -\frac{e^{\frac{i\pi}{3}} 6^{\frac{1}{6}}}{6} \frac{2\pi i}{\Pi(\frac{1}{6})} F\left(-\frac{5}{6}, -\frac{3}{6}, \frac{7}{6}, 1\right), \tag{67}$$

so daß $\frac{C_6}{C_0} = 0{,}378$ bei vier Reihengliedern gegenüber 0,375 nach (57). Die Koeffizienten der ersten *negativen Potenzen* C_{-6}, C_{-4} verschwinden auch hier, wie es sein muß, denn sie sind

$$(68) \qquad F\left(-\frac{5}{6}, -\frac{3}{6}, -\frac{5}{6}, 1\right) \quad \text{oder} \quad F\left(-\frac{5}{6}, -\frac{3}{6}, -\frac{3}{6}, 1\right)$$

proportional, und diese hypergeometrischen Reihen sind Null, wie man der Darstellung

$$(69) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Pi(\gamma - 1)\,\Pi(\gamma - \alpha - \beta - 1)}{\Pi(\gamma - \alpha - 1)\,\Pi(\gamma - \beta - 1)},$$

deren Nenner in unseren Fällen unendlich werden, entnehmen kann.

Über die weiteren Koeffizienten $C_{-12}\ldots$ läßt sich indeß nichts aussagen, da in diesen Fällen die hypergeometrischen Reihen divergieren, und somit die *Koeffizienten nicht mehr durch Cauchysche Integrale darstellbar* sind.

Der Ausdruck (69) wird mit der Funktion $\Pi(\gamma - \alpha - \beta - 1)$ unendlich, wenn $\gamma - \alpha - \beta = 0$; die in unseren Formeln verwendeten hypergeometrischen Reihen konvergieren nur, wenn $\gamma - \alpha - \beta > 0$, d. i. in unserem Fall bei allen Gliedern x^ν, deren Exponent $\nu > -9$ ist. Für $\nu = -9$ wird das betreffende Integral $\int\limits_{q=0}^{q=x^3} y_I x^8\, dx$ unendlich mit dem darin auftretenden Faktor $F\left(-\frac{5}{6}, -\frac{3}{6}, -\frac{8}{6}\; -1\right)$; infolgedessen *verschwindet* der Koeffizient C_{-9} *nicht* mit dem von den A abhängigen Faktor, sondern ergibt einen endlichen Grenzwert. Im allgemeinen Fall (52) entspricht dem C_{-9} der Koeffizient C_{-g}, der mit x^{-g} multipliziert ist; der Exponent $-g$ tritt aber gerade als erster in der zweiten, bisher vernachlässigten asymptotischen Lösung y_{II} auf; dieses Integral muß also additiv hinzutreten, wenn auch C_{-9} usw. verschwinden sollen. Wir erhalten also folgendes Resultat: *Die Funktionen f_1 und f_2, die nur auf dem Ausdruck y_I aufgebaut sind, nähern asymptotisch eine Funktion an, die in eine Potenzreihe entwickelt mit einer Lösung der Differentialgleichung alle Potenzen mit Exponenten $> -g$ gemeinsam hat, aber in den Potenzen $\leqq g$ davon abweicht. Weiter zu kommen ist aber mit unserer Methode nicht möglich*; auch die Koeffizienten $A_1 \ldots A_{11}$ können wir nicht nach unserem Verfahren berechnen; denn die Cauchyschen Integrale $\int y_{II} x^\lambda\, dx$ werden unendlich, wenn $\lambda \geqq g - 1$; sie können nicht verschwinden und nicht mit den Koeffizienten der negativen Potenzen in den konvergenten Potenzreihen identifiziert werden. Dieses Wachsen der Integrale ins Unendliche auch in Gebieten, wo $y_{II} < y_I$, muß aber zur Folge haben, daß das Integral über den Fehler nach den Überlegungen II § 5 sehr groß werden

und mit wachsendem Reihenglied m beliebig anwachsen muß, was sich in der Divergenz der hypergeometrischen Reihe zeigt.

Man kann sich denselben Tatbestand anschaulich in folgender Weise klarmachen. Ist in einem Gebiete $y_I > y_{II}$, so kann sich nach der Natur der asymptotischen Ausdrücke in diesem Gebiet der mit y_{II} multiplizierte Koeffizient ändern; er kann an den entgegengesetzten Grenzen des Gebietes verschiedene Werte haben. Solange y_{II} eine Exponentialfunktion mit negativ reellem Teil des Exponenten ist, verschwindet das $\oint y_{II}\, x^{\lambda}\, dx$ auf jedem Weg, der den Nullpunkt nicht umschließt [s. Gl. (11)], auch wenn ein Sprung im Integrationsgebiet vorhanden ist. Dies ist aber nicht mehr der Fall, wenn y_{II} eine Potenzreihe ohne Exponentialfunktion ist, oder wenn der Exponent einen positiv reellen Teil hat. Wenn aber die den Nullpunkt ausschließenden Integrale nicht verschwinden, hat es gar keinen Sinn, die Cauchyschen Integrale mit den Koeffizienten der konvergenten Reihen zu identifizieren. Wir erhalten also das Ergebnis, daß die *Bedingungen* (11) für *die Anwendbarkeit unserer Methode wesentlich sind*, daß diese also nur angewandt werden kann, wenn die springenden Koeffizienten A mit Exponentialfunktionen mit negativ reellem Teil des Exponenten multipliziert sind.

§ 5.

Zurückführung des zweiten Falles auf den ersten.

Wir müssen nun, wenn wir Differentialgleichungen wie (52) bzw. (56) integrieren wollen, erst durch Einführung neuer Variabler dafür sorgen, daß die beiden asymptotischen Näherungen Exponentialfunktionen mit entgegengesetzten Vorzeichen des Exponenten enthalten. Dies ist im behandelten Beispiel leicht; wir brauchen nur in (56)

$$y = \exp\left(-\frac{x^6}{12}\right)\cdot z \tag{70}$$

zu setzen. Dann gehorcht z der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{d x^2} - \frac{1}{x}\frac{d z}{d x} + 7 x^4 z - \frac{x^{10}}{4} z = 0. \tag{71}$$

Diese Differentialgleichung ist nicht mehr zweistufig; aber sie läßt sich — wie es ja nach (70) selbstverständlich ist — durch einfache asymptotische Ausdrücke annähern. Die konvergenten Lösungen sind:

$$\left\{\begin{aligned} z_1 &= 1 - \frac{7}{4\cdot 6} x^6 + \frac{1}{10\cdot 12}\left(\frac{7\cdot 7}{4\cdot 6} - \frac{1}{4}\right) x^{12} - \ldots, \\ z_2 &= x^2 - \frac{7}{6\cdot 8} x^8 + \frac{1}{12\cdot 14}\left(\frac{7\cdot 7}{6\cdot 8} - \frac{1}{4}\right) x^{14} - \ldots. \end{aligned}\right. \tag{72}$$

Die asymptotischen Näherungen sind:

$$(73)\quad \begin{cases} z_{\mathrm{I}} = \exp\left(-\frac{x^6}{12}\right) x^5 \left[1 + \left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{3}{6}\right)\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{12}{x^6}\right) + \dots\right], \\ z_{\mathrm{II}} = \exp\left(\frac{x^6}{12}\right) x^{-9} \left[1 + \frac{9}{6}\cdot\frac{11}{6}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{x^6} + \dots\right]. \end{cases}$$

Die Gebietseinteilung ist dieselbe wie in Fig. 4. Die asymptotische Lösung ist analog (59) gegeben durch

Gebiet I: $A_1 z_{\mathrm{II}}$; Gebiet II: $A_2 z_{\mathrm{I}}$; Gebiet III: $A_3 z_{\mathrm{II}}$ usw.

Wir gehen auch hier vor wie im vorigen Paragraphen und *bestimmen zunächst* die asymptotische Form der partikulären Lösung, die z_1 proportional ist. Wir setzen $A_1 = 1$ und haben die Bedingungen

$$(74)\quad \begin{gathered} \oint f x^{-3} d x = 0, \quad \oint f x^{-2} d x = 0, \quad \oint f d x = 0, \\ \oint f x d x = 0, \quad \oint f x^2 d x = 0. \end{gathered}$$

Die Form der Gleichungen, die man diesmal erhält, weicht von den bisherigen insofern ab, als die Integrale über z_{I} und z_{II} nicht durch Einführung der entsprechenden neuen Variablen ineinander übergehen und infolgedessen in den Gleichungen für die A stehenbleiben. Die Bedingung $\oint f d x = 0$ erhält z. B. die Form:

$$(75)\quad \begin{aligned} &\int_{\varphi=-\pi/12}^{\varphi=+\pi/12} z_{\mathrm{II}}\, d x \Big[1 + A_3 e^{\frac{i\pi}{3}\cdot(-8)} + A_5 e^{\frac{2i\pi}{3}\cdot(-8)} + A_7 e^{\frac{3i\pi}{3}\cdot(-8)} \\ &\qquad\qquad + A_9 e^{\frac{4i\pi}{3}\cdot(-8)} + A_{11} e^{\frac{5i\pi}{3}\cdot(-8)}\Big] \\ &+ \int_{\varphi=\pi/12}^{\varphi=3\pi/12} z_{\mathrm{I}}\, d x \Big[A_2 + A_4 e^{\frac{i\pi}{3}\cdot 6} + A_6 e^{\frac{2i\pi}{3}\cdot 6} + A_8 e^{\frac{3i\pi}{3}\cdot 6} \\ &\qquad\qquad + A_{10} e^{\frac{4i\pi}{3}\cdot 6} + A_{12} e^{\frac{5i\pi}{3}\cdot 6}\Big] = 0. \end{aligned}$$

Bei früheren Beispielen verschwanden mit diesem Integral alle diejenigen von selbst, bei welchen die eckigen Klammern dieselben waren; das wären in unserem Falle alle diejenigen Integrale, die noch eine Potenz $x^6, x^{12}, \dots$ enthalten. Hier sollen diese Integrale auch verschwinden; denn es tritt in den konvergenten Reihen nicht nur kein Glied mit x^{-1}, sondern auch keines mit $x^5, x^{11} \dots$ auf. Da aber die Integrale

$$\int_{\varphi=-\pi/12}^{\varphi=+\pi/12} z_{\mathrm{II}}\, x^{6n} d x \quad \text{und} \quad \int_{\varphi=\pi/12}^{\varphi=3\pi/12} z_{\mathrm{I}}\, x^{6n} d x$$

keineswegs in einem von n unabhängigen Verhältnis stehen, müssen notwendig die *eckigen Klammern in* (75) *einzeln verschwinden.* Dies führt bei Erfüllung aller Gleichungen (74) zu den Werten:

$$(76)\qquad \begin{cases} A_3 = A_7 = A_{11} = -1, & A_5 = A_9 = 1; \\ A_4 = e^{\frac{i\pi}{3}} A_2, \quad A_6 = e^{\frac{2i\pi}{3}} A_2, & A_8 = e^{\frac{3i\pi}{3}} A_2, \\ A_{10} = e^{\frac{4i\pi}{3}} A_2, \quad A_{12} = e^{\frac{5i\pi}{3}} A_2. \end{cases}$$

Bei diesen A-Werten verschwinden alle Koeffizienten der konvergenten Reihen bis auf diejenigen mit $\ldots x^{+6}, x^0, x^{-6}\ldots$. Diese sind dargestellt durch

$$(77)\qquad \Phi_\lambda = \oint f x^\lambda dx \quad \text{mit} \quad \lambda = 5 + 6m$$

$$= 6\Big[\int\limits_{\varphi=-\pi/12}^{\varphi=+\pi/12} z_{II}\, x^\lambda dx + A_2 \int\limits_{\varphi=\pi/12}^{\varphi=3\pi/12} z_I\, x^\lambda dx\Big]$$

oder

$$(77\,\mathrm{a})\qquad \Phi_\lambda = 6\Big[\frac{12^{m-\frac{3}{6}}}{6}\cdot\frac{2\pi i}{\Pi(\frac{3}{6}-m)} F\Big(\frac{9}{6}, \frac{11}{6}, \frac{9}{6}-m, \frac{1}{2}\Big)$$

$$+ A_2 e^{i\pi m}\frac{12^m}{6}\frac{2\pi i}{\Pi(-\frac{11}{6}-m)} F\Big(-\frac{5}{6}, -\frac{3}{6}, -\frac{5}{6}-m, \frac{1}{2}\Big)\Big].$$

Für $m \geqq 0$ läßt sich auch übersichtlicher schreiben:

$$(77\,\mathrm{b})\qquad \Phi_\lambda = 2\pi i\cdot 12^m\Big[\frac{12^{-3/6}}{\Pi(\frac{3}{6}-m)}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{-11/6} F\Big(\frac{11}{6}, -m, \frac{9}{6}-m, -1\Big)$$

$$+ A_2 e^{i\pi m}\frac{1}{\Pi(-\frac{11}{6}-m)}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{3/6} F\Big(-\frac{3}{6}, -m, -\frac{5}{6}-m, -1\Big)\Big].$$

Die Bedingung $\Phi_5 = 0$ ergibt

$$(78)\qquad A_2 = -\frac{e^{-i\pi m}}{\sqrt{12}}\, 2^{7/3}\frac{\Pi(-\frac{11}{6})}{\Pi(\frac{3}{6})}.$$

Daß der Ausdruck

$$(79)\qquad \Phi_\lambda = 2\pi i\cdot\frac{12^{m-\frac{1}{2}} 2^{\frac{11}{6}}}{\Pi(\frac{3}{6})}\cdot\Big[\frac{\Pi(\frac{3}{6})}{\Pi(\frac{3}{6}-m)} F\Big(\frac{11}{6}, -m, \frac{9}{6}-m, -1\Big)$$

$$-\frac{\Pi(-\frac{11}{6})}{\Pi(-\frac{11}{6}-m)} F\Big(-\frac{3}{6}, -m, -\frac{5}{6}-m, -1\Big)\Big]$$

für positive m verschwindet, entsprechend dem Fehlen negativer Potenzen in der Reihe z_1, kann man durch Nachrechnung leicht verifizieren; eine allgemeine Formel, aus der dies folgt, konnte ich nicht finden. Für *negative m gilt* (79) *nicht,* da dann die hypergeometrischen Reihen nicht mehr konvergieren; aber (77 a) bleibt verwendbar und muß die Koeffizienten der Reihe z_1 ergeben.

Die Berechnung der Koeffizienten und der Umlaufkonstanten A für z_2 geht ganz analog. Aus den asymptotischen Lösungen $z_{\mathrm{I,\,II}}$ ergeben sich $y_{\mathrm{I,\,II}}$ einfach durch Multiplikation mit $\exp\left(\frac{x^6}{12}\right)$; die Umlaufskonstanten sind dieselben. Soweit die Rechnung des vorigen Paragraphen überhaupt Resultate gab, werden sie bei der jetzigen Rechnung bestätigt.

Der geschilderte Gedankengang läßt sich ohne Schwierigkeiten auf den Fall logarithmischer Singularität im Nullpunkt übertragen. Ich lasse meine diesbezüglichen Rechnungen hier beiseite, um nicht zuviel Raum zu beanspruchen. Dagegen scheint es mir wichtig, einen Blick auf die Probleme zu werfen, die bei mehrstufigen Differentialgleichungen auftreten.

IV. Beispiel einer einfachen dreistufigen Differentialgleichung.

Wir wählen als Beispiel die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - (x^2 - k^2)\, y = 0 \tag{80}$$

mit positiv reellem k^2 und stellen uns wieder die Aufgabe, für jeden beliebigen komplexen Wert von x eine rechnerisch brauchbare Lösung anzugeben. Die Gleichung hat im Endlichen keine, im Unendlichen eine wesentliche Singularität. Die Entwicklungen vom Punkte $x = 0$ sind:

$$\begin{cases} y_0 = 1 - \frac{k^2}{1\cdot 2} x^2 + \frac{1}{3\cdot 4}\left(\frac{k^4}{1\cdot 2} + 1\right) x^4 - \frac{1}{5\cdot 6}\left(\frac{k^6}{4!} - \frac{k^2}{3\cdot 4} - \frac{k^2}{1\cdot 2}\right) x^6 + \ldots \\ y_1 = x - \frac{k^2}{2\cdot 3} x^3 + \frac{1}{4\cdot 5}\left(\frac{k^4}{2\cdot 3} + 1\right) x^5 - \frac{1}{6\cdot 7}\left(\frac{k^6}{5!} - \frac{k^2}{4\cdot 5} - \frac{k^2}{2\cdot 3}\right) x^7 + \ldots \end{cases} \tag{81}$$

(81a) (Bildungsgesetz: $a_m = \frac{1}{m(m-1)}\left(-k^2 a_{m-2} + a_{m-4}\right)$).

Sie sind theoretisch immer konvergent, praktisch aber nur für mäßige k^2 verwendbar; bei großem k^2 sind sie nur für kleine x-Werte brauchbar.

Asymptotische Entwicklungen für große Werte des Faktors $(x^2 - k^2)$ gewinnt man in der folgenden üblichen Weise: Man setzt

$$y = \exp\left[\pm \int \left(x\, \Psi_0 + \frac{1}{x}\, \Psi_1 + \frac{1}{x^3}\, \Psi_2 + \ldots\right) d x\right], \tag{82}$$

wobei die Ψ Funktionen von $\left(\frac{k}{x}\right)^2$ sind. Bildet man die Differentialquotienten dieses Ausdrucks und setzt in (80) ein, so ergeben sich nacheinander

$$\Psi_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{k}{x}\right)^2}, \quad \Psi_1 = \mp \frac{1}{2}\, \frac{1}{1 - \left(\frac{k}{x}\right)^2}, \quad \Psi_2 = -\, \frac{3 + 2\left(\frac{k}{x}\right)^2}{8\left(1 - \left(\frac{k}{x}\right)^2\right)^{5/2}} \tag{83}$$

und daraus

$$y = \frac{\exp\left\{\pm \int \sqrt{x^2 - k^2}\, dx\right\}}{(x^2 - k^2)^{1/4}} \left[1 \mp \int \frac{3 + 2\left(\frac{k}{x}\right)^2}{8\left(1 - \left(\frac{k}{x}\right)^2\right)^{5/2}} \frac{dx}{x^3} + \dots\right]. \tag{84}$$

Dabei kann eine untere Grenze irgendwie gewählt werden; nur die Punkte $x = \pm k$, an welchen die Darstellung versagt, müssen außerhalb des Integrationsweges bleiben. Obere Grenze ist die Variable. Mit Ausdrücken wie (84) ist schwer zu rechnen, besonders wenn die Integrale nicht in geschlossener Form ausführbar sind. Weitere Integrationen, wie sie unsere Methode verlangt, am Ausdruck (84) vorzunehmen, ist unmöglich; wir werden daher (84) zwar nicht aus den Augen lassen und wenigstens den Ausdruck vor der Klammer später benutzen; aber zur Bestimmung der Umlaufs- und Fortsetzungsrelationen müssen wir einfachere Formeln suchen.

In unserem Falle können wir, wie früher, den Ansatz machen:

$$y = \exp\{\pm \mathrm{const}\, x^{\alpha}\}\, x^{u}\left[1 + \frac{b_1}{x^{\alpha}} + \frac{b_2}{x^{2\alpha}} + \dots\right] \tag{85}$$

und erhalten

$$(86)\begin{cases} y_{\mathrm{I}} = \exp\left\{\frac{x^2}{2}\right\} x^{-\frac{k^2+1}{2}}\left[1 + \frac{k^2+1}{4}\cdot\frac{k^2+3}{4}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{k^2+1}{4}\cdot\frac{k^2+3}{4}\right. \\ \qquad\qquad\qquad \left.\cdot\frac{k^2+5}{4}\cdot\frac{k^2+7}{4}\cdot\frac{1}{2!}\,\frac{1}{x^4} + \dots\right] \\ y_{\mathrm{II}} = \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} x^{-\frac{-k^2+1}{2}}\left[1 - \frac{-k^2+1}{4}\cdot\frac{-k^2+3}{4}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{x^2} + \dots\right] \end{cases}$$

(86 a) $\left(\text{Bildungsgesetz: } b_m = b_{m-1}\frac{\pm k^2 - 3 + 4m}{4}\cdot\frac{\pm k^2 - 1 + 4m}{4}\cdot\frac{1}{m}\right)$.

Es ist nicht immer möglich, solche Reihen von der Form (85) aufzustellen; es darf dazu kein Glied der Differentialgleichung in die Reihen ein anderes Glied als x^{α} und seine Potenzen hineinbringen; der Exponent jedes Reihengliedes muß also ein ganzes Vielfaches des Ranges sein. Dies ist nur dann der Fall, wenn die *Stufenhöhe* — d. i. die Differenz der Exponenten von x in zwei Stufen — *nur ein ganzes Vielfaches des Ranges* ist. Ist dies nicht der Fall, so findet man keine so einfach zu behandelnde asymptotische Reihe wie (85) und muß an (82) anknüpfen. Zum Glück sind mehrere praktisch wichtige Differentialgleichungen von der einfacheren Art. Auch in III, § 5 waren wir auf solche dreistufige Differentialgleichungen gestoßen.

Fig. 5.

Auf die Reihen (85) können wir nun unsere Methode ohne weiteres anwenden. Wir teilen die x-Ebene durch Linien „$x^2/2$ rein imaginär“ in vier Gebiete ein und definieren eine Lösung f durch die Festsetzung, daß sie im Gebiet I (Fig. 5) ausgezeichnet sei, also dort $f = y_{II}$. Dann können wir definieren:

$$\text{(87)} \quad \begin{array}{ll} \text{Gebiet I: } f = y_{II}, & \text{Gebiet III: } f = A_3 y_I, \\ \text{,, II: } f = A_2 y_{II}, & \text{,, IV: } f = A_4 y_{II}. \end{array}$$

Aus Kontinuitätsgründen wird $A_2 = 1$ und auch $A_4 = 1$, wenn wir das Azimut von x im Gebiet IV zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $-\frac{3\pi}{4}$ annehmen. Unsere Bedingungen sind:

$$\text{(88)} \qquad \oint f\,dx = 0 \quad \text{und} \quad \oint f\,x\,dx = 0.$$

Die beiden Gleichungen müssen dasselbe Resultat ergeben, da wir nach II, § 5 Ende, das Resultat $A_4 = 1$ schon vorweggenommen haben.

Es ist

$$\text{(89)} \qquad \oint f\,dx = \int\limits_{\varphi=\pi/4}^{\varphi=3\pi/4} y_{II}\,dx\left[1+e^{-\frac{i\pi}{2}(1+k^2)}\right] + A_3 \int\limits_{\varphi=3\pi/4}^{\varphi=5\pi/4} y_I\,dx = 0.$$

Bezeichnen wir allgemein $\int\limits_{\varphi=\pi/4}^{\varphi=3\pi/4} y_{II}\,x^\lambda\,dx$ mit $G_\lambda(-k^2)$, so wird aus (89) die Beziehung

$$\text{(90)} \qquad G_0(-k^2)\left[1+e^{-\frac{i\pi}{2}(1+k^2)}\right] + A_3 G_0(k^2)\,e^{\frac{i\pi}{4}(1-k^2)} = 0.$$

Nun ist

$$\text{(91)} \begin{cases} G_\lambda(-k^2) = \displaystyle\int\limits_{\varphi=\pi/4}^{\varphi=3\pi/4} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x^{\frac{1-k^2}{2}-\lambda}}\left[1-\frac{1-k^2}{4}\cdot\frac{3-k^2}{4}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{x^2}+\ldots\right]dx, \\ \text{und mit } e^{-i\pi}\frac{x^2}{2} = z: \\ = \frac{1}{2}\,e^{i\pi\left(\frac{1+k^2}{4}+\frac{\lambda}{2}\right)}\cdot 2^{\frac{1+k^2}{4}+\frac{\lambda}{2}} \displaystyle\oint \frac{e^z}{z^{\frac{3-k^2}{4}-\frac{\lambda}{2}}}\left[1+\frac{1-k^2}{4}\cdot\frac{3-k^2}{4}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2z}+\ldots\right]dz \\ = e^{i\pi\left(\frac{1+k^2}{4}+\frac{\lambda}{2}\right)}\cdot 2^{\frac{-3+k^2}{4}+\frac{\lambda}{2}} \dfrac{2\pi i}{\Pi\left(\frac{-1-k^2}{4}-\frac{\lambda}{2}\right)} F\left(\frac{1-k^2}{4}, \frac{3-k^2}{4}, \frac{3-k^2}{4}-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ = e^{i\pi\left(\frac{1+k^2}{4}+\frac{\lambda}{2}\right)}\cdot 2^{\lambda-\frac{1}{2}}\cdot \dfrac{2\pi i}{\Pi\left(\frac{-1-k^2}{4}-\frac{\lambda}{2}\right)} F\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda-1}{2}, \frac{3-k^2}{4}-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Durch Einsetzen in (90) erhalten wir:

$$(92)\quad A_3 = -\frac{G_0(-k^2)}{G_0(+k^2)} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{i\pi}{2}(1+k^2)}}{e^{\frac{i\pi}{4}(1-k^2)}} = 2\,i\,e^{\frac{i\pi}{2}k^2} \frac{\Pi\left(\frac{-1+k^2}{4}\right)}{\Pi\left(\frac{-1-k^2}{4}\right)} \sin\frac{\pi}{4}(1-k^2).$$

Wir haben zu zeigen, daß $\oint f\,x\,d\,x = 0$ zum gleichen Ergebnis führt, und erhalten

$$G_{-1}(-k^2)\left(1 + e^{-\frac{i\pi}{2}(3+k^2)}\right) + A_3 G_1(k^2)\, e^{\frac{i\pi}{4}(3-k^2)} = 0$$

und

$$(92\text{a})\qquad A_3 = 2\,i\,e^{\frac{i\pi}{2}k^2} \frac{\Pi\left(\frac{-3+k^2}{4}\right)}{\Pi\left(\frac{-3-k^2}{4}\right)} \sin\frac{\pi}{4}(3-k^2).$$

Da $\sin\pi z \cdot \Pi(-z)\,\Pi(z-1) = \pi$, sind die Ausdrücke (92) und (92a) identisch und können auch geschrieben werden:

$$(92\text{b})\qquad A_3 = \frac{2\,i\,\pi\, e^{i\pi\frac{k^2}{2}}}{\Pi\left(\frac{-1-k^2}{4}\right)\Pi\left(\frac{-3-k^2}{4}\right)}.$$

Man kann ohne Schwierigkeiten wieder zeigen, daß die Integrale $\oint f\,x^\lambda\,d\,x$ bei positivem λ verschwinden und daß sie bei negativem λ die Koeffizienten der Reihen (81) richtig ergeben.

Durch die bisher erhaltenen Formeln ist unsere Aufgabe erfüllt, wenn k^2 klein oder wenigstens nur mäßig ist; wird aber k^2 *groß gegen* 1, so sind die Reihen (81) nur für kleine x praktisch verwendbar und die Reihen (86) versagen, wenn x wesentlich kleiner als k^2 wird. Wir können uns durch weitere Entwicklung der Formel (84) — die natürlich in erster Näherung für kleine $\left(\frac{k}{x}\right)^2$ in (86) übergeht — etwas weiter helfen; doch wird die Rechnung numerisch kompliziert und versagt auch bei *Annäherung an die Punkte* $x = \pm k$; in Bereichen um diese Punkte brauchen wir also bei großem k^2 andere Näherungsformeln.

Wir können eine konvergente Reihe durch Entwicklung vom Punkte $x = k$ erhalten, deren praktische Brauchbarkeit auf die unmittelbare Umgebung von $x = k$ beschränkt ist; wir können auch eine semikonvergente Formel erhalten, indem wir entweder (84) von $x = k$ aus entwickeln oder indem wir die Differentialgleichung in einer angenäherten Form verwenden. Mit

$$(93)\qquad \xi = (x-k)(2k)^{1/3}$$

wird

$$(94)\qquad \frac{d^2 y}{d\xi^2} - \xi y = 0,$$

und die Lösungen sind

$$(95)\qquad \left|\begin{aligned} y_0 &= 1 + \frac{\xi^3}{2\cdot 3} + \frac{\xi^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \cdots, \\ y_1 &= \xi + \frac{\xi^4}{3\cdot 4} + \frac{\xi^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \cdots \end{aligned}\right.$$

und

$$(96)\qquad \overset{*}{y}_{\mathrm{I,II}} = \frac{\exp\left(\pm \frac{2}{3}\xi^{3/2}\right)}{\xi^{1/4}}\left[1 + \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{1}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\pm\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right)} + \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{1}\cdot\frac{\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{6}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{\left(\pm\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right)^2} + \cdots\right],$$

wie man auch durch Spezialisierung der Formel (5) erhalten kann.

Die Ausdrücke $\overset{*}{y}_{\mathrm{I,II}}$ sind nur verwendbar, solange ξ groß und solange $x \lessdot 3k$ ist. Die Gebietseinteilung zeigt Fig. 6; die Bedingung zur Berechnung der Fortsetzungsrelationen ist $\oint f\,dx = 0$. In unserem speziellen Fall ergibt sich

Fig. 6.

$$f = \overset{*}{y}_{\mathrm{II}}$$

in allen 3 Gebieten.

Nun dürfen wir aber dieses $\overset{*}{y}_{\mathrm{II}}$ nicht etwa mit dem y_{II} der Formel (86) identifizieren; beide Ausdrücke sind zwar aus der Formel (84) zu erhalten, aber bei verschiedenen unteren Grenzen des Integrales in (82). Die beiden Größen nähern daher nur bis auf eine multiplikative Konstante denselben Ausdruck in verschiedenen Gebieten an und

$$(97)\qquad \overset{*}{y}_{\mathrm{II}} \text{ entspricht } C_1\, y_{\mathrm{II}}.$$

Eine direkte Bestimmung der Konstante C_1 aus dem Integral in (82) bei bestimmt angenommener unterer Grenze ist grundsätzlich möglich, aber umständlich; wir wollen einen anderen Weg einschlagen.

Ganz analog haben wir in der Umgebung des Punktes $x = -k$ zu verfahren; nur müssen wir bedenken, daß dieser Punkt bei unserer Festsetzung der Azimute φ für die Gebiete II und III der Punkt $x = k e^{+i\pi}$, für IV der Punkt $k e^{-i\pi}$ ist.

$$(97\,\mathrm{a})\qquad \left|\begin{aligned} &\text{In II wird } f = y_{\mathrm{II}} \text{ mit } (x+k)(2k)^{1/3} = \zeta \text{ angenähert durch} \\ &\qquad C_2\frac{\exp\left(-\frac{2}{3}i\zeta^{3/2}\right)}{\zeta^{1/4}}\left[1 + \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{1}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\left(-\frac{2}{3}i\zeta^{3/2}\right)} + \cdots\right], \\ &\text{in III } f = A_3\, y_{\mathrm{I}} \text{ durch } C_3\frac{\exp\left(+\frac{2}{3}i\zeta^{3/2}\right)}{\zeta^{1/4}}[1 + \ldots], \\ &\text{in IV } f = y_{\mathrm{II}} \text{ durch } C_4\frac{\exp\left(+\frac{2}{3}i\zeta^{3/2}\right)}{\zeta^{1/4}}[1 + \ldots]. \end{aligned}\right.$$

Wir haben nun eine Gebietseinteilung nach Fig. 7; im Unendlichen gelten die Formeln (86), in Bereichen um $x = k$ die Formeln (97) und (97a). Zur Überbrückung in Gebieten, wo alle diese Formeln unsicher werden, kann man vielleicht auch (84) direkt — wenigstens die erste Näherung — verwenden.

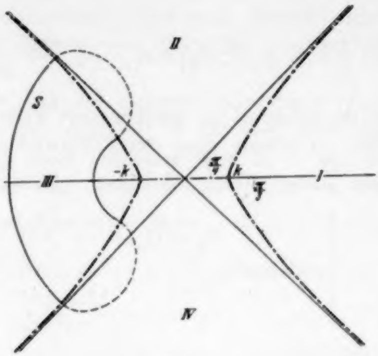


Fig. 7.

In der Umgebung von 0, k und $-k$ hat man die konvergenten Reihen (81) und (95). Es bleibt noch die *Bestimmung der Konstanten C.* Eine Beziehung gibt uns der Umlauf um den Punkt $x = -k$. Es muß sein

$$\oint f\,d\,\xi = \left(C_2 e^{\frac{i\pi}{4}} + C_3 e^{i\pi\frac{3}{4}} + C_4 e^{-\frac{i\pi}{4}}\right) g_0 = 0 \tag{98}$$

mit

$$g_0 = \int\limits_{\varphi=-\pi/3}^{\varphi=+\pi/3} \frac{\exp\left\{\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right\}}{\xi^{1/4}} \left[1 + \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{1}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{2}{3}\xi^{3/2}} + \cdots\right] d\,\xi \tag{99}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \cdot \frac{2\pi i}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Der Umlauf um den Punkt $x = k$ bestimmt C_2 nicht. Integrieren wir die durch $A_3 y_1$ genäherte Funktion auf dem Wege S der Fig. 7, so ergibt sich, da das Integral auf dem punktierten Teil des Weges verschwindet:

$$A_3 G_0(k^2)\, e^{\frac{i\pi}{4}(1-k^2)} = C_3 \frac{g_0}{(2k)^{1/3}}. \tag{100}$$

Ferner sind C_2 und C_4 mit C_1 in einfacher Weise verbunden, da die im gleichen Gebiet gültigen Ausdrücke auch den gleichen Ausdruck nach (84) annähern müssen. Wir beschränken uns auf die ersten beiden Summanden des Integrals in (82), setzen also die Reihen gleich 1 und erhalten, wenn

B eine durch die Festsetzung der unteren Grenze des Integrals bestimmte, für uns belanglose Konstante bedeutet:

$$B\cdot\exp\left\{-\int\limits_0^x\left[\sqrt{x^2-k^2}+\frac{x}{2(x^2-k^2)}\right]dx\right\}=C_1\cdot\frac{\exp\left(-\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right)}{\xi^{1/4}}\text{ für } x\sim k$$

und

$$B\exp\left\{-\int\limits_0^x\left[\sqrt{x^2-k^2}+\frac{x}{2(x^2-k^2)}\right]dx\right\}=C_2\,\frac{\exp\left(-\frac{2}{3}i\zeta^{3/2}\right)}{\zeta^{1/4}}\text{für } x\sim k e^{i\pi}.$$

Wir können hier die Integrale in geschlossener Form auswerten; wäre dies nicht der Fall, so könnte man durch Entwicklung nach Potenzen von $\frac{x-k}{k}$ auch sehr genaue Werte bekommen. Es ergibt sich

$$(101)\qquad \begin{cases} C_2 = C_1 e^{\frac{i\pi}{2}k^2}\,e^{-\frac{i\pi}{4}} \\ \text{und analog} \\ C_4 = C_1 e^{-\frac{i\pi}{2}k^2}\,e^{+\frac{i\pi}{4}}. \end{cases}$$

So erhalten wir schließlich

$$(102)\qquad \begin{cases} C_3 = e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{3}\,(2k)^{1/3}\cos\frac{\pi}{4}(1+k^2)\,\dfrac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{-1-k^2}{4}\right)}\,\dfrac{1}{F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \\[2ex] C_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(2k)^{1/3}\,\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}(1+k^2)}{\cos\frac{\pi}{2}k^2}\,\dfrac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{-1-k^2}{4}\right)}\,\dfrac{1}{F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}. \end{cases}$$

Man beachte, daß C_3 und A_3 null werden, wenn k^2 eine ungerade ganze Zahl ist; dies bedeutet, daß die Lösung der Differentialgleichung, die in I exponentiell verschwindet, dies auch in III tut. Dagegen hätte es keinen Sinn, wenn $C_1 = 0$ würde, und dies ist in der Tat auch für ungerade ganze k^2 nicht der Fall.

Von besonderem Interesse sind die *Werte* unserer Lösung auf der *reellen Achse* zwischen $+k$ und $-k$. Dort haben wir die Summe der beiden Funktionen einzusetzen, die auf den beiden Seiten beherrschend sind, also von $x = k$ aus:

$$f=\left\{C_1\frac{\exp\left(-\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right)}{\xi^{1/4}}[1+\ldots]\right\}_{\xi=\xi_0 e^{i\pi}}+\left\{C_1\frac{\exp\left(-\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right)}{\xi^{1/4}}[1+\ldots]\right\}_{\xi=\xi_0 e^{-i\pi}}$$

oder in erster Näherung

$$(103)\qquad f = 2\,C_1\,\frac{\cos\left(\frac{2}{3}\xi_0-\frac{\pi}{4}\right)}{\xi_0^{1/4}}.$$

Diese Fortsetzung einer nach dem positiv Unendlichen exponentiell abfallenden Lösung durch den cos mit der Phase $\frac{\pi}{4}$, wenn die Variable unter k sinkt, spielt in der *Wellenmechanik* eine Rolle; sie ist dort von Kramers auf anderem Wege abgeleitet worden.

Zur numerischen Probe unserer Formeln wollen wir den *Wert der Lösung für* $x = 0$ berechnen, der auch deshalb wichtig ist, weil er die Verknüpfung der Reihen vom Nullpunkt aus mit den asymptotischen Näherungen gibt.

Formel (103) und die entsprechende von $x = -k$ aus berechnete geben den Wert nur ungenau; es ist aber keine Schwierigkeit, durch Weiterentwicklung einen genaueren Wert zu finden; wir finden dann im Argument des cos eine Reihe, die sich dem — aus der geschlossenen Integration hervorgehenden — Wert $\frac{\pi}{4}(k^2-1)$ annähert, und im Nenner statt $\xi^{1/4}$ den Ausdruck $\xi^{1/4}\left(1+\frac{\xi}{2k^{4/3}}\right)^{1/4}$; wir erhalten als gute Näherung;

$$(104)\quad y_{x=0} = 2C_1 \frac{\cos\frac{\pi}{4}(k^2-1)}{2^{1/12}k^{1/3}\left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}}$$

$$= \sqrt{6}\,\pi \frac{\cos\frac{\pi}{4}(1-k^2)\cos\frac{\pi}{4}(1+k^2)}{\cos\frac{\pi}{2}k^2}\cdot\frac{1}{\Pi\left(\frac{-1-k^2}{4}\right)}\cdot\frac{1}{F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{6}\,\pi}{2}\cdot\frac{1}{\Pi\left(\frac{-1-k^2}{4}\right)}\cdot\frac{1}{F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} = \frac{1{,}78}{\Pi\left(\frac{-1-k^2}{4}\right)}.$$

Die exakte Berechnung durch Bildung des Residuums aus der asymptotischen Lösung ergibt nach (91):

$$(105)\quad y_{x=0} = \frac{1}{2\pi i}\oint f\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[G_{-1}(-k^2)\left(1+e^{-\frac{i\pi}{2}(k^2-1)}\right) + A_3 G_{-1}(k^2)\,e^{-\frac{i\pi}{4}(1+k^2)}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\cos\frac{\pi}{4}(1-k^2)}{\Pi\left(\frac{1-k^2}{4}\right)}\Big[F\left(\frac{1}{2},1,\frac{5-k^2}{4},\frac{1}{2}\right)$$

$$-\frac{k^2-1}{k^2+1}F\left(\frac{1}{2},1,\frac{5+k^2}{4},\frac{1}{2}\right)\Big].$$

Die beiden Formeln (104) und (105), die natürlich ihrer Herkunft nach nur für hinreichend große k^2 gelten können, verschwinden beide dann, wenn

$k^2 + 1$ ein ganzes Vielfaches von 4 ist, also für $k^2 = 3, 7, \ldots$; ist $k^2 = 5, 9, \ldots$, so wird wohl $\Pi\left(\frac{1-k^2}{4}\right)$ unendlich, aber trotzdem (105) nicht Null, da die eine hypergeometrische Reihe entsprechend unendlich wird, so daß ein endlicher Grenzwert herauskommt.

Numerische Berechnung mit Rechenschieber ergibt für

$k^2 =$	10	9	1
y nach (104)	0,64	0,74	1,0
y nach (105)	0,64	0,74	1,0.

Daß die Übereinstimmung auch noch bei $k^2 = 1$ so gut ist, war gar nicht zu erwarten.

Eine von der diskutierten Lösung unabhängige *zweite Lösung* kann man erhalten, wenn man von dem in einem der Gebiete II, III oder IV exponentiell verschwindenden Ausdruck ausgeht und ihn nach unserer Methode fortsetzt. Ist $A_3 = C_3 = 0$, so wird die von Gebiet III ausgehende Lösung allerdings — bis auf eine belanglose Konstante — identisch mit der diskutierten von I ausgehenden Lösung.

Über Anwendungen der geschilderten Methode auf Probleme der Wellenmechanik und der Turbulenztheorie hoffe ich bald an anderer Stelle berichten zu können.

Meinem Freunde Otto Blumenthal danke ich herzlichst für die vielseitige Förderung, die er dieser Arbeit durch Kritik und Beratung hat zu Teil werden lassen.

(Eingegangen am 1. 7. 1935.)

Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente. II.
(Analytische Mittelwerte.)

Von

Georg Aumann in München, z. Z. Princeton, N. J. (U. S. A.).

1. Einleitung.

Den im ersten Teil dieser Arbeit angestellten Untersuchungen über *reelle* Mittelwerte[1]) sollen hier ähnliche Betrachtungen über *analytische* Mittelwerte an die Seite gestellt werden. Bereits die bisherigen Untersuchungen über analytische Mittelwerte[2]) haben deutlich erkennen lassen, welche ausgezeichnete Rolle die sogenannten quasiarithmetischen Mittelwerte, d. h. die durch eine Abbildung aus dem arithmetischen Mittel hervorgehenden Mittelwerte innerhalb der ganzen Theorie spielen; dies wird sich in der vorliegenden Arbeit aufs neue bestätigen.

Um eine gewisse Übersicht über den bisherigen Stand der Theorie zu haben, stelle ich in einer Vorbemerkung (in 2) einige Eigenschaften der analytischen Mittelwerte zusammen.

Im Vordergrund der eigentlichen Betrachtungen stehen drei mittelerzeugende Algorithmen[3]). Der erste ist der schon für reelle Mittel behandelte *Erhöhungsalgorithmus;* er ordnet jedem analytischen Mittel von n Argumenten in eindeutiger Weise ein analytisches Mittel von $n+1$ Argumenten zu, das *Obermittel*. Der zweite Algorithmus ist der *Erniedrigungsalgorithmus*, durch den einem Mittel von n Argumenten in eindeutiger Weise ein Mittel von $n-1$ Argumenten, das *Untermittel*, zugewiesen wird; er ist nichts anderes als die bekannte Auflösungsmethode der Gleichung

$$w = M(z_1, \ldots, z_{n-1}, w)$$

nach w mittels Iteration. Bei beiden Prozessen wird auf das Umkehrungsproblem eingegangen. Die naheliegende Frage, unter welchen Umständen

---

[1]) G. Aumann, Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente. I., Math. Annalen **109** (1933), S. 235—253, im folgenden mit „I.“ gekennzeichnet.

[2]) G. Aumann, Grundlegung der Theorie der analytischen Mittelwerte, Sitz. Ber. Bay. Ak. Wiss. 1934, S. 45—81; Über die Struktur der analytischen Konvexitäten, ebenda 1935, S. 71—80.

[3]) Den für eine Aufbautheorie bedeutsamen „Mischalgorithmus“ [G. Aumann, Über den Mischalgorithmus bei analytischen Mittelwerten, Math. Zeitschr. **39** (1935), S. 625—629] lassen wir hier außer Betracht.

die beiden genannten algorithmischen Prozesse zueinander invers sind, führt auf eine Funktionalgleichung, der jedes Mittel genügen muß, das dem Untermittel seines Obermittels gleich ist. Für zwei Argumente hat diese Funktionalgleichung die Gestalt:

$$M(z_1, z_2) = M\big(M(z_1, M(z_1, z_2)), M(M(z_1, z_2), z_2)\big).$$

Wir beweisen, daß diese Funktionalgleichung, und auch die entsprechende für mehr als zwei Argumente, für die quasiarithmetischen Mittel charakteristisch ist. Im Zusammenhang damit steht das folgende Problem:

Wie sieht ein *vollkommenes System* von Mittelwerten aus, d. h. eine Folge

$$M_2(z_1, z_2), M_3(z_1, z_2, z_3), \ldots, M_n(z_1, \ldots, z_n), \ldots$$

von analytischen Mittelwerten mit der Eigenschaft, daß jedes von ihnen das Obermittel des vorausgehenden und zugleich das Untermittel des nachfolgenden ist?

Es zeigt sich, daß jedes vollkommene System ein konformes Bild des Systems der arithmetischen Mittel ist[4]).

Die rechte Seite der obigen Funktionalgleichung stellt für jedes analytische Mittel M ein analytisches Mittel dar, das *iterierte Mittel von M*. Die Wiederholung dieser Iteration, d. h. die Bildung des iterierten Mittels vom iterierten Mittel, usw., ist der dritte der in Betracht stehenden Algorithmen. Wir zeigen, daß für jedes analytische Mittel M die Folge der iterierten Mittel konvergiert, und zwar gegen ein durch M eindeutig bestimmtes quasiarithmetisches Mittel Q_M. Dieses Mittel Q_M hat die charakteristische Eigenschaft, daß jedes M-konvexe Kontinuum der z-Ebene, d. h. ein Kontinuum, das mit jedem System von n Punkten $z_1, \ldots, z_n$ auch den Punkt $M(z_1, \ldots, z_n)$ enthält, zugleich Q_M-konvex ist. Damit ist von ganz anderer Seite her der Struktursatz über analytische Konvexitäten[5]) zum zweiten Mal bewiesen.

Es werde noch bemerkt, daß der letztgenannte Algorithmus bei reellen Mittelwerten, wie ich sie in „I." betrachtet habe, im allgemeinen keinen Mittelwert liefert. Dies kann unter anderem als Rechtfertigung dafür dienen, daß wir unsere Untersuchungen hier auf analytische Mittelwerte beschränken.

---

[4]) Für das Bildsystem der arithmetischen Mittel hat im Falle reeller Funktionen M. Nagumo [Über eine Klasse der Mittelwerte, Jap. Journ. Math. 7 (1930), S. 71—79] ein System von charakteristischen Eigenschaften aufgestellt, das unter anderem auch unsere eine Forderung enthält, daß M_k das Untermittel von M_{k+1} ist.

[5]) Siehe in der zweiten unter [2]) zitierten Arbeit S. 80.

2. Allgemeine Vorbemerkungen.

Wir stellen hier die Definition und eine Reihe von Eigenschaften der analytischen Mittelwerte zusammen[6]).

Definition. Die in der Umgebung der Stelle $(a, \ldots, a)$ des Raumes der komplexen Veränderlichen $z_1, \ldots, z_n$ $(n > 1)$ reguläre, symmetrische Funktion $M(z_1, \ldots, z_n)$ heißt ein *analytisches Mittel in der Umgebung dieser Stelle*, wenn $M(z, \ldots, z) \equiv z$ ist.

Eigenschaften und Sätze.

(A_1). Es gilt die Darstellung:

$$M(a+\zeta_1, \ldots, a+\zeta_n) = a + \frac{\zeta_1 + \cdots + \zeta_n}{n}$$

$$+ \sum_{\mu<\nu} (\zeta_\mu - \zeta_\nu)^2 F(\zeta_\mu, \zeta_\nu; \zeta_1, \ldots, \zeta_{\mu-1}, \zeta_{\mu+1}, \ldots, \zeta_{\nu-1}, \zeta_{\nu+1}, \ldots, \zeta_n),$$

wobei $F(\zeta_1, \zeta_2; \zeta_3, \ldots, \zeta_n)$ eine in der Umgebung der Stelle $(0, \ldots, 0)$ reguläre, in ζ_1, ζ_2 und in $\zeta_3, \ldots, \zeta_n$ für sich symmetrische Funktion bedeutet.

(A_2). Man kann ein positives ϱ angeben, so daß aus

$$|z_\nu - a| < \varrho, \qquad \nu = 1, \ldots, n$$

stets

$$|M(z_1, \ldots, z_n) - a| < \varrho$$

folgt.

Es ist sachgemäß, die Argumente $z_1, \ldots, z_n$ und ebenso den Funktionswert $M(z_1, \ldots, z_n)$ als Punkte in ein und derselben z-Ebene zu deuten. Statt „ein an der Stelle $(a, \ldots, a)$ analytisches Mittel“ sagen wir dann kurz „ein im Punkt a analytisches Mittel“. Weiter definieren wir: Ein Gebiet G der z-Ebene, das den unendlich fernen Punkt nicht enthält, heißt ein *Grundgebiet des analytischen Mittels* $M(z_1, \ldots, z_n)$, wenn M im Polyzylinder

$$z_\nu \prec G, \qquad \nu = 1, \ldots, n$$

regulär ist, außerdem M in jedem Punkt von G ein analytisches Mittel darstellt und alle zugehörigen Funktionswerte wieder in G liegen.

(A_3). Jedes Grundgebiet eines analytischen Mittels ist einfach zusammenhängend.

Ein Grundgebiet heißt *eigentlich*, wenn es mit dem Einheitskreis konform äquivalent ist; ist es die ganze (endliche) Ebene, so heißt es *uneigentlich*. Weiter ist folgende Definition von Bedeutung: Ist G ein Grundgebiet von M, so nennen wir eine Teilmenge H von G eine *M-kon-*

---

[6]) Beweise findet man in den in Fußnote [2]) erwähnten Arbeiten.

vexe Menge, wenn $z_\nu \prec H$, $\nu = 1, \ldots, n$, stets $M(z_1, \ldots, z_n) \prec H$ nach sich zieht.

Das Schwarzsche Lemma für analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen wird besonders anschaulich in der Eigenschaft

(A_4). Jede in einer M-konvexen Kreisscheibe enthaltene Kreisscheibe ist wieder M-konvex.

Die kleinste abgeschlossene, M-konvexe Menge, die eine vorgegebene Teilmenge H von G enthält, heißt die *M-konvexe Hülle von H;* sie werde mit H_M bezeichnet. Insbesondere bedeutet $\{z_1, z_2\}_M$ die M-konvexe Hülle der aus den beiden Punkten z_1, z_2 bestehenden Menge. Folgende Eigenschaft hebt die eigentlichen Grundgebiete von den uneigentlichen ab:

(A_5). Ist A eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge des eigentlichen Grundgebietes G von M, dann ist A_M beschränkt und einfach zusammenhängend.

Konforme Invarianz folgt aus

(A_6). Ist das Gebiet G der z-Ebene ein Grundgebiet des analytischen Mittels M, und $\zeta = \varphi(z)$ eine schlichte konforme Abbildung von G auf das Gebiet Γ der ζ-Ebene, mit der Umkehrung $z = f(\zeta)$, dann ist Γ ein Grundgebiet des analytischen Mittels

$$\mathsf{M}(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \varphi\big(M(f(\zeta_1), \ldots, f(\zeta_n))\big).$$

M heißt das *Bildmittel von M vermöge $\zeta = \varphi(z)$*. Die Bildmittel des *arithmetischen* Mittels $\frac{z_1 + \ldots + z_n}{n}$ heißen *quasiarithmetisch.*

(A_7). Zu jedem eigentlichen Grundgebiet G eines analytischen Mittels M gibt es eine (bis auf eine Ähnlichkeitstransformation eindeutige) ausgezeichnete Abbildung $\zeta = \varphi^*(z)$, die bewirkt, daß sämtliche zweiten partiellen Ableitungen des Bildmittels $\mathsf{M}(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ an jeder Stelle $\zeta_1 = \ldots = \zeta_n = \zeta$ des Bildgebietes Γ verschwinden.

Eine solche Abbildung heißt eine *Entzerrungsabbildung*; das Bildmittel M heißt *entzerrt.* Jede Entzerrungsabbildung eines quasiarithmetischen Mittels führt auf das arithmetische Mittel.

(A_8). Ist M ein entzerrtes analytisches Mittel, dann ist jedes M-konvexe Kontinuum im gewöhnlichen Sinn konvex. Insbesondere ist jedes Grundgebiet eines entzerrten Mittels konvex.

(A_9). Ist M ein analytisches Mittel mit dem eigentlichen Grundgebiet G, so gibt es ein dadurch eindeutig bestimmtes quasiarithmetisches Mittel Q_M mit demselben Grundgebiet und der Eigenschaft, daß jedes M-konvexe Teilkontinuum von G zugleich Q_M-konvex ist.

Nun noch zwei Sätze, die die *quasiarithmetischen* Mittel rein mengentheoretisch-geometrisch charakterisieren:

(Q_1). Das analytische Mittel M ist dann und nur dann quasiarithmetisch, wenn für jedes Punktepaar z', z'' die M-konvexe Hülle $\{z', z''\}_M$ keine inneren Punkte, d. h. keine Kreisscheibe als Teilmenge besitzt.

(Q_2). Das analytische Mittel M ist dann und nur dann quasiarithmetisch, wenn jedes im kleinen M-konvexe Kontinuum auch im großen M-konvex ist.

Dabei heißt eine Punktmenge A *im kleinen M-konvex*, wenn man um jeden ihrer Punkte als Mittelpunkt eine (nach (A_3) und (A_5) vorhandene) M-konvexe Kreisscheibe legen kann, deren Durchschnitt mit A eine M-konvexe Menge bildet.

3. Das Obermittel.

Wir betrachten hier den schon für die reellen Mittelwerte[1]) behandelten Erhöhungsalgorithmus, der einem analytischen Mittel von n Argumenten in eindeutiger Weise ein solches von $n+1$ Argumenten, das Obermittel, zuordnet.

Seien G ein eigentliches Grundgebiet des analytischen Mittels $M(z_1, \ldots, z_n)$, und $u_1, \ldots, u_{n+1}$ Punkte von G. Man setzt $u_\nu^{(0)} = u_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n+1$, und bildet allgemein für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$

$$(3,1) \qquad \begin{aligned} u_\nu^{(\lambda+1)} &= M(u_1^{(\lambda)}, \ldots, u_{\nu-1}^{(\lambda)}, u_{\nu+1}^{(\lambda)}, \ldots, u_{n+1}^{(\lambda)}) \\ &= M(\ldots[u_\nu^{(\lambda)}]\ldots), \end{aligned}$$

wobei die symbolische Schreibweise in der letzten Zeile bedeuten soll, daß alle $u_1^{(\lambda)}, \ldots, u_{n+1}^{(\lambda)}$ als Argumente auftreten mit Ausnahme von $u_\nu^{(\lambda)}$. Wir zeigen nun, daß für jedes ν die Folge

$$(3,2) \qquad u_\nu^{(0)}, u_\nu^{(1)}, \ldots, u_\nu^{(\lambda)}, \ldots$$

konvergiert, und zwar unabhängig von ν gegen ein und denselben Grenzwert $M^{(1)}(u_1, \ldots, u_{n+1})$, der ein analytisches Mittel darstellt mit G als eigentlichem Grundgebiet. Der Algorithmus (3, 1) heißt der *Erhöhungsalgorithmus*, das Mittel $M^{(1)}$ *das Obermittel von M*.

In der Tat, sei a ein fester Punkt von G. Wegen (A_1) ist

$$\left[\frac{\partial M}{\partial z_1}\right]_{z_1 = \ldots = z_n = a} = \frac{1}{n} < 1.$$

Deshalb, und wegen (A_2), gibt es ein $\varrho > 0$, so daß die Kreisscheibe $|z - a| < \varrho$ in G enthalten und M-konvex ist, und außerdem

$$(3,3) \qquad \left|\frac{M(z_1', z_2, \ldots, z_n) - M(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{z_1' - z_1}\right| < \sigma < 1$$

besteht für alle $z_1', z_1, z_2, \ldots, z_n$ in dieser Kreisscheibe.

Betrachten wir vorerst den Fall, daß die u_ν dem Kreis $|u - a| < \varrho$ angehören. Nach (A_4) folgen aus $|u_\nu - a| \leqq \varrho' < \varrho$, $\nu = 1, \ldots, n+1$,

die Ungleichungen $|u_\nu^{(1)} - a| \leqq \varrho'$, und allgemein durch Induktion $|u_\nu^{(\lambda)} - a| \leqq \varrho'$ für $\nu = 1, \ldots, n+1$, $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$. Nach (3, 3) gilt also

$$|u_\mu^{(\lambda+1)} - u_\nu^{(\lambda+1)}| = |M(\ldots [u_\mu^{(\lambda)}] \ldots) - M(\ldots [u_\nu^{(\lambda)}] \ldots)| < \sigma |u_\mu^{(\lambda)} - u_\nu^{(\lambda)}|,$$

mit der Bezeichnung $\underset{\mu,\nu}{\operatorname{Max}} |u_\mu^{(\lambda)} - u_\nu^{(\lambda)}| = d_\lambda$ somit $d_{\lambda+1} < \sigma d_\lambda$, wegen $\sigma < 1$ also

(3, 4) $$\lim_{\lambda \to \infty} d_\lambda = 0.$$

Für $\lambda \geqq \lambda_0$ gibt es daher zu jedem λ eine Kreisscheibe K_λ, deren Durchmesser nicht größer ist als $2 d_\lambda$, die die Punkte $u_1^{(\lambda)}, \ldots, u_{n+1}^{(\lambda)}$ alle enthält und dem Kreis $|u - a| < \varrho$ angehört, und somit M-konvex ist. Wie oben folgt, daß für $\mu > \lambda \geqq \lambda_0$ die Punkte $u_1^{(\mu)}, \ldots, u_{n+1}^{(\mu)}$ alle in K_λ enthalten sind, und daher auch im Durchschnitt

$$D_\mu = K_{\lambda_0} K_{\lambda_0+1} \ldots K_\mu.$$

Wegen (3, 4) besteht der Durchschnitt der absteigenden Mengenfolge $\{D_\mu\}$ nur aus einem Punkt. Damit ist die gleichmäßige Konvergenz der Folge (3, 2) für den Fall bewiesen, daß die Punkte $u_1, \ldots, u_{n+1}$ in $|u - a| \leqq \varrho'$ enthalten sind.

Weil G ein eigentliches Grundgebiet ist, ist die Folge (3, 2) — als Folge von Funktionen von $u_1, \ldots, u_{n+1}$ — in dem durch G bestimmten Polyzylinder normal. Deshalb gilt die gleichmäßige Konvergenz gegen einen einzigen Grenzwert in jedem abgeschlossenen Teilbereich dieses Polyzylinders. Daß dieser Grenzwert ein analytisches Mittel darstellt mit G als eigentlichem Grundgebiet, ist unmittelbar einzusehen.

Aus (3, 1) folgt sofort, daß $M^{(1)}(z_1, \ldots, z_{n+1})$ der folgenden Funktionalgleichung genügt:

(3, 5) $$M^{(1)}(z_1, \ldots, z_{n+1}) = M^{(1)}(M(\ldots [z_1] \ldots), \ldots, M(\ldots [z_{n+1}] \ldots)).$$

Umgekehrt wird man, ausgehend von (3, 5), auf den Algorithmus (3, 1) geführt. Unser Ergebnis fassen wir zusammen im

Satz 1. *Ist G eigentliches Grundgebiet des analytischen Mittels $M(z_1, \ldots, z_n)$, so gibt es ein und nur ein analytisches Mittel $M^{(1)}(z_1, \ldots, z_{n+1})$, das die Funktionalgleichung* (3, 5) *erfüllt und G ebenfalls als Grundgebiet besitzt; man erhält es aus M durch den Erhöhungsalgorithmus* (3, 1).

Bemerkung. Es ist nicht schwer, zu zeigen, daß Erhöhung und konforme Abbildung *vertauschbare* Prozesse sind[7]). Hieraus folgt wieder, daß das Obermittel des quasiarithmetischen Mittels

$$Q_f^{(n)} = \varphi\left(\frac{f(\zeta_1) + \ldots + f(\zeta_n)}{n}\right)$$

das Mittel $Q_f^{(n+1)}$ ist.

---

[7]) Vergleiche den Beweis von Satz 2 in „I.“.

4. Umkehrung der Erhöhung.

Der Frage, was die Umkehrung der Erhöhung ist, ist eine andere voranzustellen, nämlich die, ob denn jedes analytische Mittel von mehr als zwei Argumenten als Obermittel auftreten kann. Daß dem nicht so ist, geht hervor aus

Satz 2. *Es sei G ein Grundgebiet des analytischen Mittels $M(z_1, \ldots, z_{n+1})$, und $n \geqq 2$. M ist höchstens dann das Obermittel eines Mittels von n Argumenten, wenn es Funktionen $L_1(z_1)$, $L_2(z_1, z_2), \ldots, L_n(z_1, \ldots, z_n)$ gibt, so daß diese Funktionen*

1. *in einem Polyzylinder $z_\nu < G'$, $G' < G$, eindeutig analytisch sind;*
2. *dort für $k = 1, \ldots, n-1$ den Gleichungen*

$$L_{k+1}(z_1, \ldots, z_k, z_k) \equiv L_k(z_1, \ldots, z_k) \tag{4,1}$$

und der Beziehung $L_n < G'$ genügen. Außerdem muß

3. *für $k = 2, \ldots, n$*

$$\begin{gathered} M(z_1, \ldots, z_k, z_k, \ldots, z_k) \\ \equiv M(L_{k-1}(z_2, \ldots, z_k), L_{k-1}(z_1, z_3, \ldots, z_k), \ldots, L_{k-1}(z_1, \ldots, z_{k-2}, z_k), \\ L_k(z_1, \ldots, z_k), \ldots, L_k(z_1, \ldots, z_k)) \end{gathered} \tag{4,2}$$

gelten und

4. *$L_n(z_1, \ldots, z_n)$ eine symmetrische Funktion sein.*

Der Beweis ergibt sich leicht aus der Funktionalgleichung (3, 5), wenn man $M(z_1, \ldots, z_{n+1})$ als Obermittel von $L_n(z_1, \ldots, z_n)$ auffaßt.

Die vier Bedingungen von Satz 2 sind noch nicht hinreichend dafür, daß $M(z_1, \ldots, z_{n+1})$ ein Obermittel ist; man kann aber von Satz 2 aus zu einem Kriterium gelangen. Sind nämlich die vier Bedingungen von Satz 2 erfüllt, so folgt aus (4, 1) sofort

$$L_k(z, \ldots, z) \equiv L_1(z), \qquad k = 2, \ldots, n \tag{4,3}$$

und nach (4, 2) dann

$$z \equiv M(z, \ldots, z) \equiv M(L_1(z), \ldots, L_1(z)) \equiv L_1(z).$$

Da außerdem $L_n(z_1, \ldots, z_n)$ symmetrisch ist, so stellt L_n ein analytisches Mittel dar mit G' als Grundgebiet. Mit den Bedingungen $L_k(z, \ldots, z) \equiv z$ zusammen ist es möglich, durch schrittweises Auflösen der Gleichungen (4, 2) die Funktion $L_n(z_1, \ldots, z_n)$ eindeutig zu berechnen. Wenn es daher überhaupt ein Mittel gibt, dessen Obermittel M ist, so kann es nur L_n sein. Es bleibt also nur noch das Obermittel von $L_n(z_1, \ldots, z_n)$ zu berechnen und nachzusehen, ob das berechnete Obermittel mit M identisch ist. Daß das letztere durchaus nicht immer der Fall zu sein braucht, geht aus folgendem Beispiel hervor:

Ist M das Obermittel von $L_n(z_1, \ldots, z_n)$, so erfüllt jedes Mittel der Form

$$M^* = M(z_1, \ldots, z_{n+1}) + C \cdot \prod_{1 \leqq \lambda < \mu \leqq n+1} (z_\lambda - z_\mu)^2$$

sämtliche Bedingungen von Satz 2, weil ja

$$M^*(z_1, \ldots, z_n, z_n) \equiv M(z_1, \ldots, z_n, z_n).$$

Für $C \neq 0$ kann aber M^* nicht das Obermittel von L_n sein, weil es bloß ein einziges Obermittel gibt.

5. Das Untermittel.

Dem Erhöhungsalgorithmus lassen sich ähnliche iterative Prozesse gegenüberstellen, die einem gegebenen Mittel von n Argumenten, $n \geqq 3$, ein Mittel von $n-1$ Argumenten zuordnen. Wir besprechen hier nur den wichtigsten von ihnen.

Sei wieder G ein eigentliches Grundgebiet des analytischen Mittels $M(z_1, \ldots, z_n)$, und seien die Punkte $u_1, \ldots, u_{n-1}$ in G gelegen; v_0 sei ein weiterer Punkt in G. Man bildet nun für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$

$$(5,1) \qquad v_{\lambda+1} = M(u_1, \ldots, u_{n-1}, v_\lambda).$$

Ähnlich wie in **3** beweist man zunächst, daß innerhalb eines genügend kleinen Kreises um v_0 dieser Algorithmus konvergiert; die Normalität der Folge $v_1, v_2, v_3, \ldots$ liefert dann wieder die Konvergenz innerhalb ganz G. Der Grenzwert $\lim\limits_{\lambda \to \infty} v_\lambda$ werde mit $M^{(-1)}(u_1, \ldots, u_{n-1})$ bezeichnet.

Wir haben jetzt zu zeigen, daß $M^{(-1)}(z_1, \ldots, z_{n-1})$ ein analytisches Mittel darstellt mit G als eigentlichem Grundgebiet, und im übrigen vom Ausgangswert v_0 unabhängig ist. Nun erfüllt $M^{(-1)}$ offenbar die Funktionalgleichung

$$(5,2) \qquad M^{(-1)}(z_1, \ldots, z_{n-1}) = M(z_1, \ldots, z_{n-1}, M^{(-1)}(z_1, \ldots, z_{n-1})).$$

Ein Blick auf die Darstellung (A_1) lehrt, daß die Gleichung

$$(5,3) \qquad v = M(z_1, \ldots, z_{n-1}, v)$$

für genügend nahe beisammen gelegene Werte $z_1, \ldots, z_{n-1}$ eine und nur eine Lösung $v(z_1, \ldots, z_{n-1})$ besitzt mit $v(z, \ldots, z) \equiv z$. Daher ist $M^{(-1)}$ von v_0 unabhängig, und offenbar ein analytisches Mittel. Aus dem Algorithmus (5, 1)[8]), den wir den *Erniedrigungsalgorithmus* nennen wollen, folgt weiter, daß G ein Grundgebiet von $M^{(-1)}$ ist. $M^{(-1)}$ heißt das *Untermittel von M*.

---

[8]) Dieser Algorithmus ist eine von altersher bekannte Methode zur Berechnung der Wurzeln einer Gleichung der Form (5, 3).

Das Vorausgehende fassen wir zusammen im

Satz 3. *Ist G eigentliches Grundgebiet des analytischen Mittels* $M(z_1, \ldots, z_n)$, $n \geqq 3$, *so gibt es ein und nur ein analytisches Mittel* $M^{(-1)}(z_1, \ldots, z_{n-1})$, *das die Funktionalgleichung* (5, 2) *erfüllt und G ebenfalls als Grundgebiet besitzt. Man erhält es aus M durch den Erniedrigungsalgorithmus* (5, 1).

Bemerkungen. 1. Offenbar besteht wieder Invarianz des Untermittels gegenüber konformen Abbildungen. Hieraus folgt dann, daß das Untermittel des quasiarithmetischen Mittels $Q_f^{(n)}$ gerade $Q_f^{(n-1)}$ ist.

2. Der Erniedrigungsalgorithmus ist noch einer anderen Klasse von Mittelwerten angepaßt, den analytischen Gewichtsmitteln.

Sei $p(z)$ eine in der Umgebung des Punktes $z = a$ analytische Funktion mit positivem Realteil; dann heißt das im Punkt a analytische Mittel

$$G_p^{(n)} = \frac{z_1 p(z_1) + \cdots + z_n p(z_n)}{p(z_1) + \cdots + p(z_n)}$$

das *zu* $p(z)$ *gehörige analytische Gewichtsmittel*[9]). Man sieht sofort, daß das Untermittel von $G_p^{(n)}$ gerade $G_p^{(n-1)}$ ist.

3. Im Gegensatz zu den Eigenschaften des Obermittels, kann man, wenn überhaupt, unendlich viele Mittel angeben, deren Untermittel ein vorgegebenes Mittel ist. Ist nämlich $M^{(-1)}(z_1, \ldots, z_{n-1})$ das Untermittel von $M(z_1, \ldots, z_n)$, so ist offenbar $M^{(-1)}(z_1, \ldots, z_{n-1})$ auch das Untermittel des Mittels

$$M^* = M(z_1, \ldots, z_n) + q \cdot \prod_{\nu=1}^{n} (z_\nu - M^{(-1)}(\ldots [z_\nu] \ldots)),$$

wobei q eine willkürliche, symmetrische analytische Funktion von $z_1, \ldots, z_n$ bezeichnet. Die Umkehrung der Erniedrigung ist daher ohne zusätzliche Bedingungen nicht eindeutig; wir gehen nicht weiter darauf ein.

6. Vollkommene Mittel.

Wir gehen an die Frage: Für welche Mittelwerte sind Erhöhungs- und Erniedrigungsalgorithmus einander inverse Prozesse?

Sei $N(z_1, \ldots, z_{n+1})$ das Obermittel von $M(z_1, \ldots, z_n)$, und umgekehrt M das Untermittel von N. Dann bestehen die beiden Funktionalgleichungen:

$$N(z_1, \ldots, z_{n+1}) \equiv N(M(\ldots [z_1] \ldots), \ldots, M(\ldots [z_{n+1}] \ldots)),$$
$$N(z_1, \ldots, z_n, M(z_1, \ldots, z_n)) \equiv M(z_1, \ldots, z_n).$$

[9]) Die Frage, in welcher Weise $p(z)$ die Grundgebiete von $G_p^{(n)}$ bestimmt, lassen wir an dieser Stelle offen.

Setzt man in der ersten $z_{n+1} = M(z_1, \ldots, z_n) = z$, so wird daraus vermöge der zweiten:

$$z \equiv N(M(z, z_2, \ldots, z_n), \ldots, M(z_1, \ldots, z_{n-1}, z), z),$$

also mit der Abkürzung $M(\ldots, z_{\nu-1}, z, z_{\nu+1}, \ldots) = z^{(\nu)}$, $\nu = 1, \ldots, n$,

$$z \equiv N(z^{(1)}, \ldots, z^{(n)}, z),$$

nach Satz 3 somit

$$z \equiv M(z^{(1)}, \ldots, z^{(n)}).$$

Die letzte Gleichung ist nun eine Funktionalgleichung für das Mittel $M(z_1, \ldots, z_n)$ allein. Wie man sofort erkennt, ist die Funktion

$$M(z^{(1)}, \ldots, z^{(n)}) = M_{(1)}(z_1, \ldots, z_n)$$

ein analytisches Mittel mit demselben Grundgebiet wie M. Ausführlicher geschrieben haben wir:

$$M_{(1)}(z_1, \ldots, z_n)$$
$$= M\big(M(M(z_1, \ldots, z_n), z_2, \ldots, z_n), \ldots, M(z_1, \ldots, z_{n-1}, M(z_1, \ldots, z_n))\big).$$

Wir nennen $M_{(1)}$ das *iterierte Mittel von M*. Ein analytisches Mittel, das mit seinem iterierten Mittel identisch ist, wollen wir ein *vollkommenes Mittel* nennen. Nach dem vorausgehenden gilt somit

Satz 4. *Ist das Untermittel des Obermittels von $M(z_1, \ldots, z_n)$ mit M identisch, dann ist M ein vollkommenes Mittel.*

7.

Daß von Satz 4 auch die Umkehrung gilt, ist enthalten im

Satz 5. *Jedes vollkommene Mittel ist quasiarithmetisch, und umgekehrt.*

Für die quasiarithmetischen Mittel ist nämlich, wie aus den Bemerkungen am Ende von 3 und 5 hervorgeht, die Voraussetzung von Satz 4 erfüllt. Mit diesem Hinweis ist auch bereits der zweite Teil von Satz 5 bewiesen. Daß jedes quasiarithmetische Mittel vollkommen ist, kann man auch direkt leicht einsehen; einmal ist das arithmetische Mittel vollkommen, und außerdem ist das *Bildmittel eines vollkommenen Mittels wieder vollkommen.*

Wir beginnen mit den Vorbereitungen des Beweises des ersten Teiles von Satz 5.

Sei $M(z_1, \ldots, z_n)$ ein vollkommenes Mittel. Da Iteration und konforme Abbildung vertauschbare Prozesse sind, dürfen wir annehmen, daß M außerdem ein entzerrtes Mittel (siehe 2) ist. Es genügt demnach, zu beweisen:

Satz 5a. *Jedes vollkommene und entzerrte Mittel ist identisch mit dem arithmetischen.*

Um beim Beweis den allgemeinen Fall in zweckmäßiger Weise zu erfassen, setzen wir folgendes voraus: $M(z_1, \ldots, z_n)$ sei ein analytisches Mittel mit G als Grundgebiet; außerdem habe M die Eigenschaft, daß für jede Stelle $z_1 = \ldots = z_n = z$ mit z aus G sämtliche 2-ten, 3-ten, ..., $(s_0 - 1)$-ten partiellen Ableitungen verschwinden, $s_0 \geqq 3$. Weil wir diese Voraussetzung öfter benutzen, wollen wir kurz sagen: M sei *entzerrt* (*mindestens*) *vom Grad* $s_0 - 2$. Ist $z = u$ irgendein Punkt von G, so ist offenbar auch das in der Umgebung des Nullpunktes analytische Mittel

$$L(z_1, \ldots, z_n) = M(u + z_1, \ldots, u + z_n) - u \tag{7, 0}$$

entzerrt vom Grad $s_0 - 2$; wir haben also die Entwicklung:

$$L(z_1, \ldots, z_n) = \frac{z_1 + \cdots + z_n}{n} + \sum_{s=s_0}^{\infty} P_s(z_1, \ldots, z_n), \tag{7, 1}$$

wobei P_s ein symmetrisches, in den z homogenes Polynom vom Grad s ist, und insbesondere

$$P_{s_0}(z_1 + v, \ldots, z_n + v) \equiv P_{s_0}(z_1, \ldots, z_n) \tag{7, 2}$$

für beliebige genügend kleine $z_1, \ldots, z_n, v$ gilt.

Ist außerdem M vollkommen, so auch L. Wir bilden das iterierte Mittel von L und setzen vorübergehend $\frac{z_1 + \cdots + z_n}{n} = a$, $L(z_1, \ldots, z_n) = b$ und statt P_{s_0} kurz P. Dann ist nach (7, 1), wobei wir (hier und auch später) Glieder, die in den z von höherer als s_0-ter Ordnung sind, unterdrücken:

$$\begin{aligned}
\zeta_\nu &= L(\ldots, z_{\nu-1}, b, z_{\nu+1}, \ldots) = a + \frac{b - z_\nu}{n} + P(\ldots, z_{\nu-1}, b, z_{\nu+1}, \ldots) + \cdots \\
&= a + \frac{b - z_\nu}{n} + P(\ldots, z_{\nu-1}, a, z_{\nu+1}, \ldots) + \cdots.
\end{aligned}$$

Das iterierte Mittel ist somit

$$\begin{aligned}
L_{(1)}(z_1, \ldots, z_n) &= L(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \\
&= \frac{\zeta_1 + \cdots + \zeta_n}{n} + P(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) + \cdots \\
&= a + \frac{1}{n} P(z_1, \ldots, z_n) + \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} P(\ldots, z_{\nu-1}, a, z_{\nu+1}, \ldots) \\
&\quad + P\left(a + \frac{b - z_1}{n}, \ldots, a + \frac{b - z_n}{n}\right) + \cdots.
\end{aligned}$$

Setzt man

$$L_{(1)}(z_1, \ldots, z_n) = \frac{z_1 + \cdots + z_n}{n} + \sum_{s=s_0}^{\infty} P_s^{(1)}(z_1, \ldots, z_n),$$

so ergibt Vergleich für $P^{(1)}_{s_0}$ (dafür kurz $P^{(1)}$ geschrieben):

$$(7,3)\quad P^{(1)}(z_1,\ldots,z_n)$$
$$=\left[\frac{1}{n}+\left(-\frac{1}{n}\right)^{s_0}\right]P(z_1,\ldots,z_n)+\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}P\left(\ldots,z_{\nu-1},\frac{z_1+\cdots+z_n}{n},z_{\nu+1},\ldots\right),$$

wobei sowohl von (7, 2) als auch von der Homogenität von P Gebrauch gemacht wurde.

8.

Da $L\equiv L_{(1)}$, so gilt $P\equiv P^{(1)}$. Eine rein algebraische Behandlung dieser Funktionalgleichung für P zusammen mit der Gleichung (7, 2) bietet große rechnerische Schwierigkeiten. Wir gehen daher einen analytischen Weg, der auch für das spätere von Bedeutung ist. Wir betrachten die Zuordnung $P\to P^{(1)}$, und wiederholen dieselbe an $P^{(1)}$ usw.:

$$[P^{(1)}]^{(1)}=P^{(2)},\ \text{allgemein}\ [P^{(k-1)}]^{(1)}=P^{(k)},\qquad k=1,2,3,\ldots.$$

Aus (7, 3) geht unmittelbar hervor, daß die $P^{(k)}$ alle die durch (7, 2) ausgedrückte „Translationsinvarianz" besitzen. Diese Tatsache machen wir uns zunutze, um eine bequeme Form für die $P^{(k)}$ zu finden. Es durchlaufen im folgenden ν, μ_k die ganzen Zahlen von 1 bis n, und k die natürlichen Zahlen. Wir setzen:

$$\Delta^{\nu}_{\mu_k}=\begin{cases}0, & \nu=\mu_k,\\ 1, & \nu\neq\mu_k,\end{cases}$$

$$(8,1)\quad \zeta^{(\nu)}=z_\nu-\frac{z_1+\cdots+z_n}{n},\quad \zeta^{(\nu)}_{\mu_1}=\Delta^{\nu}_{\mu_1}\zeta^{(\nu)}+\frac{1}{n}\zeta^{(\mu_1)},\quad \frac{1}{n}+\left(-\frac{1}{n}\right)^{s_0}=\omega.$$

Dann wird aus (7, 3):

$$(8,2)\quad P^{(1)}(\zeta^{(1)},\ldots,\zeta^{(n)})=\omega P(\zeta^{(1)},\ldots,\zeta^{(n)})+\frac{1}{n}\sum_{\mu_1=1}^{n}P(\zeta^{(1)}_{\mu_1},\ldots,\zeta^{(n)}_{\mu_1}).$$

Weiter setzen wir:

$$(8,3)\quad \zeta^{(\nu)}_{\mu_1\ldots\mu_k\mu_{k+1}}=\Delta^{\nu}_{\mu_{k+1}}\zeta^{(\nu)}_{\mu_1\ldots\mu_k}+\frac{1}{n}\zeta^{(\mu_{k+1})}_{\mu_1\ldots\mu_k},$$

$$p^{(0)}=P(\zeta^{(1)},\ldots,\zeta^{(n)}),$$

$$(8,4)\quad p^{(k)}=\frac{1}{n^k}\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_k=1}^{n}P(\zeta^{(1)}_{\mu_1\ldots\mu_k},\ldots,\zeta^{(n)}_{\mu_1\ldots\mu_k}).$$

Dann lautet (8, 2):

$$P^{(1)}=\omega p^{(0)}+p^{(1)}.$$

Wiederholung dieser Operation und Schluß von $k-1$ auf k ergibt:

$$(8,5)\quad P^{(k)}=\sum_{\lambda=0}^{k}\binom{k}{\lambda}\omega^{k-\lambda}p^{(\lambda)}.$$

9.

Wir führen nun eine Abschätzung von $P^{(k)}(\zeta^{(1)}, \ldots, \zeta^{(n)})$ durch. Dabei haben wir die folgende, leicht einzusehende Eigenschaft von P zu benutzen: Es gibt eine positive Konstante C, so daß

(9, 1) $$|P(z_1, \ldots, z_n)| \leqq C r^{r_0}$$

gilt für alle $z_1, \ldots, z_n$ mit $|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 = r^2$.

Zu diesem Zweck setzen wir $|\zeta^{(1)}|^2 + \ldots + |\zeta^{(n)}|^2 = \varrho_0^2$ und allgemein $|\zeta^{(1)}_{u_1\ldots u_k}|^2 + \ldots + |\zeta^{(n)}_{u_1\ldots u_k}|^2 = \varrho^2_{u_1\ldots u_k}$, und sehen uns die ϱ etwas näher an. Aus (8, 1), (8, 3) folgt

(9, 2) $$\sum_{\nu=1}^{n} \zeta^{(\nu)} = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \zeta^{(\nu)}_{u_1\ldots u_k} = 0.$$

Speziell ist

$$\varrho_1^2 = \frac{|\zeta^{(1)}|^2}{n^2} + \left(\zeta^{(2)} + \frac{\zeta^{(1)}}{n}\right)\left(\bar\zeta^{(2)} + \frac{\bar\zeta^{(1)}}{n}\right) + \ldots + \left(\zeta^{(n)} + \frac{\zeta^{(1)}}{n}\right)\left(\bar\zeta^{(n)} + \frac{\bar\zeta^{(1)}}{n}\right)$$

$$= \frac{|\zeta^{(1)}|^2}{n^2} + |\zeta^{(2)}|^2 + \ldots + |\zeta^{(n)}|^2 + \frac{\zeta^{(1)}}{n}(\bar\zeta^{(2)} + \ldots + \bar\zeta^{(n)})$$

$$+ \frac{\bar\zeta^{(1)}}{n}(\zeta^{(2)} + \ldots + \zeta^{(n)}) + \frac{n-1}{n^2}|\zeta^{(1)}|^2.$$

Mit Benutzung von (9, 2) also

$$\varrho_1^2 = \varrho_0^2 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)|\zeta^{(1)}|^2.$$

Ebenso zeigt man

$$\varrho^2_{u_1} = \varrho_0^2 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)|\zeta^{(u_1)}|^2,$$

und allgemein

(9, 3) $$\varrho^2_{u_1\ldots u_k} = \varrho_0^2 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left[|\zeta^{(u_1)}|^2 + |\zeta^{(u_2)}_{u_1}|^2 + \ldots + |\zeta^{(u_k)}_{u_1\ldots u_{k-1}}|^2\right].$$

Hieraus folgt sofort

(9, 4) $$\varrho_{u_1\ldots u_k} \leqq \varrho_0.$$

Auf Grund von (8, 5), (8, 4), (9, 1) und (9, 4) haben wir die Ungleichungen:

(9, 5) $$|P^{(k)}| \leqq \sum_{\lambda=0}^{k} \binom{k}{\lambda} \omega^{k-\lambda} |p^{(\lambda)}|,$$

(9, 6) $$|p^{(\lambda)}| \leqq \frac{C}{n^\lambda} \sum \varrho^{r_0}_{u_1\ldots u_\lambda} \leqq C \varrho_0^{r_0 - 2} \cdot \frac{1}{n^\lambda} \sum \varrho^2_{u_1\ldots u_\lambda}.$$

Nun kann man die Ausdrücke $\sigma_0 = \varrho_0^2$, $\sigma_\lambda = \frac{1}{n^\lambda} \sum \varrho^2_{u_1\ldots u_\lambda}$ nicht nur gut abschätzen, sondern direkt berechnen. Aus (9, 3) folgt durch Summation und Division mit $\frac{1}{n^k}$:

$$\sigma_k = \sigma_0 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left[\frac{\sigma_0}{n} + \frac{\sigma_1}{n} + \ldots + \frac{\sigma_{k-1}}{n}\right],$$

woraus Induktion leicht

$$\sigma_k = \sigma_0 \left[1 - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right]^k \tag{9,7}$$

ergibt. (9, 5), (9, 6), (9, 7) zusammen liefern mit Benutzung des Wertes von ω in (8, 1):

$$\begin{aligned} |P^{(k)}(\zeta^{(1)}, \ldots, \zeta^{(n)})| &\leqq C\,\varrho_0^{s_0} \sum_{\lambda=0}^{k} \binom{k}{\lambda} \omega^{k-\lambda} \left[1 - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right]^\lambda \\ &= C\,\varrho_0^{s_0} \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n}\right)^{s_0}\right)^k \\ &\leqq C\,\varrho_0^{s_0} \left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)^k, \end{aligned} \tag{9,8}$$

da ja $s_0 \geqq 3$. Wegen $n \geqq 2$ folgt aus (9, 8)

$$\lim_{k \to \infty} P^{(k)}(\zeta^{(1)}, \ldots, \zeta^{(n)}) = 0. \tag{9,9}$$

Für ein vollkommenes Mittel ist aber $P^{(1)} \equiv P$, allgemein $P^{(k)} \equiv P$, nach (9, 9) somit

$$P_{s_0} \equiv P \equiv 0.$$

Aus der Voraussetzung, das vollkommene Mittel M sei vom Grad $s_0 - 2$ entzerrt, folgt, da u in (7, 0) beliebig ist, die Entzerrtheit vom Grad $s_0 - 1$. Damit ist die Annahme, M wäre nicht das arithmetische Mittel, d. h. nicht von beliebig hohem Grad entzerrt, nicht verträglich. Satz 5a ist bewiesen.

10. Vollkommene Mittelwertsysteme.

An den Begriff des vollkommenen Mittels schließt sich der Begriff des vollkommenen Mittelsystems an. Eine Folge von analytischen Mitteln

$$M_2(z_1, z_2),\ M_3(z_1, z_2, z_3),\ \ldots,\ M_n(z_1, \ldots, z_n),\ \ldots \tag{10,1}$$

heiße ein *vollkommenes System*, wenn jedes dieser Mittel das Obermittel des vorausgehenden und das Untermittel des nachfolgenden Mittels ist. Mit der in **3** eingeführten Bezeichnung gilt

Satz 6. *Jedes vollkommene System von analytischen Mitteln ist von der Form*

$$Q_f^{(2)},\ Q_f^{(3)},\ \ldots,\ Q_f^{(n)},\ \ldots \tag{10,2}$$ [10]).

Der Beweis bietet keinerlei Schwierigkeit; man kann ihn so führen, daß man Satz 5 nur für den Fall benötigt, wo die Argumentezahl gerade 2 ist. Es ist daher nicht ohne Interesse, zu bemerken, daß sich für

[10]) Siehe Fußnote [4]).

$n = 2$ der Beweis von Satz 5, bzw. 5a, wesentlich vereinfacht. Unter Verwendung der in 8 und 9 benutzten Bezeichnung ist nämlich in diesem Fall

$$\zeta^{(\nu)}_{\mu_1 \ldots \mu_k} = (-1)^\nu \frac{\zeta^{(2)}}{2^k}, \quad \nu,\ \mu_k = 1, 2;\ k = 1, 2, 3, \ldots,$$

daher

$$\varrho^2_{\mu_1 \ldots \mu_k} = \frac{\varrho_0^2}{4^k}$$

und somit

$$\sigma_k = \frac{\sigma_0}{4^k}$$

in Übereinstimmung mit (9, 7).

11. Die iterierten Mittel.

Das wesentliche Hilfsmittel des Beweises von Satz 5a ist die wiederholte Bildung des iterierten Mittels. Wir bezeichnen mit $M_{(1)}$ das iterierte Mittel von M, mit $M_{(k)}$ das iterierte Mittel von $M_{(k-1)}$, $k = 2, 3, \ldots$. Es ist naheliegend, zu fragen, ob für ein beliebiges analytisches Mittel M die Folge

$$(11,1) \qquad M_{(1)},\ M_{(2)},\ \ldots,\ M_{(k)},\ \ldots$$

konvergiert, und welche Bedeutung dem etwaigen Grenzwert zukommt. Hierauf gibt vollständige Antwort der

Satz 7. *Die Folge* (11, 1) *der iterierten Mittel des analytischen Mittels M mit dem eigentlichen Grundgebiet G konvergiert gegen ein quasiarithmetisches Mittel $Q_M(z_1, \ldots, z_n)$, das ebenfalls G als Grundgebiet besitzt. Das quasiarithmetische Mittel Q_M ist andererseits durch die Eigenschaft eindeutig bestimmt, daß jedes M-konvexe Kontinuum, das Teilmenge von G ist, zugleich Q_M-konvex ist.*

Die Existenz dieses „strukturzeichnenden" quasiarithmetischen Mittels Q_M ist gerade der Inhalt von (A_0). Satz 7 liefert eine neue Eigenschaft dieses Mittels und zeigt von neuem, welche zentrale Stellung die quasiarithmetischen Mittel in der gesamten Theorie der analytischen Mittelwerte einnehmen.

Wie beim Beweis von Satz 5a können wir voraussetzen, daß M und damit auch die iterierten Mittel von M entzerrt sind. Ich zeige zunächst, daß man zu jedem vorgegebenen Entzerrungsgrad g aus der Folge (11, 1) eine Teilfolge

$$(11,2) \qquad M_{\left(k_\lambda^{(g)}\right)}, \qquad \lambda = 1, 2, 3, \ldots$$

auswählen kann, die gegen ein analytisches Mittel konvergiert, das (mindestens) vom Grad g entzerrt ist. Da die Folge (11, 1) normal ist, so kann man jedenfalls konvergente Folgen herausgreifen. Angenommen, es

ist $h\,(\geqq 1)$ der höchste Entzerrungsgrad, den ein Grenzmittel einer konvergenten Teilfolge von (11, 1) erreichen kann, und

$$M_{(k_1)},\ M_{(k_2)},\ \ldots,\ M_{(k_\lambda)},\ \ldots \tag{11,3}$$

eine Teilfolge von (11, 1), die gegen ein vom Grad h entzerrtes analytisches Mittel N konvergiert. Man betrachtet die Folge

$$N_{(1)},\ N_{(2)},\ \ldots,\ N_{(l)},\ \ldots;$$

sie enthält eine konvergente Teilfolge

$$N_{(l_1)},\ N_{(l_2)},\ \ldots,\ N_{(l_\mu)},\ \ldots. \tag{11,4}$$

Bezeichnet N' den Grenzwert von (11, 4), so ist, wie die Betrachtungen von **9** lehren, das analytische Mittel N' mindestens vom Grad $h+1$ entzerrt. Wegen

$$\lim_{\nu\to\infty} M_{(k_\nu + l_\mu)} = N_{(l_\mu)}$$

kann man aus der Doppelfolge $M_{(k_\lambda + l_\mu)}$, $\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots$, d. h. aber aus (11, 1) selbst, eine Teilfolge auswählen, die gegen N' konvergiert. Damit ist der gewünschte Widerspruch erreicht.

Es gilt mehr: Aus dem System der Folgen (11, 2), $g = 1, 2, 3, \ldots$, kann man eine Querfolge herausgreifen, die gegen das arithmetische Mittel konvergiert.

In der Tat, sei etwa $z = 0$ ein Punkt von G, und $|z| \leqq \varrho$ eine M-konvexe Kreisscheibe in G; offenbar ist diese Kreisscheibe dann $M_{(k)}$-konvex, wie ja überhaupt jede M-konvexe Menge zugleich $M_{(1)}$-, $M_{(2)}$-, $\ldots$, $M_{(k)}$-konvex ist. Innerhalb dieser Kreisscheibe gilt

$$|M_{(k)}| \leqq \varrho. \tag{11,5}$$

Setzt man

$$M_{(k)}(z_1, \ldots, z_n) = \frac{z_1 + \cdots + z_n}{n} + \sum_{s=3}^{\infty} P_s^{(k)}(z_1, \ldots, z_n),$$

so folgt nach bekannten Sätzen aus (11, 5) für $|z_\nu| \leqq \varrho_1 < \varrho$

$$|P_s^{(k)}(z_1, \ldots, z_n)| \leqq C_s\, \varrho_1^s,$$

wobei die Konstante C_s nicht von k abhängt, und $\sum\limits_{s=3}^{\infty} C_s\, \varrho_1^s$ konvergiert. Hieraus und wegen

$$\left| P_s^{\left(k_\lambda^{(g)}\right)} \right| \to 0$$

für $\lambda \to \infty$ bei $3 \leqq s \leqq g+2$ ergibt sich die oben behauptete Auswahlmöglichkeit. Sei nun

$$M_{(p_1)},\ M_{(p_2)},\ \ldots,\ M_{(p_\lambda)},\ \ldots \tag{11,6}$$

mit $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ eine gegen das arithmetische Mittel konvergente Teilfolge von (11, 1). Aus der Darstellung (A_1) und der Konvergenz gegen das arithmetische Mittel folgt für $|z_\nu| \leqq \varrho$, $\nu = 1, \dots, n$:

$$\left| M_{(p_\lambda)} - \frac{z_1 + \dots + z_n}{n} \right| \leqq \sigma_\lambda \operatorname{Max} |z_\mu - z_\nu|^2$$

mit $\sigma_\lambda > 0$ und $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \sigma_\lambda = 0$. Ist außerdem noch $|z_\nu - b| \leqq r$, so gilt

$$\left| \frac{z_1 + \dots + z_n}{n} - b \right| \leqq r - \frac{\operatorname{Max} |z_\mu - z_\nu|^2}{4 n r}.$$

Beides zusammen liefert

$$|M_{(p_\lambda)} - b| \leqq r + \left(\sigma_\lambda - \frac{1}{4 n r}\right) \operatorname{Max} |z_\mu - z_\nu|^2.$$

Ergebnis ist somit: Ist $\sigma_\lambda < \frac{1}{4 n r}$, d. h. ist λ genügend groß, so haben die Ungleichungen

$$|z_\nu| \leqq \varrho, \quad |z_\nu - b| \leqq r, \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

die Ungleichungen

$$|M_{(p_\lambda)}| \leqq \varrho, \quad |M_{(p_\lambda)} - b| \leqq r$$

zur Folge.

Wählt man daher $r > \varrho$, so kann man ein λ_0 angeben derart, daß für $\lambda > \lambda_0$ für jedes Punktepaar z', z'' in $|z| \leqq \varrho$ die Punktmenge $\{z', z''\}_{M_{(p_\lambda)}}$ in dem Kreiszweieck $K(z', z''; r)$ enthalten ist, das von den beiden Kreisen gebildet wird, die durch z' und z'' hindurchgehen und den Radius r haben. Da für jede Teilmenge A von G die Mengenungleichung $A_{M_{(\lambda)}} < A_{M_{(\mu)}}$ besteht, sofern $\lambda > \mu$, so ist für jedes Punktepaar z', z'' in $|z| \geqq \varrho$ und für jedes k mit $k > p_{\lambda_0} = k(r)$

$$\{z', z''\}_{M_{(k)}} < K(z', z''; r).$$

Für $r \to \infty$ folgt hieraus, daß für jede Teilfolge

$$M_{(k_1)},\ M_{(k_2)},\ \dots,\ M_{(k_\lambda)},\ \dots \tag{11, 6}$$

von (11, 1) der Durchschnitt, d. h. der Limes der Mengen

$$\{z', z''\}_{M_{(k_\lambda)}}, \quad \lambda = 1, 2, 3, \dots,$$

die Verbindungsstrecke S der Punkte z', z'' ist.

Konvergiert insbesondere die Folge (11, 6) gegen ein Mittel N, so gilt

$$\{z', z''\}_N < \lim_{\lambda \to \infty} \{z', z''\}_{M_{(k_\lambda)}} = S.$$

Da aber $\{z', z''\}_N$ abgeschlossen und zusammenhängend ist, so muß $\{z', z''\}_N$ mit S identisch sein. Nach (Q_1) ist dann N das arithmetische Mittel.

Jede konvergente Teilfolge von (11, 1) hat also ein und dasselbe quasiarithmetische Mittel als Limes, nämlich das arithmetische. Damit ist die Konvergenz, die in Satz 7 behauptet wird, bewiesen. Aus der Eigenschaft, daß jede M-konvexe Punktmenge $M_{(k)}$-konvex ist, für $k = 1, 2, 3, \ldots$, folgt dann auch die „strukturzeichnende" Eigenschaft von Q_M.

Bemerkung. Es ist leicht zu zeigen, daß beispielsweise für das reelle Mittel

$$\tfrac{1}{4}\,\mathrm{Min}\,(x_1,\ x_2) + \tfrac{3}{4}\,\mathrm{Max}\,(x_1,\ x_2)\ ^{11})$$

die Folge der iterierten Mittel gegen $\mathrm{Max}\,(x_1, x_2)$, also gegen kein reelles Mittel konvergiert. Dies mag unter anderem als Erklärung dafür gelten, daß wir unsere Betrachtungen hier auf analytische Mittel beschränkt haben.

---

[11]) Siehe „I.", S. 244.

(Eingegangen am 3. 6. 1935.)

Die Zerlegungs- und Trägheitsgruppe als Permutationsgruppen.

Von

B. L. van der Waerden in Leipzig.

Die Wurzeln $x_1, \ldots, x_n$ einer Gleichung $f(x) = 0$ mögen einen Galoisschen Erweiterungskörper Ω des Grundkörpers P erzeugen. Die Galoissche Gruppe von Ω ist dann eine Gruppe von Permutationen der Wurzeln. Es sei p ein Primideal von P (P sei ein Zahl- oder Funktionenkörper) und $\mathfrak{P}$ ein Primteiler von p in Ω. Wir wollen untersuchen, in welcher Weise sich die Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z}$ und die Trägheitsgruppe $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{P}$ als Permutationsgruppen darstellen, insbesondere, wie ihre Transitivitätsgebiete mit der Zerlegung von p im Körper $\mathsf{A}_1 = \mathsf{P}(x_1)$ zusammenhängen.

In dieser Hinsicht hat E. Artin [1]) folgenden Satz bewiesen: Ist p nicht Diskriminantenteiler, also die Trägheitsgruppe gleich Eins, so sind die Grade der Zyklen, in welche die Zerlegungssubstitution zerfällt, gleich den Graden der Primideale, in welche p im Körper A_1 zerfällt.

Dieser Satz läßt sich nun folgendermaßen verallgemeinern:

Satz I. *Zerfällt das Primideal p im Körper A_1 in r Primideale $\mathfrak{p}_\nu$ von den Graden f'_ν und mit Exponenten e'_ν:*

$$(1) \qquad p = \mathfrak{p}_1^{e'_1} \mathfrak{p}_2^{e'_2} \cdots \mathfrak{p}_r^{e'_r},$$

so zerfallen die Wurzeln $x_1, \ldots, x_n$ gegenüber $\mathfrak{Z}$ in r Transitivitätsgebiete zu je $e'_\nu f'_\nu$ Wurzeln, welche gegenüber $\mathfrak{T}$ in je f'_ν Transitivitätsgebiete zu je e'_ν Wurzeln zerfallen.

Satz I ist, nach der vielfach bewährten Noetherschen Regel „Es steht schon bei Dedekind", implizit in der Dedekindschen Theorie der Zerlegungs- und Trägheitsgruppen [2]) enthalten. Als Anwendung des Satzes soll im folgenden noch ein Kriterium hergeleitet werden, das es gestattet, aus der Primfaktorzerlegung der Diskriminante einer Gleichung die Affektfreiheit dieser Gleichung zu erschließen (Satz II).

Beweis von Satz I. Die zu $\mathfrak{P}$ konjugierten Primideale lassen sich in der Gestalt $\sigma\mathfrak{P}$ schreiben, wo σ die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ durchläuft. Diejenigen σ, deren $\sigma\mathfrak{P}$ in einem bestimmten $\mathfrak{p}_\nu$ des Zwischenkörpers A_1

[1]) E. Artin, Math. Annalen 89 (1923), S. 148.

[2]) R. Dedekind, Zur Theorie der Ideale, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1894.

aufgehen, bilden nach Dedekind[2]) einen Komplex $\mathfrak{A}_1 \sigma_\nu \mathfrak{Z}$, wo $\mathfrak{A}_1$ die zu A_1 gehörige Untergruppe ist. Gehört σ zu diesem Komplex, ist also $\sigma = \alpha \sigma_\nu \zeta$, so folgt

$$\sigma^{-1} x_1 = \zeta^{-1} \sigma_\nu^{-1} \alpha^{-1} x_1 = \zeta^{-1} \sigma_\nu^{-1} x_1;$$

also gehören dann $\sigma^{-1} x_1$ und $\sigma_\nu^{-1} x_1$ zum gleichen Transitivitätsgebiet von $\mathfrak{Z}$ und umgekehrt. So gehört zu jedem $\mathfrak{p}_\nu$ ein Transitivitätsgebiet von $\mathfrak{Z}$ und umgekehrt.

Die Anzahl der Wurzeln, aus denen ein solches Transitivitätsgebiet besteht, ist gleich dem Index $(\mathfrak{Z}:\mathfrak{D}_\nu)$, wo $\mathfrak{D}_\nu$ die Untergruppe von $\mathfrak{Z}$ ist, die $\sigma_\nu^{-1} x_1$ fest läßt. Die Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die $\sigma_\nu^{-1} x_1$ fest läßt, ist aber $\sigma_\nu^{-1} \mathfrak{A}_1 \sigma_\nu$; also ist $\mathfrak{D}_\nu$ der Durchschnitt

$$\mathfrak{D}_\nu = \mathfrak{Z} \frown \sigma_\nu^{-1} \mathfrak{A}_1 \sigma_\nu.$$

Der Grad unseres Transitivitätsgebietes ist somit gleich dem Index

$$(2) \qquad (\mathfrak{Z}:\mathfrak{D}_\nu) = (\mathfrak{Z}:\mathfrak{Z} \frown \sigma_\nu^{-1} \mathfrak{A}_1 \sigma_\nu) = (\sigma_\nu \mathfrak{Z} \sigma_\nu^{-1} : \sigma_\nu \mathfrak{Z} \sigma_\nu^{-1} \frown \mathfrak{A}_1).$$

Nun ist $\sigma_\nu \mathfrak{Z} \sigma_\nu^{-1}$ die Zerlegungsgruppe von $\sigma_\nu \mathfrak{P}$, und $\sigma_\nu \mathfrak{Z} \sigma_\nu^{-1} \frown \mathfrak{A}_1$ ist die Zerlegungsgruppe desselben Ideals in bezug auf A_1 als Grundkörper. Die Ordnungen dieser Zerlegungsgruppen sind $e f$ und $e_\nu f_\nu$, wo e und f Exponent und Grad von $\sigma_\nu \mathfrak{P}$ in der Zerlegung von p, e_ν und f_ν Exponent und Relativgrad von $\sigma_\nu \mathfrak{P}$ in der Zerlegung von $\mathfrak{p}_\nu$ bedeuten. Der Index (2) hat daher den Wert

$$\frac{e f}{e_\nu f_\nu} = \frac{e}{e_\nu} \frac{f}{f_\nu} = e'_\nu f'_\nu.$$

Jedes Transitivitätsgebiet von $\mathfrak{Z}$ zerfällt weiter in Transitivitätsgebiete von $\mathfrak{T}$. Die Anzahl der Wurzeln in einem solchen kleineren Transitivitätsgebiet ergibt sich in genau derselben Weise als Index

$$(\mathfrak{T}:\mathfrak{T} \frown \sigma_\nu^{-1} \mathfrak{A}_1 \sigma_\nu) = (\sigma_\nu \mathfrak{T} \sigma_\nu^{-1} : \sigma_\nu \mathfrak{T} \sigma_\nu^{-1} \frown \mathfrak{A}_1) = \frac{e}{e_\nu} = e'_\nu.$$

Damit ist Satz I bewiesen.

Eine Anwendung von Satz I ist der folgende

Satz II. *Wenn in der Diskriminante D des ganzzahligen Polynoms*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

eine Primzahl p genau in der ersten Potenz vorkommt, so ist die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ der Gleichung $f(x) = 0$ in bezug auf den rationalen Grundkörper P entweder die symmetrische, oder sie ist intransitiv oder imprimitiv.

Beweis. Die Zerlegung von p im Körper $\mathsf{A}_1 = \mathsf{P}(x_1)$ sei wieder durch (1) gegeben. Die Differente $\mathfrak{d}$ des Körpers A_1 ist mindestens durch

$$\mathfrak{p}_1^{e'_1 - 1} \mathfrak{p}_2^{e'_2 - 1} \ldots \mathfrak{p}_g^{e'_g - 1}$$

teilbar. Die Körperdiskriminante $D_1 = N\mathfrak{d}$, die sich von der Gleichungsdiskriminante D nur um ein Quadrat als Faktor unterscheidet, ist also mindestens durch

$$p^{f_1'(e_1'-1)+f_2'(e_2'-1)\dots f_g'(e_g'-1)}$$

teilbar. Daraus folgt, da D_1 ebenso wie D nur durch p^1 teilbar ist,

$$f_1' = 1, \quad e_1' = 2, \quad e_2' = \dots = e_g' = 1.$$

Aus Satz I folgt nun unmittelbar, daß die Trägheitsgruppe $\mathfrak{T}$ eine Transposition enthält. Die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ enthält also eine Transposition.

Nun zerlegen wir die Nummern $1, 2, \dots, n$ der Wurzeln in Gebiete, indem wir zwei Nummern a und e zum gleichen Gebiet rechnen, wenn sie durch eine Kette von Transpositionen $(a\,b)$, $(b\,c)$, …, $(d\,e)$ aus der Gruppe $\mathfrak{G}$ verbunden werden können. Diese Zerlegung ist gegenüber der Gruppe $\mathfrak{G}$ invariant. Wenn also die Gruppe $\mathfrak{G}$ transitiv und primitiv ist, so müssen alle Nummern zum gleichen Gebiet gehören, d. h. je zwei Nummern lassen sich durch eine Kette von Transpositionen verbinden. Diese Transpositionen erzeugen dann aber die volle symmetrische Gruppe. Mithin ist $\mathfrak{G}$ entweder intransitiv oder imprimitiv oder symmetrisch.

Nimmt man speziell den Grad n der Gleichung $f(x) = 0$ als Primzahl und die Gleichung als irreduzibel an, so muß die Gruppe der Gleichung unter den angegebenen Voraussetzungen die symmetrische sein. Diesen Satz hatte ich für $n = 5$ als Aufgabe publiziert[3]). Die Verallgemeinerung auf beliebige Primzahlen wurde von A. Scholz zuerst formuliert[4]).

---

[3]) Jahresber. D. Math.-Ver. **44** (1934), Aufgabe 171, S. *41*; Lösung in **45**, S. *38*.

[4]) A. Scholz, Lösung der Aufgabe 171, Jahresber. D. Math.-Ver. **45** (1935). S. *42*.

(Eingegangen am 19. 5. 1935.)

Über trinomische Gleichungen von Primzahlgrad.

Von

Udo Wegner in Darmstadt.

Satz: *Es sei*

$$f(x) = x^p + a x + b = 0$$

eine ganzzahlige, rational irreduzible Gleichung von Primzahlgrad $p > 3$. *Weiter sei*

$$(a, b) = 1; \quad (a, p) = 1; \quad (b, p-1) = 1.$$

Dann besitzt die Gleichung die symmetrische Gruppe als Galoissche Gruppe über dem Bereich der rationalen Zahlen.

Beweis: 1. Da die Gleichungsdiskriminante

$$\pm \Delta = (p-1)^{p-1} a^p + p^p b^{p-1}$$

ist, so folgt aus den Voraussetzungen, daß für eine in Δ aufgehende Primzahl q gilt:

$$(q, p(p-1)) = 1; \quad (q, a) = 1; \quad (q, b) = 1.$$

2. Es sei

$$x^p + a x + b \equiv \varphi_1^{e_1}(x)\, \varphi_2^{e_2}(x) \ldots \varphi_k^{e_k}(x) \pmod q,$$

wobei q Teiler von Δ ist. Dann kann nur $1 \leqq e_\nu \leqq 2$ sein. Denn wegen $(q, p(p-1)) = 1$ folgt durch zweimalige Differentiation

$$p(p-1)\, x^{p-2} \equiv \varphi_1(x)^{e_1 - 2} \cdot \varphi_2^{e_2 - 2}(x) \ldots \varphi_k(x)^{e_k - 2} \cdot T(x) \pmod q,$$

wobei $T(x)$ noch ein $\varphi_\nu(x)$ enthalten könnte. Ist ein $e_\nu > 2$, so muß $\varphi_\nu(x) = x$ sein, was aber unmöglich ist, da $(b, q) = 1$ ist.

3. In

$$f(x) = x^p + a x + b \equiv \varphi_1^2(x)\, \varphi_2^2(x) \ldots \varphi_k^2(x)\, \varphi_{k+1}(x) \ldots \varphi_s(x) \pmod q$$

muß mindestens ein $\varphi_\nu(x)$ existieren, das zur ersten Potenz aufgeht, da p sonst $\equiv 0 \pmod 2$ sein müßte.

4. Wir wollen nun beweisen, daß die Zerlegung von $f(x)$ modulo q nur folgendermaßen aussehen kann:

$$x^p + a x + b = (x - \alpha)^2\, \varphi_2(x) \cdot \varphi_3(x) \ldots \varphi_s(x) \pmod q.$$

Ein $\varphi_\nu(x)$ geht wegen q/Δ sicher in der zweiten Potenz auf. Ein solches sei $\varphi_1(x)$. Ich behaupte, es kann nicht von einem Grade $\geqq 2$

sein. Wir betrachten nämlich das Galoisfeld T_m, wobei m der Grad von $\varphi_1(x) \equiv 0$ sei. $\xi_1, \xi_1^q = \xi_2$ seien dann Wurzeln von $\varphi_1(x)$ in T_m. Dann ist

$$\xi_\nu^p + a\,\xi_\nu + b = 0, \quad \nu = 1, 2,$$

also durch Subtraktion:

$$\xi_1^p - \xi_2^p + a(\xi_1 - \xi_2) = 0$$

und durch Multiplikation mit p:

$$p(\xi_1^p - \xi_2^p) + a\,p(\xi_1 - \xi_2) = 0$$

und auch:

$$p\,\xi_k^{p-1} + a = 0, \quad k = 1, 2,$$

woraus:

$$p\,\xi_k^p + a\,\xi_k = 0$$

folgt. Subtraktion der Gleichungen für $k = 1$ und 2 ergibt:

$$p(\xi_1^p - \xi_2^p) + a(\xi_1 - \xi_2) = 0$$

und somit:

$$a(p-1)(\xi_1 - \xi_2) = 0,$$

was unmöglich ist.

Es kann also kein $\varphi_\nu(x)$, das in höherer als der ersten Potenz auftritt, von größerem als dem ersten Grade sein. Es kann aber auch nur ein $\varphi_\nu(x)$ in zweiter Potenz auftreten. Denn träte z. B. auch noch $\varphi_2(x)$ in zweiter Potenz auf, so würden wir unter ξ_1 die Wurzel von $\varphi_1(x) \equiv 0$ und unter ξ_2 die Wurzel von $\varphi_2(x) \equiv 0$ verstehen und im übrigen wie oben schließen. — Daraus folgt die behauptete Darstellung.

5. Da für alle in Δ aufgehenden Primzahlen q die Darstellung in Nr. 4 gilt, so gilt sie also gewiß auch für eine Primzahl in der Körperdiskriminante des durch eine Wurzel ϑ von $f(x) = 0$ erzeugten Körpers $P(\vartheta)$. Wir können jetzt also die Primidealzerlegung von (q) in $P(\vartheta)$ angeben: Es ist zunächst

$$(q) = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_e,$$

wobei die Ideale

$$\mathfrak{a}_\nu = (p, \varphi_\nu(\vartheta)), \quad \nu = 2, \ldots, e, \quad \mathfrak{a}_1 = (p, (\vartheta - \alpha)^2)$$

sind und

$$(\mathfrak{a}_\nu, \mathfrak{a}_\varrho) = 1$$

ist. Die Norm von $\mathfrak{a}_\nu$ $(\nu = 2, 3, \ldots, e)$ ist q^{m_ν}, wobei m_ν der Grad von $\varphi_\nu(x)$ ist, und die Norm von $\mathfrak{a}_1$ ist q^2. Weiter ist

$$\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{p}_{f_1}^{d_1} \cdot \mathfrak{p}_{f_2}^{d_2} \ldots \mathfrak{p}_{f_r}^{d_r}$$

(die unteren Indizes bezeichnen die Grade der Primideale) und

$$d_1 f_1 + d_2 f_2 + \ldots + d_r f_r = m_\nu$$

bzw.

$$d_1 f_1 + d_2 f_2 + \ldots + d_r f_r = 2.$$

Da im ersten Fall jedes f durch m_r teilbar sein muß, folgt

$$r = 1, \quad f_1 = m_r, \quad d_1 = 1.$$

Im zweiten Fall ist

$$r = 1, \quad f_1 = 1, \quad d_1 = 2,$$

da wegen q/Δ ein $d > 1$ sein muß. Also ist die Primidealzerlegung von q

$$(q) = \mathfrak{p}_1^2 \, \mathfrak{p}'_{f_2} \, \mathfrak{p}''_{f_3} \ldots \mathfrak{p}^{(e)}_{f_r}.$$

Da $q \neq 2$ ist, so ist die Körperdiskriminante genau durch q^1 teilbar.

Unsere Behauptung folgt nunmehr aus folgendem Satz von Scholz und van der Waerden:

Wenn die Diskriminante eines irreduziblen Polynoms $f(x)$ ein Primideal des Grundkörpers nur in der ersten Potenz enthält, so ist die Galoissche Gruppe entweder imprimitiv oder die volle symmetrische[1]). — Da in unserem Fall der Grad von $f(x)$ eine Primzahl sein sollte, so ist die Gruppe primitiv.

Aus unseren Überlegungen folgt überdies noch der folgende Satz:

$$f(x) = x^p + a\,x + b = 0$$

sei eine ganzzahlige, rational irreduzible Gleichung von Primzahlgrad $p > 3$. Es sei eine Primzahl q vorhanden, die in der Gleichungsdiskriminante aufgeht und für die

$$(q, p\,(p-1)) = 1$$

ist. Weiter sei q zu den Zahlen a und b teilerfremd. Dann ist die Galoissche Gruppe von $f(x)$ entweder die volle symmetrische oder q geht in der Körperdiskriminante des durch eine Wurzel von $f(x) = 0$ erzeugten Körpers auf. — Ist also insbesondere q in ungerader Potenz in der Gleichungsdiskriminante enthalten, so ist stets die Galoissche Gruppe die volle symmetrische.

Schließlich sei noch der folgende Satz erwähnt, der sich ebenfalls sofort ergibt:

Eine notwendige Bedingung für die algebraische Auflösbarkeit einer ganzzahligen, rational irreduziblen Gleichung der Form:

$$x^p + a\,x + b = 0$$

ist, daß jede Primzahl, die zu $p\,(p-1)$ teilerfremd ist und nicht in den Zahlen a und b, aber in der Gleichungsdiskriminante aufgeht, zur Körperdiskriminante teilerfremd ist.

---

[1]) A. Scholz, Vierte Lösung der Aufgabe 171, Jahresber. D. Math.-Ver. 45 (1935), S. 42. Vgl. auch die in diesem Heft der Math. Annalen gleichzeitig erscheinende Arbeit von B. L. van der Waerden, Die Zerlegungs- und Trägheitsgruppe als Permutationsgruppen.

Beispiel: Die auflösbaren Gleichungen der obigen Form vom Grade fünf kann man nach Runge durch zwei rationale Parameter charakterisieren:

$$a = \frac{5\,\mu^4\,(4\,\lambda + 3)}{\lambda^2 + 1}; \qquad b = \frac{4\,\mu^5\,(2\,\lambda + 1)\,(4\,\lambda + 3)}{\lambda^2 + 1}.$$

Setzt man $\lambda = 1$ und $\mu = 2$, so ergibt sich die ganzzahlige irreduzible Gleichung:

$$x^5 + 5 \cdot 7 \cdot 2^3\,x + 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^4 = 0.$$

Es ist:

$$\Delta = 2^{23} \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 13^2.$$

Die Primzahl 13 genügt den Voraussetzungen des letzten Satzes. 13 geht also nicht in der Körperdiskriminante auf. Also folgt aus:

$$f(x) \equiv (x - 1)\,(x + 6)^2\,(x^2 + 2\,x + 6) \pmod{13}$$

die Primidealzerlegung:

$$(13) = \mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{p}_2'.$$

(Eingegangen am 18. 5. 1935).

Zur Theorie der affektlosen Gleichungen.

Von

Udo Wegner in Darmstadt.

Im folgenden soll zunächst ein Gegenstück zu dem bekannten Dedekind-Frobeniusschen Satz über den Zusammenhang zwischen der Primidealzerlegung in einem algebraischen Körper und den Substitutionen der zugehörigen Galoisschen Gruppe bewiesen werden. Aus dem Satz werden wir dann eine einfache Konstruktion von affektlosen Gleichungen ungeraden Grades über dem Bereich der rationalen Zahlen ableiten.

Hilfssatz: In einem algebraischen Zahlkörper $\mathsf{P}(\vartheta)$, der durch eine Wurzel ϑ der rational irreduziblen Gleichung n-ten Grades $f(x) = 0$ erzeugt wird, möge eine Primzahl p die folgende Primidealzerlegung besitzen:

$$(p) = \mathfrak{p}_1^{e_1}\mathfrak{p}_2^{e_2}\dots\mathfrak{p}_k^{e_k};$$

hierbei soll $\mathfrak{p}_\nu$ den Grad f_ν besitzen, und es soll $(e_\nu, p) = 1$ sein für $\nu = 1, 2, \dots, k$. — Dann ist in dem zu $\mathsf{P}(\vartheta)$ gehörigen Galoisschen Körper $\Gamma(\vartheta)$ die zu einem in p aufgehenden Primideal $\mathfrak{P}$ gehörige Verzweigungsgruppe $\mathfrak{V}$ gleich der Einheit, und die Ordnung r der zugehörigen Trägheitsgruppe ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ der Zahlen e_ν.

Beweis: In $\Gamma(\vartheta)$ sei

$$(p) = (\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\dots\mathfrak{P}_e)^r.$$

$\mathfrak{P}$ sei irgendeines der hier auftretenden Primideale, und $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{V}$ seien die zugehörigen Zerlegungs-, Trägheits- und Verzweigungsgruppen. Dann gilt bekanntlich[1]):

I. $\mathfrak{T} <_i \mathfrak{Z}$ (d. h. invariant enthalten.)

II. $\mathfrak{V} <_i \mathfrak{Z}$.

III. Ist die Ordnung r von $\mathfrak{T}$ gleich $s\,p^t$, wobei $(s, p) = 1$ ist, so ist die von $\mathfrak{V}$ gleich p^t.

[1]) Über die hier benutzten Eigenschaften von $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{V}$ vergleiche man:
1. Speiser, Die Zerlegungsgruppe, Journ. f. reine u. angew. Math. 149 (1919), S. 174—188.
2. Hilbert, Zahlbericht.
3. Bachmann, Zahlentheorie 5, 12. Kap.

IV. Es ist

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{B} + \mathfrak{B}B + \mathfrak{B}B^2 + \ldots + \mathfrak{B}B_{s-1}$$

und

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{T} + \mathfrak{T}A + \mathfrak{T}A^2 + \ldots + \mathfrak{T}A^{f-1},$$

wobei $A^{-1}BA = B^p$ und A^f eine Potenz von B ist; f ist hierbei der Grad von $\mathfrak{P}$.

V. Es ist $r = t_i e_i$ für $i = 1, 2., \ldots, k$, wobei t_i die Ordnung des größten gemeinsamen Teilers $\mathfrak{D}_i$ von $\mathfrak{G}'$, der Gruppe, zu der $\mathsf{P}(\vartheta)$ gehört, und $\mathfrak{T}_i = S_i \mathfrak{T} S_i^{-1}$ ist, wenn $\mathfrak{G}$, die Gruppe von $\Gamma(\vartheta)$, die folgende Zerlegung besitzt:

$$\mathfrak{G} = \sum_{i=1}^{k} \mathfrak{G}' S_i \mathfrak{Z}.$$

Auf Grund dieser Tatsachen ergibt sich der Beweis des obigen Hilfssatzes nun folgendermaßen:

Da $(e_\nu, p) = 1$ vorausgesetzt war, so folgt, daß $t_i = s_i p^t$ ist, wenn $r = s p^t$ und $(s, p) = 1$ war. Somit besitzt $\mathfrak{D}_i$ eine Untergruppe $\mathfrak{U}_i$ der Ordnung p^t. $\mathfrak{U}_i$ liegt in $\mathfrak{T}_i$, da $\mathfrak{D}_i < \mathfrak{T}_i$ ist. In $\mathfrak{T}_i = S_i \mathfrak{T} S_i^{-1}$ gibt es aber noch eine Untergruppe der Ordnung p^t, nämlich $\mathfrak{B}_i = S_i \mathfrak{B} S_i^{-1}$. Da aber p^t die höchste Potenz von p ist, die in der Ordnung von $\mathfrak{T}_i$ enthalten ist, so sind $\mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{U}_i$ Sylowgruppen. Zwei Sylowgruppen gleicher Ordnung sind aber zueinander konjugiert, d. h. $R \mathfrak{B}_i R^{-1} = \mathfrak{U}_i$, wobei $R < \mathfrak{T}_i$ ist. Da aber $\mathfrak{B}_i <_i \mathfrak{T}_i$ ist, so wird $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{U}_i$. Also gilt:

$$\mathfrak{B}_i < \mathfrak{D}_i = (\mathfrak{G}', S_i \mathfrak{T} S_i^{-1})$$

oder

(1) $$\mathfrak{B} < S_i^{-1} \mathfrak{D}_i S_i = (S_i^{-1} \mathfrak{G}' S_i, \mathfrak{T}) \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Allgemeiner gilt sogar aus demselben Grunde:

(2) $$\mathfrak{B} < (H_i^{-1} \mathfrak{G}' H_i, \mathfrak{T}),$$

wo H_i irgendein Element des Komplexes $\mathfrak{G}' S_i \mathfrak{Z}$ bedeutet.

Demnach ist für jedes Element G von $\mathfrak{G}$

$$\mathfrak{B} < (G^{-1} \mathfrak{G}' G, \mathfrak{T}), \text{ d. h. aber } \mathfrak{B} < G^{-1} \mathfrak{G}' G.$$

Da nun $\Gamma(\vartheta)$ der kleinste Galoissche Körper über $\mathsf{P}(\vartheta)$ ist, so muß der größte gemeinsame Teiler von allen $G^{-1} \mathfrak{G}' G$ gleich der Einheit sein, d. h. insbesondere $\mathfrak{B} = E$.

Die Zerlegung von $\mathfrak{T}$ modulo $\mathfrak{B}$ (vgl. III.) wird demnach:

$$\mathfrak{T} = E + B + B^2 + \ldots + B^{r-1}.$$

Hieraus folgt:

$$\mathfrak{D}_i = (\mathfrak{G}', S_i \mathfrak{T} S_i^{-1}) = E + B_i^{e_i} + B_i^{2e_i} + \ldots + B_i^{e_i\left(\frac{r}{e_i} - 1\right)}$$

für $i = 1, 2, \ldots, k$, wobei $B_i = S_i B S_i^{-1}$ gesetzt ist. Somit wird:

$$(S_i^{-1}\,\mathfrak{G}'\,S_i, \mathfrak{T}) = E + B^{e_i} + B^{2e_i} + \ldots + B^{e_i\left(\frac{r}{e_i}-1\right)}$$

Es ist aber auch:

$$(H_i^{-1}\,\mathfrak{G}'\,H_i, \mathfrak{T}) = E + B^{e_i} + B^{2e_i} + \ldots + B^{e_i\left(\frac{r}{e_i}-1\right)},$$

wenn $H_i < \mathfrak{G}'\,S_i\,\mathfrak{Z}$ ist.

Da wiederum der größte gemeinsame Teiler aller $H_i^{-1}\,\mathfrak{G}'\,H_i$ gleich der Einheit sein muß, so muß $r = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ werden. — Damit ist unser Hilfssatz vollständig bewiesen.

Hauptsatz: *Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes folgt, daß es in der Galoisschen Permutationsgruppe eine Permutation gibt, die aus f_1 Zyklen der Ordnung e_1, f_2 Zyklen der Ordnung e_2, ..., f_k Zyklen der Ordnung e_k besteht.*

(Man erkennt, daß im Fall des Dedekindschen Satzes, also für $e_1 = e_2 = \ldots = e_k = 1$, hier nun gefolgert werden kann, daß die Identität in der Gruppe vorkommt. Deshalb kann man unseren Satz als Gegenstück zum klassischen Dedekindschen Satz bezeichnen.)

Beweis: Es sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}' + \mathfrak{G}'\,K_1 + \mathfrak{G}'\,K_2 + \ldots + \mathfrak{G}'\,K_n$, wobei $K_0 = E, K_1, K_2, \ldots K_n$ ein rechtsseitiges Restsystem von $\mathfrak{G}$ modulo $\mathfrak{G}'$ bedeutet. Dann gehört zu irgendeiner Substitution U der Galoisschen Gruppe die folgende Permutation P der Wurzeln von $f(x) = 0$:

$$P = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}'\,K_\lambda \\ \mathfrak{G}'\,K_\lambda\,U \end{pmatrix}.$$

Da nun

$$\mathfrak{G} = \sum_{i=1}^{k} \mathfrak{G}'\,S_i\,\mathfrak{Z}$$

ist, und

$$\mathfrak{Z}_i = (\mathfrak{G}', S_i\,\mathfrak{Z}\,S_i^{-1}) = \sum_{r=0}^{\frac{f}{f_i}-1} \left(E + B_i^{e_i} + \ldots + B_i^{e_i\left(\frac{r}{e_i}-1\right)}\right) A^{f_i r}$$

wird, so wird auch:

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}'\,S_i\,\mathfrak{Z} = {} & \mathfrak{G}'\,S_i\,B^0 A^0 + \ldots + \mathfrak{G}'\,S_i\,B^{e_i-1}A^0 \\ & + \mathfrak{G}'\,S_i\,B^0 A^1 + \ldots + \mathfrak{G}'\,S_i\,B^{e_i-1}A^1 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \mathfrak{G}'\,S_i\,B^0 A^{f_i-1} + \ldots + \mathfrak{G}'\,S_i\,B^{e_i-1}A^{f_i-1}.\end{aligned}$$

Setzt man $U = B$, so erhält man:

$$P = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}'\,S_i\,B^x A^y \\ \mathfrak{G}'\,S_i\,B^x A^y B \end{pmatrix}.$$

Nun ist $\mathfrak{G}' S_t B^x A^y B = \mathfrak{G}' S_t B^{x+zy} A^y$, da $A^y B = B^{zy} A_y$ ist, wobei $z p \equiv 1 \pmod{r}$ wird. Somit wird:

$$P = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}' S_t B^x A^y \\ \mathfrak{G}' S_t B^{x+zy} A^y \end{pmatrix}$$

eine Permutation, die aus f_1 Zyklen der Ordnung e_1, f_2 Zyklen der Ordnung $e_2, \ldots, f_k$ Zyklen der Ordnung e_k besteht.

Satz: *Alle ganzzahligen Gleichungen der Form:*

$$f(x) = x^n + a p^t x^2 + b p^{t+u} = 0 \qquad (n > 3)$$

sind entweder reduzibel oder ohne Affekt, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

1. *n ist ungerade,*
2. *p ist eine Primzahl $> n$ mit $(p, ab) = 1$,*
3. *u ist ungerade,*
4. $(t, n-2) = 1$,
5. $t + u < \frac{n u}{2}$ [2]).

Beweis: Es sei $f(x)$ rational irreduzibel, dann hat das Newtonsche Polygon auf Grund der Voraussetzung (5) zwei Seiten mit den Projektionen $l_1 = n - 2$, $l_2 = 2$ auf der x-Achse und $h_1 = t$, $h_2 = u$ auf der y-Achse. Die Gleichung ist außerdem wegen der Voraussetzungen (3) und (4) im Oreschen Sinn regulär [3]). Also gilt in $\mathsf{P}(\vartheta)$:

$$(p) = \mathfrak{p}_1^{n-2}\, \mathfrak{p}_2^2,$$

wobei $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ Primideale ersten Grades sind. Nach dem Hauptsatz enthält wegen $p > n$ die Galoissche Gruppe eine Permutation, die einen Zyklus der Ordnung $n - 2$ und einen der Ordnung 2 hat; also auch wegen $(n-2, 2) = 1$ eine Transposition. Außerdem ist $f(x) = 0$ primitiv [4]). Somit ist $f(x) = 0$ ohne Affekt.

Es fragt sich also, wann $f(x)$ rational irreduzibel wird. Man könnte vermuten, daß vielleicht jedes Polynom, daß die Voraussetzungen 1. bis 5. erfüllt, irreduzibel wäre. Aber schon das einfache Beispiel

$$x^5 - 7 \cdot 19 x^2 - 7^2 \cdot 48 = (x^2 + 7x + 28)(x^3 - 7x^2 + 21x - 84)$$

widerlegt diese Vermutung. Mit Hilfe des Oreschen Irreduzibilitätskriteriums erkennt man jedoch, daß ein $f(x)$ mit den Eigenschaften

[2]) Die Anregung, Gleichungen vom Typ $x^n + \alpha x^2 + \beta = 0$ auf ihren Affekt zu untersuchen, verdanke ich Herrn van der Waerden.

[3]) O. Ore, Über die Theorie der algebraischen Körper. (Den sjette skandinaviske Matematikerkongress, Kobenhavn 1925, S. 432/433.)

[4]) O. Ore, Kriterien für Gleichungen mit primitiven Gruppen (Videnskapsselskapets Skrifter, I. Mat.-Naturv. Klasse, 1924, Nr. 18, Oslo 1924, S. 7, Satz 5).

1. bis 5., falls es überhaupt reduzibel wird, nur in ein Produkt aus einem irreduziblen quadratischen Faktor und einem irreduziblen Faktor $(n-2)$-ten Grades zerfallen kann. Weiter ergibt sich durch elementare Betrachtungen, daß $f(x)$ sicher irreduzibel ist, wenn man zu obigen Voraussetzungen noch die folgende hinzunimmt:

$$u + t > \frac{(n-1)u}{2}$$ [5]).

Auch ist nach Eisenstein jede Gleichung der Form

$$x^n + a' q^s p^t x^2 + b' q p^{t+u} = 0$$
$$(q = \text{Primzahl} \neq p, \; s \geqq 1, \; (q, a'b') = 1)$$

sicher irreduzibel und daher ohne Affekt.

---

[5]) So daß also Irreduzibilität und damit Affektlosigkeit eintritt, wenn zu den Voraussetzungen 1. bis 4., S. 741 noch hinzugenommen wird: 5*. $\frac{n-3}{2} < \frac{t}{u} < \frac{n-2}{2}$.

(Eingegangen am 4. 7. 1935.)

Über Herstellung und Anwendungen der monomialen Darstellungen endlicher Gruppen.

Von

W. K. Turkin in Moskau.

In seinen Arbeiten „Ein neues Kriterium der Einfachheit einer endlichen Gruppe“ [1]) und „Über monomiale Darstellungen endlicher Gruppen“ [2]) hat der Verfasser der vorliegenden Arbeit eine Methode der Herstellung monomialer Darstellungen endlicher Gruppen gegeben und mit Hilfe dieser Darstellungen einige Sätze über endliche Gruppen erhalten. In vorliegender Arbeit beweist der Verfasser, daß alle transitiven monomialen Darstellungen endlicher Gruppen nach derselben Methode erzeugt werden können. Auch werden die Kriterien der Einfachheit einer endlichen Gruppe, die mit Hilfe der monomialen Darstellungen erhalten werden, allgemeiner formuliert.

Sei $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe und sei $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Sei $\mathfrak{K}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{H}$. Sei

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H} G_2 + \mathfrak{H} G_3 + \ldots + \mathfrak{H} G_s$$

und

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{K} + \mathfrak{K} H_2 + \mathfrak{K} H_3 + \ldots + \mathfrak{K} H_t.$$

Sei $\mathfrak{S}$ die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{K}}$; die Elemente dieser Gruppe sind Systeme $S_i = \mathfrak{K} H_i$. Sei $\overline{\mathfrak{S}}$ eine Gruppe, die mit $\mathfrak{S}$ eineindeutig isomorph ist; wir bezeichnen mit $\overline{S}_i$ das Element von $\overline{\mathfrak{S}}$, welches bei diesem Isomorphismus dem Element S_i von $\mathfrak{S}$ entspricht.

Wir schreiben folgende formalen Ausdrücke:

$$\begin{aligned} &\Omega = \overline{S}_1^{-1} \mathfrak{K} S_1 + \overline{S}_2^{-1} \mathfrak{K} S_2 + \ldots + \overline{S}_t^{-1} \mathfrak{K} S_t, \\ &\Omega G_2, \\ &\Omega G_3, \\ &\ldots. \\ &\Omega G_s. \end{aligned}$$

Bei der Multiplikation von rechts mit einem beliebigen Element von $\mathfrak{G}$ geht jeder dieser Ausdrücke in sich selbst oder in einen anderen

[1]) Math. Annalen 111.

[2]) Journal de l'Institut mathématique de l'Académie des Sciences d'Ukraine, 1935.

über (mit einem Faktor von links, der einem Element von $\mathfrak{S}$ gleich ist). Auf solche Weise bekommen wir eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ durch monomiale Matrizen, d. h. Matrizen, bei welchen in jeder Horizontal- und jeder Vertikalreihe nur ein Element von 0 verschieden ist. Die von 0 verschiedenen Elemente der Matrizen sind Elemente von $\mathfrak{S}$ (siehe die oben zitierten Arbeiten [1]) und [2])).

Wir wollen jetzt den Begriff der Äquivalenz monomialer Gruppen einführen [3]). Sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe monomialer Substitutionen. Wir bezeichnen die Variablen dieser Substitutionen mit

$$x_1, x_2, \ldots, x_s.$$

Seien die Elemente der Matrizen Elemente einer endlichen Gruppe $\overline{\mathfrak{T}}$. Sei

$$\begin{aligned} y_1 &= \overline{T}_{i_1} x_{j_1}, \\ y_2 &= \overline{T}_{i_2} x_{j_2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_s &= \overline{T}_{i_s} x_{j_s}. \end{aligned}$$

Dann erfahren die Variablen

$$y_1, y_2, \ldots, y_s$$

auch eine Gruppe monomialer Substitutionen. Wir werden sagen, daß diese Gruppe der Gruppe $\mathfrak{G}$ äquivalent ist.

Wir werden jetzt beweisen, daß jede transitive monomiale Gruppe einer nach der oben erwähnten Methode erzeugten Gruppe äquivalent ist. Sei $\mathfrak{G}$ eine transitive Gruppe monomialer Substitutionen der Variablen

$$x_1, x_2, \ldots, x_s.$$

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{K}$ die Untergruppe von $\mathfrak{G}$, deren Substitutionen die Variable x_1 ungeändert lassen, und mit $\mathfrak{H}$ die Untergruppe von $\mathfrak{G}$, deren Substitutionen x_1 mit einem Faktor versehen. $\mathfrak{K}$ ist augenscheinlich eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}$. Die Faktoren, mit welchen die Substitutionen von $\mathfrak{H}$ die Variable x_1 versehen, bilden eine Gruppe $\overline{\mathfrak{S}}$, die der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{K}}$ isomorph ist. Sei

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H} G_2 + \mathfrak{H} G_3 + \ldots + \mathfrak{H} G_s.$$

Möge x_1 durch G_i in $\overline{T}_{\lambda_i} x_{\lambda_i}$ übergeführt werden; wir setzen

$$y_i = \overline{T}_{\lambda_i} x_{\lambda_i}.$$

---

[3]) Für den Fall einer zyklischen Gruppe $\mathfrak{S}$ wurden die Begriffe der Äquivalenz und die Methode des Beweises von A. Speiser gegeben (siehe „Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung", zweite Aufl., § 46, 1927).

Dann wird jede Substitution unserer Gruppe die Variable $x_1 = y_1$ in $\overline{S}_i y_i$ überführen, wo $\overline{S}_i$ ein Element von $\overline{\mathfrak{S}}$ ist. Die Gruppe der Substitutionen der Variablen

$$y_1, y_2, \ldots, y_s$$

ist identisch mit der Gruppe der Substitutionen der Größen

$$\begin{aligned} &\Omega = \sum_{i=1}^{t} \overline{S}_i^{-1} \mathfrak{K} S_i, \\ &\Omega G_2, \\ &\ldots . \\ &\Omega G_s. \end{aligned}$$

Um das zu beweisen, betrachten wir eine beliebige Substitution Z unserer Gruppe. Führt Z die Variable y_i in $\overline{S}_\lambda y_k$ über, so wird $G_i Z$ die Variable y_1 in $\overline{S}_\lambda y_k$ überführen. Wir können schreiben

$$G_i Z = K H_\lambda G_k$$

(K ist ein Element von $\mathfrak{K}$ und das System $S_\lambda = \mathfrak{K} H_\lambda$ entspricht dem Element $\overline{S}_\lambda$ bei dem Isomorphismus zwischen $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{K}}$ und $\overline{\mathfrak{S}}$). Deshalb ist

$$Z = G_i^{-1} K H_\lambda G_k$$

und wir haben

$$\Omega G_i Z = \Omega G_i G_i^{-1} K H_\lambda G_k = \overline{S}_\lambda \Omega G_k.$$

Wir bekommen den folgenden Satz:

Jede transitive monomiale Gruppe ist äquivalent einer nach der oben angegebenen Methode erzeugten monomialen Gruppe.

In den oben erwähnten Arbeiten [1]) und [2]) hatte der Verfasser der vorliegenden Arbeit mit Hilfe der monomialen Darstellungen einige Kriterien der Einfachheit einer endlichen Gruppe gefunden. Später haben S. Tchounikhin und A. Dietzmann nach derselben Methode etwas allgemeinere Kriterien gewonnen. Wir wollen jetzt nach derselben Methode ein noch allgemeineres Kriterium beweisen:

Sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe und $\mathfrak{H}$ ihre Untergruppe. Sei

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H} G_2 + \mathfrak{H} G_3 + \ldots + \mathfrak{H} G_s.$$

Sei A ein Element von $\mathfrak{G}$. Sei

$$G_\lambda A = H^{(\lambda)} G_{i_\lambda}$$

($H^{(\lambda)}$ ist ein Element von $\mathfrak{H}$). Ist das Produkt

$$H' H'' \ldots H^{(s)}$$

nicht in der Kommutatorgruppe von $\mathfrak{H}$ enthalten, so hat $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler.

Sei $\mathfrak{K}$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{H}$. Wir konstruieren mit Hilfe von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ nach der oben erwähnten Methode eine monomiale Dar-

stellung der Gruppe $\mathfrak{G}$. Die Faktorgruppe $\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{K}}$ ist in unserem Falle abelsch; selbstverständlich auch die Gruppe $\overline{\mathfrak{S}}$. Deshalb können wir den Begriff der Determinante einer monomialen Matrix einführen; so nennen wir das Produkt aller von 0 verschiedenen Elemente dieser Matrix. Die Determinante des Produktes zweier Matrizen ist gleich dem Produkte ihrer Determinanten. Ist die Determinante einer Matrix von 1 verschieden, so hat die Gruppe eine invariante Untergruppe, die aus allen Elementen besteht, denen Matrizen mit Determinanten, die gleich 1 sind, entsprechen.

Sei

$$G_\lambda A = H^{(\lambda)} G_{i_\lambda} = K^{(\lambda)} H_{j_\lambda} G_{i_\lambda}$$

($K^{(\lambda)}$ ist ein Element von $\mathfrak{K}$). Dann ist

$$\Omega G_\lambda A = \overline{S}_{j_\lambda} \Omega G_{i_\lambda}.$$

Die Determinante der Matrix, die dem Element A entspricht, ist gleich

$$\overline{S}_{j_1} \overline{S}_{j_2} \ldots \overline{S}_{j_s},$$

und dieses Produkt ist von 1 verschieden, falls das Produkt

$$H' H'' \ldots H^{(s)}$$

nicht in $\mathfrak{K}$ enthalten ist. So ist unser Satz bewiesen.

In seiner Arbeit „Eine neue Anwendung der Darstellung einer endlichen Gruppe als monomiale Matrizengruppe"[4]) hat der Verfasser der vorliegenden Arbeit den folgenden Satz bewiesen:

Sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe von der Ordnung g. Sei p^a die höchste Potenz einer Primzahl p, durch welche g teilbar ist, und sei q der kleinste Faktor von g, welcher nicht durch p teilbar ist. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ muß einen Normalteiler haben, wenn sie mehr als

$$g\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q}\right)$$

Elemente enthält, deren Ordnung in p^a aufgeht.

Wir wollen jetzt einen allgemeineren Satz beweisen:

Sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe der Ordnung g und sei $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe der Ordnung h. Sei $g = h\,s$ (h und s seien teilerfremd). Sei $\frac{h}{t}$ die Ordnung der Kommutatorgruppe von $\mathfrak{H}$ und sei q der kleinste Primfaktor von s. Enthält $\mathfrak{G}$ mehr als

$$g\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{q}\right)$$

Elemente, die in mit $\mathfrak{H}$ konjugierten Untergruppen enthalten sind, so muß $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler haben.

---

[4]) Math. Zeitschr. 38.

Ist der Normalisator von $\mathfrak{H}$ nicht gleich $\mathfrak{H}$, so gibt es in $\mathfrak{G}$ nicht mehr als $\frac{s}{q}$ Untergruppen, die mit $\mathfrak{H}$ konjugiert sind. In diesem Falle enthält $\mathfrak{G}$ nicht mehr als

$$\frac{s}{q}(h-1)+1<\frac{g}{q}$$

Elemente, die in mit $\mathfrak{H}$ konjugierten Untergruppen enthalten sind. Deshalb können wir weiter voraussetzen, daß der Normalisator von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{H}$ zusammenfällt.

Sei $\mathfrak{K}$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{H}$. Wir konstruieren eine monomiale Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit Hilfe von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$. Sei A ein Element, das in $\mathfrak{H}$, aber nicht in $\mathfrak{K}$ enthalten ist. Geht der Ausdruck ΩG_i bei Multiplikation von rechts mit A in einen anderen Ausdruck derselben Art über (mit einem Faktor von links, der einem Element von $\overline{\mathfrak{S}}$ gleich ist), so können wir annehmen:

$$G_{i+1}=G_i A.$$

Dann haben wir

$$\Omega G_i A=\Omega G_{i+1}.$$

Wir finden so, daß die Determinante der Matrix, die dem Element A entspricht, nur dann gleich 1 sein kann, wenn außer Ω noch andere ΩG_i vorhanden sind, die bei der Multiplikation mit A in sich selbst übergehen (mit einem Faktor von links, der einem Element von $\overline{\mathfrak{S}}$ gleich ist). Sei ΩG_λ ein solcher Ausdruck:

$$\Omega G_\lambda A=\overline{S}\,\Omega G_\lambda$$

($\overline{S}$ ist ein Element von $\overline{\mathfrak{S}}$). Dann haben wir

$$G_\lambda A=A' G_\lambda$$

(A' ist ein Element von $\mathfrak{H}$) und

$$A=G_\lambda^{-1}A' G_\lambda.$$

So sehen wir, daß A außer in $\mathfrak{H}$ auch in der Untergruppe $G_\lambda^{-1}\mathfrak{H}G_\lambda \neq \mathfrak{H}$ enthalten ist. Deshalb muß A wenigstens in q mit $\mathfrak{H}$ konjugierten Untergruppen enthalten sein. Wir finden so, daß in $\mathfrak{G}$ nicht mehr als

$$\frac{g}{h}\cdot\frac{h-1}{q}<\frac{g}{q}$$

Elemente enthalten sind, die in mit $\mathfrak{H}$ konjugierten Untergruppen, aber nicht in Kommutatorgruppen dieser Untergruppen enthalten sind. Augenscheinlich gibt es in $\mathfrak{G}$ nicht mehr als

$$\frac{g}{h}\left(\frac{h}{t}-1\right)<\frac{g}{t}$$

Elemente, die in den oben erwähnten Kommutatorgruppen enthalten sind. So ist unser Satz bewiesen.

(Eingegangen am 4. 5. 1935.)

Über transitive Erweiterungen gewisser Gruppen aus Automorphismen endlicher mehrdimensionaler Geometrien.

Von

Hans Zassenhaus in Rostock.

Gegeben sei ein Körper k und ein $m+1$-dimensionaler Vektormodul $\mathfrak{M}_{m+1}$ über k ($m \geqq 2$). Für jedes $\mathfrak{x}$, wo $\mathfrak{x} \subset \mathfrak{M}_{m+1}$, $\mathfrak{x} \neq 0$, wird die Menge aller Vektoren $\lambda\mathfrak{x}$, wo $\lambda \subset k$, als ein „Punkt $(\mathfrak{x})$" bezeichnet. Es ist also auch $(\mathfrak{x}) = (\lambda\mathfrak{x})$, wenn $\lambda \neq 0$. $P = (\mathfrak{x})$ und $Q = (\mathfrak{y})$ seien zwei verschiedene Punkte. Alle Punkte $(\lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y})$ mögen Gerade durch P und Q heißen. Diese Definition der Geraden hängt nicht von der Wahl der zugeordneten Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ab.

Alle Punkte und Geraden bilden eine projektive Geometrie $\Gamma_{k,m+1}$.

Eine Punktmenge L aus $\Gamma_{k,m+1}$, in der mit zwei Punkten P und Q auch die durch P und Q gehende Gerade liegt, möge linearer Raum heißen. Aus gegebenen Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_r$ entsteht durch Ziehen von Verbindungsgeraden zwischen schon gefundenen Punkten ein linearer Raum $P_1 P_2 \ldots P_r$, welcher der von $P_1, P_2, \ldots, P_r$ erzeugte lineare Raum heißen möge. Jeder lineare Raum aus $\Gamma_{k,m+1}$ läßt sich aus endlich viel Punkten erzeugen. Die Minimalanzahl der einen linearen Raum L erzeugenden Punkte vermindert um 1 heißt seine Dimension. $\Gamma_{k,m+1}$ ist ein m-dimensionaler linearer Raum. r Punkte heißen unabhängig, wenn sie einen $r-1$-dimensionalen Raum erzeugen. Mehr als $m+1$ Punkte aus $\Gamma_{k,m+1}$ sind stets abhängig. In einem $r-1$-dimensionalen linearen Raum L aus $\Gamma_{k,m+1}$ gibt es stets r unabhängige Punkte. Wenn bereits s unabhängige Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_s$ in L gefunden sind, so lassen sich dieselben zu einem System $P_1 P_2 \ldots P_r$ von r unabhängigen Punkten ergänzen. Als Automorphismus von $\Gamma_{k,m+1}$ wird jede umkehrbar eindeutige Abbildung der Punkte der Geometrie auf sich bezeichnet, die drei Punkte einer Geraden auf drei Punkte einer Geraden abbildet. Ein Automorphismus führt einen linearen Raum stets wieder in einen linearen Raum von gleicher Dimension wie die des ursprünglichen linearen Raumes über. Alle Automorphismen von $\Gamma_{k,m+1}$ bilden eine Gruppe $\mathfrak{A}_{k,m+1}$.

Es sei $P_1 = (\mathfrak{x}_1)$, $P_2 = (\mathfrak{x}_2), \ldots, P_{m+1} = (\mathfrak{x}_{m+1})$ ein System von $m+1$ unabhängigen Punkten aus $\Gamma_{k,m+1}$. Jeder nichtsingulären $m+1$-reihigen

quadratischen Matrix $A = (a_{ik})$ mit Koeffienten aus k läßt sich der Automorphismus

$$(\mathfrak{x}) \to A(\mathfrak{x}) = \left(\sum_{i=1}^{m+1}\left(\sum_k a_{ik} x_k\right)\mathfrak{x}_i\right)$$

zuordnen, wobei

$$\mathfrak{x} = \sum_1^{m+1} x_i \mathfrak{x}_i.$$

Die Matrix A ist durch den zugeordneten Automorphismus von $\Gamma_{k,m+1}$ bis auf einen allen Koeffizienten gemeinsamen Faktor $\lambda \neq 0$ bestimmt.

Ferner sei σ ein Körperautomorphismus von k. Die Abbildung

$$\mathfrak{x} \to \sigma(\mathfrak{x}) = \sum_{i=1}^{m+1} \sigma(x_i)\,\mathfrak{x}_i$$

ist ein Automorphismus von $\Gamma_{k,m+1}$.

Bekanntlich hat jeder Automorphismus von $\Gamma_{k,m+1}$ die Form

$$\mathfrak{x} \to \sigma A(\mathfrak{x}).$$

Alle Automorphismen $\mathfrak{x} \to A(\mathfrak{x})$ mit $|A| = 1$ bilden einen einfachen Normalteiler $LF(m+1, k)$ von $\mathfrak{A}_{k,m+1}$. Jeder eigentliche Normalteiler von $\mathfrak{A}_{k,m+1}$ enthält $LF(m+1, k)$.

Alle Automorphismen $\mathfrak{x} \to A(\mathfrak{x})$, wo A eine beliebige nichtsinguläre Matrix, bilden ebenfalls einen Normalteiler $L_{k,m+1}$ von $\mathfrak{A}_{k,m+1}$. $\mathfrak{A}_{k,m+1}/L_{k,m+1}$ ist isomorph zur Gruppe der Automorphismen von k. $L_{k,m+1}/LF(m+1, k)$ ist isomorph zur Faktorgruppe aller Zahlen $\neq 0$ aus k mod der Gruppe der $m+1$-ten Potenzen.

Satz 1: *Es gibt in $LF(m+1, k)$ einen Automorphismus von $\Gamma_{k,m+1}$, der r unabhängige Punkte*

$$P_1 = (\mathfrak{x}_1),\ P_2 = (\mathfrak{x}_2),\ \ldots,\ P_r = (\mathfrak{x}_r)$$

der Reihe nach auf andere r unabhängige Punkte

$$Q_1 = (\mathfrak{y}_1),\ Q_2 = (\mathfrak{y}_2),\ \ldots,\ Q_r = (\mathfrak{y}_r)$$

abbildet.

Beweis: Es sei

$$P_1 = (\mathfrak{x}_1),\quad P_2 = (\mathfrak{x}_2),\ \ldots,\ P_{m+1} = (\mathfrak{x}_{m+1})$$

ein System von $m+1$ unabhängigen Punkten von $\Gamma_{k,m+1}$.

1. $r = 1$. Es ist

$$\mathfrak{y}_1 = a_1\mathfrak{x}_1 + a_2\mathfrak{x}_2 + \ldots + a_{m+1}\mathfrak{x}_{m+1}.$$

Wenn $a_1 \neq 0$, so kann $a_1 = 1$ angenommen werden.

Setze

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & \cdot & \cdot & a_{m+1} \\ & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & \cdot & & \cdot & \\ & & & & 1 \end{pmatrix};$$

$\mathfrak{x} \to A(\mathfrak{x})$ ist die verlangte Abbildung.

Wenn $a_1 = 0$, so gibt es ein $a_j \neq 0$ für ein $j > 1$ und es kann $a_j = 1$ angenommen werden.

Setze

$$\cdot A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 0 & a_2 & \cdot & \cdot & a_{j-1} & 1 & a_{j+1} & \cdot & a_{m+1} \\ & 1 & & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ -1 & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Es sei $r > 1$ und die Behauptung für $1, 2, \ldots, r-1$ bewiesen.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es in LF einen Automorphismus α, der die Wirkung

$$\alpha(\mathfrak{x}_i) = (\mathfrak{y}_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, r-1$$

hat. Sei $\alpha(\mathfrak{x}_r) = \mathfrak{y}_r'$.

$(\mathfrak{y}_1), (\mathfrak{y}_2), \ldots, (\mathfrak{y}_r')$ sind r unabhängige Punkte. Wenn ein Automorphismus β aus LF gefunden werden kann, der $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{r-1}$ festläßt und $(\mathfrak{y}_r')$ auf $(\mathfrak{y}_r)$ abbildet, so ist $\beta\alpha$ der gesuchte Automorphismus, der P_i auf Q_i abbildet $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Es kann angenommen werden, daß $P_1 = Q_1$, $P_2 = Q_2, \ldots, P_{r-1} = Q_{r-1}$.

Wenn $Q_r \not\subset P_1 P_2 \ldots P_r$, so kann $Q_r = P_{r+1}$ angenommen werden.

Setze

$$B = \begin{array}{c} \\ \\ \\ r \\ r+1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & r & \cdot & r+1 & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & 1 \end{vmatrix} \end{array}.$$

$\beta(\mathfrak{x}) = B(\mathfrak{x})$.

Falls $Q_r \subset P_1 P_2 \ldots P_r$, so kann $Q_r = (a_1 \mathfrak{x}_1 + \ldots + a_{r-1}\mathfrak{x}_{r-1} + \mathfrak{x}_r)$ angenommen werden.

Setze

$$B = \begin{array}{c} \\ \\ r \cdot \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & 1 & & & \\ a_1 & \cdot & a_{r-1} & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & & 1 \end{vmatrix},$$

w. z. b. w.

Nun sei k ein endlicher Körper aus q Elementen. Auf jeder Geraden liegen $q+1$ Punkte. Die Anzahl aller Punkte in $\Gamma_{q,\,m+1}$ ist

$$n = \frac{q^{m+1}-1}{q-1} = q^m + q^{m-1} + \ldots + 1.$$

$LF\,(m+1, q)$ ist eine zweifach transitive Permutationsgruppe der n Punkte aus $\Gamma_{q,\,m+1}$.

In Analogie zu der Frage nach den vierfach transitiven Permutationsgruppen vom Grade $n+2$ und der Ordnung

$$(n+2)\,(n+1)\,n\,(n-1)$$

habe ich die Frage gestellt, ob es von Gruppen zwischen LF und $\mathfrak{A}$ transitive Erweiterungen $\mathfrak{G}$ gibt, derart, daß $\mathfrak{G}$ eine transitive Permutationsgruppe von $n+1$ Ziffern $P_0, P, Q, \ldots$ ist und die Untergruppe $\mathfrak{G}_{P_0}$ aller Permutationen, die P_0 festlassen, gleich einer zwischen $LF\,(m+1, q)$ und $\mathfrak{A}_{q,\,m+1}$ gelegenen Gruppe von Automorphismen der n Punkte aus $\Gamma_{q,\,m+1}$ ist.

Eine triviale Lösung existiert im Falle $q = 2$. Dann kann $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{2,\,m+1}$ gleich der Gruppe der Permutationen

$$\pi(\mathfrak{x}) = A\,\mathfrak{x} + \mathfrak{b}$$

aller Vektoren (einschließlich des Nullvektors) aus $\mathfrak{M}_{m+1}$ gesetzt werden. Dabei bedeutet A eine nichtsinguläre Matrix und $\mathfrak{b}$ einen festen Vektor aus $\mathfrak{M}_{m+1}$, abhängig nur von π.

Falls $\mathfrak{G}$ existiert, so fragt sich, ob $\mathfrak{G}$ transitiv erweitert werden kann, und so fort.

Als Resultat meiner Untersuchung habe ich erhalten, daß außer den trivialen Lösungen $\mathfrak{G}_{2,\,m+1}$ nur im Falle $q = 4$, $m = 2$, $(\mathfrak{G}_{P_0} : LF) = 1, 2$ eine Gruppe $\mathfrak{G}$ existiert. $\mathfrak{G}$ läßt sich noch zweimal transitiv erweitern, falls $\mathfrak{G}_{P_0} = LF$. Diese drei Gruppen von der Ordnung $20160 \cdot 22$ bzw. $20160 \cdot 22 \cdot 23$ bzw. $20160 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24$ sind von Miller behandelt worden. Sie sind einfach.

Voraussetzung: $\mathfrak{G}$ sei eine transitive Permutationsgruppe von $n+1$ Ziffern $P_0, P, Q, \ldots$. $\mathfrak{G}_{P_0}$ sei die Untergruppe aller Permutationen, die P_0 festlassen. Die Ziffern $P, Q, \ldots$ seien die n Punkte aus $\Gamma_{q,\,m+1}$, und jede Permutation aus $\mathfrak{G}_{P_0}$ bedeute einen Automorphismus von $\Gamma_{q,\,m+1}$, $\mathfrak{G}_{P_0}$ sei zwischen $LF\,(m+1, q)$ und $\mathfrak{A}_{q,\,m+1}$ gelegen. Da $\mathfrak{G}$ zweifach transitiv, so gibt es eine Permutation σ, die P_0 und P vertauscht. Die Abbildung $s\,(X) = \sigma\,(X)$, wenn $X \subset \Gamma_{q,\,m+1}$ und $X \neq P$, $s\,(P) = P$, ist eine Permutation der Punkte aus Γ.

Zunächst wird gezeigt werden, daß in den meisten Fällen ($q = 2$ bzw. $q = 4$ und $m = 2$ sind ausgenommen) s ein Automorphismus von Γ sein muß. Diese Annahme kann zum Widerspruch geführt werden.

Satz 2: *s führt lineare Räume durch P wieder in lineare Räume über.*

Beweis: L sei ein durch P gehender linearer Raum der Dimension r. Für $r = 0$ ist die Behauptung trivial. Es sei $r > 0$ und die Behauptung für $0, 1, 2, \ldots, r-1$ bewiesen.

Die Punkte aus $s(L)$ liegen wegen der Induktionsvoraussetzung, angewendet auf s^{-1} statt s, nicht alle in einem $r-1$-dimensionalen linearen Raum.

Es gibt $r+1$ Punkte $P, P_2, \ldots, P_{r+1}$ in L, so daß die $r+1$ Bildpunkte P, $s(P_2) = Q_2, \ldots, s(P_{r+1}) = Q_{r+1}$ unabhängig sind. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, daß $P, P_2, \ldots, P_{r+1}$ unabhängig sind. Nach Satz 1 liegt in LF ein Automorphismus τ, der P festläßt und P_i auf Q_i abbildet.

$\sigma_1 = \tau^{-1}\sigma$ läßt $P_2 \ldots P_{r+1}$ fest und vertauscht P mit P_0. Wenn bewiesen wird, daß die zu σ_1 gehörige Permutation s_1 der Punkte aus Γ den linearen Raum L auf sich abbildet, so bildet $s = \tau s_1$ L auf einen anderen r-dimensionalen durch P gehenden linearen Raum ab.

Es kann $Q_2 = P_2, Q_3 = P_3, \ldots, Q_{r+1} = P_{r+1}$ angenommen werden.

Angenommen, es gibt einen Punkt Q in L, so daß $\sigma(Q) = P_{r+2}$ außerhalb von L fällt. Auf jeder Geraden $P_{r+2}X$ ($X \subset L$) liegt ein von X und P_{r+2} verschiedener Punkt X'. Alle Punkte X' sind untereinander verschieden und liegen nicht in L. Da ihre Anzahl ebenso groß wie die Anzahl der in L gelegenen Punkte ist, so gibt es unter ihnen einen Punkt Q_{r+2}, der von allen $\sigma(X)$ mit $X \subset L$ verschieden ist.

Nach Satz 1 gibt es in LF einen Automorphismus τ_1, der $P, P_2, \ldots, P_{r+1}$ festläßt, aber P_{r+2} auf Q_{r+2} abbildet.

$\sigma^{-1}\tau_1\sigma$ läßt $P_0, P, P_2, \ldots, P_{r+1}$ fest, also

$$\sigma^{-1}\tau_1\sigma \subset \mathfrak{G}_{P_0} \subset \mathfrak{A}_{m+1,q}.$$

Folglich

$$\sigma^{-1}\tau_1\sigma(L) = L.$$

Aber

$$\sigma^{-1}\tau_1\sigma(Q) = \sigma^{-1}\tau_1(P_{r+2}) = \sigma^{-1}(Q_{r+2})$$

liegt nicht in L; das ist ein Widerspruch, w. z. b. w.

Sei $q = 2$. Dann ist

$$\mathfrak{G}_{P_0} = LF(m+1, 2).$$

Satz 3: *Wenn eine Gerade von s wieder auf eine Gerade abgebildet wird, so gehen beide Geraden durch P.*

Beweis: Angenommen, s bildet die Gerade QR auf eine andere Gerade ab und P liegt nicht auf QR. Nach Satz 2 liegt P nicht auf der Geraden $s(Q)\,s(R)$. Nach Satz 1 gibt es eine Permutation τ in LF, die

P festläßt und Q auf $s(Q)$, R auf $s(R)$ abbildet. $\tau^{-1}\sigma$ vertauscht P und P_0 und läßt die Gerade QR punktweise fest.

Es genügt, die Annahme, daß s die Gerade QR punktweise festläßt, zum Widerspruch zu führen. s läßt dann PQR punktweise fest nach Satz 2.

Wir werden zeigen, daß s mit einem Punkt S außerhalb PQR den ganzen linearen Raum $PQRS$ punktweise festläßt. s soll also jeden Punkt T außerhalb von PQR in $PQRS$ festlassen. Es genügt, die Annahme $T \subset SQ$, $T \neq Q, S$, $s(T) \neq T$ zu widerlegen. Da $s(PSQ) = PSQ$ nach Satz 2, so liegt $s(T)$ auf Gerade PT. Es sei $P = (x_1)$, $Q = (x_2)$, $R = (x_3)$, $S = (x_4)$. Dann ist $T = (x_2 + x_4)$ und $s(T) = (x_1 + x_2 + x_4)$. Nach Satz 1 gibt es in LF eine Permutation τ_1, die P und Q festläßt, aber R mit S vertauscht. Da $(\tau_1\sigma)^2$ P_0, P, Q, R, S festläßt, so läßt $(\tau_1\sigma)^2$ $PQRS$ punktweise fest. Aber

$$\tau_1\sigma\tau_1\sigma(x_2 + x_4) = \tau_1\sigma\tau_1(x_1 + x_2 + x_4) = \tau_1\sigma(x_1 + x_2 + x_3)$$
$$= \tau_1(x_1 + x_2 + x_3) = x_1 + x_2 + x_4,$$

und das ist ein Widerspruch.

Es seien $P, Q, R, P_4, \ldots, P_{m+1}$ $m+1$ unabhängige Punkte aus $\Gamma_{2,m+1}$. Nach Satz 2 sind auch

$$P, Q, R, \sigma(P_4) = Q_4, \quad \sigma(P_5) = Q_5, \quad \ldots, \quad \sigma(P_{m+1}) = Q_{m+1}$$

$m+1$ unabhängige Punkte.

Nach Satz 1 gibt es eine Permutation τ_2 aus LF, die P, Q, R festläßt, aber P_i in Q_i überführt ($i = 4, \ldots, m+1$). $\tau_2^{-1}\sigma$ vertauscht P mit P_0 und läßt Gerade QR punktweise fest, ferner läßt $\tau_2^{-1}\sigma$ die Punkte $P_4, \ldots, P_{m+1}$ fest.

Es genügt, die Annahme, daß s PQR punktweise festläßt und daß s die Punkte $P_4, \ldots, P_{m+1}$ festläßt, zu einem Widerspruch zu führen. Nach der vorhin angestellten Überlegung muß s sämtliche Punkte aus $\Gamma_{2,m+1}$ festlassen. σ ist eine in $\mathfrak{G}$ enthaltene Transposition. Da $n \geqq 7$ und $\mathfrak{G}$ wenigstens zweifach transitiv, also primitiv vom Grade $n+1$, so ist $\mathfrak{G}$ wenigstens vierfach transitiv. LF müßte wenigstens dreifach transitiv sein, und das ist ein Widerspruch, w. z. b. w.

Satz 4: *Eine transitive Erweiterung von* $LF(m+1, 2)$ *ist notwendig isomorph zu* $\mathfrak{G}_{2,m+1}$.

Beweis: Es genügt der Nachweis einer eindeutig bestimmten Permutation σ_1 aus $\mathfrak{G}$, die mit LF zusammen $\mathfrak{G}$ erzeugt.

σ sei eine Permutation, die P und P_0 vertauscht. $P, P_2, \ldots, P_{m+1}$ seien $m+1$ unabhängige Punkte aus $\Gamma_{2,m+1}$. Nach Satz 2 sind $P, \sigma(P_2) = Q_2, \ldots, \sigma(P_{m+1}) = Q_{m+1}$ $m+1$ unabhängige Punkte. Nach

Satz 1 gibt es eine Permutation τ in LF, die P festläßt und P_i auf Q_i abbildet. $\sigma_1 = \tau^{-1}\sigma$ vertauscht P mit P_0 und läßt $P_2, P_3, \ldots, P_{m+1}$ fest. QR sei eine beliebige Gerade aus $\Gamma_{2, m+1}$. S sei der dritte Punkt auf QR. Um nachzuweisen, daß σ_1 eindeutig bestimmt ist, genügt es zu zeigen, daß $\sigma(S)$ eindeutig durch $\sigma(Q)$ und $\sigma(R)$ bestimmt ist. Falls QR durch P geht, so ist das nach Satz 2 der Fall. Es gehe QR nicht durch P. Nach Satz 2 geht auch $\sigma(Q)\,\sigma(R)$ nicht durch P. T sei dritter Punkt auf Gerade $\sigma(Q)\,\sigma(R)$. Nach Satz 2 liegt $\sigma(S)$ auf $P\sigma(Q)\,\sigma(R)$, aber weder auf $P\sigma(Q)$, noch auf $P\sigma(R)$, also liegt $\sigma(S)$ auf PT. Nach Satz 3 muß $\sigma(S)$ der dritte Punkt auf PT sein.

Da $\mathfrak{G}$ zweifach transitiv, so ist $\mathfrak{G}$ primitiv. $LF = \mathfrak{G}_{P_0}$ ist maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, folglich erzeugt σ_1 und LF ganz $\mathfrak{G}$, w. z. b. w.

Satz 5: *Wenn $q > 2$ und im Fall $q = 4$ die Dimension m größer als 2 ist, so ist die Permutation s ein Automorphismus von $\Gamma_{q, m+1}$*

Beweis: Es genügt zu beweisen, daß s eine Gerade QR, die nicht durch P geht, wieder auf eine Gerade abbildet. Nach Satz 2 sind P, $s(Q)$, $s(R)$ drei unabhängige Punkte. Nach Satz 1 liegt in LF eine Permutation τ, die P festläßt und Q auf $s(Q)$, R auf $s(R)$ abbildet. $\sigma_1 = \tau^{-1}\sigma$ vertauscht P mit P_0, aber läßt Q und R fest. Wenn gezeigt ist, daß σ_1 die Gerade QR festläßt, so führt $\sigma = \tau\sigma_1$ die Gerade QR in eine andere Gerade über. Es kann $s(Q) = Q$, $s(R) = R$ angenommen werden.

Angenommen, es gibt einen Punkt S auf QR, so daß $s(S) = T$ nicht auf QR liegt. Nach Satz 2 liegt T in PQR, aber weder auf PQ, noch auf PR. Es kann

$$P = (\mathfrak{x}_1), \quad Q = (\mathfrak{x}_2), \quad R = (\mathfrak{x}_3), \quad T = (\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3)$$

angenommen werden.

$S_1, S_2, \ldots, S_r$ seien diejenigen Punkte auf QR, die von s nicht auf der Geraden QR gelassen werden. Es sei $s(S_i) = T_i$. Es ist $r \leqq q - 1$.

Wenn eine Permutation τ in LF gefunden ist, die P, Q, R festläßt, so daß

$$\tau(T) \neq T_i \qquad i = 1, 2, \ldots, r,$$

so folgt ein Widerspruch. Denn $\sigma^{-1}\tau\sigma$ läßt P_0, P, Q, R fest. Also muß $\sigma^{-1}\tau\sigma(S)$ auf QR liegen. Andererseits ist

$$\sigma^{-1}\tau\sigma(S) = \sigma^{-1}\tau(T) \not\subset QR,$$

weil

$$\tau(T) \neq T_i.$$

P, Q, R, $P_4 = (\mathfrak{x}_4), \ldots, P_{m+1} = (\mathfrak{x}_{m+1})$ seien $m + 1$ unabhängige Punkte.

Falls $m \geqq 3$, so setzen wir:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & & & & \\ & a & & & & \\ & & b & & & \\ & & & \frac{1}{ab} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \cdot \; 1 \end{pmatrix} \qquad a, b \neq 0.$$

Dann bestehen für $\tau(T) = (\mathfrak{x}_1 + a\,\mathfrak{x}_2 + b\,\mathfrak{x}_3)$ $(q-1)^2$ Möglichkeiten. Wegen $q > 2$ ist

$$(q-1)^2 > q - 1,$$

also

$$\tau(T) \neq T_i \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

lösbar.

Falls $m = 2$. so setzen wir:

$$\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{ab} & & \\ & a & \\ & & b \end{pmatrix} \qquad a, b \neq 0.$$

Es ist

$$\tau(T) = \left(\frac{1}{ab}\mathfrak{x}_1 + a\,\mathfrak{x}_2 + b\,\mathfrak{x}_3\right) = (\mathfrak{x}_1 + a^2 b\,\mathfrak{x}_2 + a b^2\,\mathfrak{x}_3).$$

Für $\tau(T)$ bestehen $(q-1)^2$ Möglichkeiten, falls $q \not\equiv 1\,(3)$, und $\frac{1}{3}(q-1)^2$ Möglichkeiten, falls $q \equiv 1\,(3)$. Wegen $q \neq 2, 4$ ist wiederum

$$\tau(T) \neq T_i \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

lösbar. W. z. b. w.

Bemerkung: Wenn im Fall $q = 4$, $m = 2$ $\sigma(S) = T$ nicht auf QR liegt und etwa $T = (\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3)$, so ist $r = 3$, und T_1, T_2, T_3 sind die 3 Punkte $(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3)$, $(\mathfrak{x}_1 + \varrho\,\mathfrak{x}_2 + \varrho^2\,\mathfrak{x}_3)$, $(\mathfrak{x}_1 + \varrho^2\,\mathfrak{x}_2 + \varrho\,\mathfrak{x}_3)$, wo ϱ eine primitive 3. Einheitswurzel aus k_4 ist.

Voraussetzung: $\mathfrak{G}$ sei eine transitive Erweiterung von $\mathfrak{G}_{P_0}$, wo $LF(m+1, q) \subset \mathfrak{G}_{P_0} \subset \mathfrak{A}_{q,m+1}$. σ sei eine Permutation, die P und P_0 vertauscht.

Satz 6: *Es gibt eine nicht durch P gehende Gerade in $\Gamma_{q,m+1}$, die von σ nicht auf eine Gerade abgebildet wird.*

Beweis: Die Annahme, daß s ein Automorphismus von $\Gamma_{q,m+1}$ ist, muß widerlegt werden.

Angenommen, s ist Automorphismus von $\Gamma_{q,m+1}$. Da σ um eine Permutation aus LF, die P festläßt, abgeändert werden kann, so kann angenommen werden, daß s die $m+1$ unabhängigen Punkte

$$P = (\mathfrak{x}_1), \quad P_2 = (\mathfrak{x}_2), \quad \ldots, \quad P_{m+1} = (\mathfrak{x}_{m+1})$$

festläßt.

s hat die Wirkung

$$s(\mathfrak{x}) = S\,A(\mathfrak{x}),$$

wo S ein Automorphismus von k_q, und A eine nicht singuläre Matrix ist. Da LF in $\mathfrak{G}_{P_0}$ enthalten ist, so enthält $\mathfrak{G}$ nach Satz 1 eine Permutation τ, die P_0 und P_3 festläßt, aber P_1 und P_2 vertauscht. $(\tau\sigma)^3$ läßt P_0, P und P_3 fest. Nach Voraussetzung führt $(\tau\sigma)^3$ die Gerade $P P_3$ in sich über. Aber $(\tau\sigma)^3$ führt jeden von P_3 verschiedenen Punkt auf $P P_3$ in einen Punkt auf der Geraden $P_2 P_3$ über und das ist ein Widerspruch. W. z. b. w.

Satz 7: *Eine transitive Erweiterung $\mathfrak{G}$ einer zwischen $LF(m+1, q)$ und $\mathfrak{A}_{q, m+1}$ liegenden Gruppe $\mathfrak{G}_{P_0}$ existiert dann und nur dann, wenn $q = 2$ bzw. wenn $q = 4$, $m = 2$ und $(\mathfrak{G}_{P_0} : LF(3,4))\,/2$. $\mathfrak{G}$ ist isomorph zu $\mathfrak{G}_{2, m+1}$, zur Millerschen Gruppe von der Ordnung $20\,160 \cdot 22$ bzw. zu deren Normalisator in $\mathfrak{S}_{22}$. Eine transitive Erweiterung $\mathfrak{G}_{23}$ von $\mathfrak{G}$ existiert dann und nur dann, wenn $\mathfrak{G}$ die Millersche Gruppe ist. $\mathfrak{G}_{23}$ läßt sich noch genau einmal transitiv erweitern zu $\mathfrak{G}_{24}$. $\mathfrak{G}_{23}$, $\mathfrak{G}_{24}$ sind eindeutig bestimmt.*

Beweis: Es sei $q = 4$, $m = 2$. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ liegt in $\mathfrak{G}_{P_0}$, hat die Ordnung 2 und läßt genau sechs Ziffern fest. Es sei $P = (\mathfrak{x}_1)$, $Q = (\mathfrak{x}_2)$, $R = (\mathfrak{x}_3)$. Da $\mathfrak{G}$ dreifach transitiv, so gibt es eine Permutation ξ_1 in $\mathfrak{G}$, die P und Q festläßt, aber $(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2)$ in P_0 überführt.

$\sigma_2 = \xi_1 \sigma_1 \xi_1^{-1}$ vertauscht P und P_0, läßt Q fest, hat genau sechs Fixpunkte und die Ordnung 2. σ_2 hat einen Fixpunkt R_1, der nicht auf Gerade PQ liegt. Es gibt in $\mathfrak{G}_{P_0}$ eine Permutation ξ_2, die P und Q festläßt, aber R_1 in R überführt. $\sigma_3 = \xi_2 \sigma_2 \xi_2^{-1}$ läßt Q und R fest. Falls σ_3 die Punkte $\neq P$ auf PQ nicht punktweise festläßt, so setze $\sigma_4 = \sigma_3$. Falls σ_3 die Punkte $\neq P$ auf PQ punktweise festläßt, so läßt σ_3 nicht jeden Punkt $\neq P$ auf PR fest, denn σ_3 hat genau sechs Fixpunkte. ξ_4 sei eine Permutation aus $\mathfrak{G}_{P_0}$ nach Satz 1, die P festläßt, aber Q und R vertauscht. Setze $\sigma_4 = \xi_4\, \sigma_3\, \xi_4^{-1}$. σ_4 vertauscht P und P_0, läßt Q und R fest; aber σ_4 läßt nicht jeden Punkt $\neq P$ auf PQ fest. Da σ_4 die Ordnung 2 hat und nach Satz 2 die drei Punkte $\neq P, Q$ auf PQ untereinander permutiert, so läßt σ_4 einen Punkt $(\mathfrak{x}_1 + x\,\mathfrak{x}_2)$, wo $x \neq 0$, fest. Setze

$$\xi_5 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & x^{-1} & \\ & & x \end{pmatrix}.$$

ϱ sei eine primitive dritte Einheitswurzel aus k_4. $\sigma = \xi_5 \sigma_4 \xi_5^{-1}$ vertauscht P mit P_0, läßt Q, R und $(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2)$ fest, vertauscht $(\mathfrak{x}_1 + \varrho\,\mathfrak{x}_2)$ mit

$(\mathfrak{x}_1 + \varrho^2 \mathfrak{x}_2)$, hat genau sechs Fixpunkte und hat die Ordnung 2. Nach Satz 2 permutiert σ die drei Punkte $\neq P, R$ auf PR, läßt mithin einen von ihnen fest. $R = (\mathfrak{x}_3)$ kann so normiert werden, daß

$$\sigma(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_3) = (\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_3).$$

In $\mathfrak{G}_{P_0}$ liegt die Permutation $\tau = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$. $(\tau\sigma)^3$ liegt in $\mathfrak{G}_{P_0}$, läßt die Gerade PQ punktweise fest und läßt R fest. Daher ist

$$(\tau\sigma)^3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & y \end{pmatrix},$$

wo $y \neq 0$. Falls $(\tau\sigma)^3 \neq 1$, so läßt $(\tau\sigma)^3$ genau sieben Ziffern fest, $\tau\sigma$ hat die Ordnung q und kann nur einen q-gliedrigen Zyklus enthalten. Dann muß aber $(\tau\sigma)^3$ wenigstens dreizehn Ziffern festlassen. Daher ist doch $(\tau\sigma)^3 = 1$.

Wenn $\sigma(QR) = QR$, so würde $\tau\sigma$ die vier Punkte $\neq Q$ auf QR mit den vier Punkten $\neq P$ auf PR vertauschen und dann würde $(\tau\sigma)^3$ nicht die Gerade PR festlassen. Folglich ist $\sigma(QR) \neq QR$. Nach Bemerkung zu Satz 5 ist $\sigma(X) \not\subset QR$ für alle $X \subset QR$, $\neq Q, R$.

Nach Satz 2 läßt σ entweder $\mathfrak{x}_1 + \varrho\,\mathfrak{x}_3$ und $\mathfrak{x}_1 + \varrho^2 \mathfrak{x}_3$ beide fest, oder σ vertauscht diese beiden Punkte.

Wenn $\sigma(\mathfrak{x}_1 + \varrho\,\mathfrak{x}_3) = (\mathfrak{x}_1 + \varrho\,\mathfrak{x}_3)$, so

$$\sigma(\mathfrak{x}_1 + \varrho^2 \mathfrak{x}_3) = (\mathfrak{x}_1 + \varrho^2 \mathfrak{x}_3),$$
$$(\tau\sigma)^3(\mathfrak{x}_1 + \varrho\,\mathfrak{x}_3) = (\tau\sigma)^2(\mathfrak{x}_2 + \varrho\,\mathfrak{x}_3) = (\mathfrak{x}_1 + \varrho\,\mathfrak{x}_3),$$
$$\tau\sigma(\mathfrak{x}_2 + \varrho\,\mathfrak{x}_3) = \sigma(\mathfrak{x}_2 + \varrho\,\mathfrak{x}_3).$$

Folglich

$$\sigma(\mathfrak{x}_2 + \varrho\,\mathfrak{x}_3) = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + a\,\mathfrak{x}_3, \qquad \text{wo } a \neq 0,$$

ebenso

$$\sigma(\mathfrak{x}_2 + \varrho^2 \mathfrak{x}_3) = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + b\,\mathfrak{x}_3, \qquad \text{wo } b \neq 0.$$

Nach der Bemerkung zu Satz 5 muß aber

$$\sigma(\mathfrak{x}_2 + \varrho^2 \mathfrak{x}_3) = \mathfrak{x}_1 + \varrho\,\mathfrak{x}_2 + \varrho^2 a\,\mathfrak{x}_3$$

oder

$$= \mathfrak{x}_1 + \varrho^2 \mathfrak{x}_2 + \varrho\, a\,\mathfrak{x}_3$$

sein. Daher vertauscht σ doch die Punkte $(\mathfrak{x}_1 + \varrho\,\mathfrak{x}_3)$ und $(\mathfrak{x}_1 + \varrho^2 \mathfrak{x}_3)$ miteinander. Es ist

$$\sigma(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_3) = (\mathfrak{x}_1 + \alpha_2 \mathfrak{x}_2 + \alpha_3 \mathfrak{x}_3), \qquad \text{wo } \alpha_1, \alpha_2 \neq 0,$$
$$(\tau\sigma)^3(\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3) = (\tau\sigma)^2(\alpha_2 \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \alpha_3 \mathfrak{x}_3) = (\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3).$$

Also

$$\sigma(\alpha_2 \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \alpha_3 \mathfrak{x}_3) = (\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3),$$
$$\sigma(\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3) = (\alpha_2 \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \alpha_3 \mathfrak{x}_3).$$

Da andererseits
$$\sigma(\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3) = (\mathfrak{x}_1 + \alpha_2 \mathfrak{x}_2 + \alpha_3 \mathfrak{x}_3),$$
so ist $\alpha_2 = 1$. Wenn τ durch $\tau_1 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ ersetzt wird, so folgt nach demselben Verfahren $\alpha_3 = 1$. σ vertauscht $(\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3)$ mit $(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3)$.

In $\mathfrak{G}_{P_0}$ liegt die Permutation
$$\tau_2 = \begin{pmatrix} & \varrho & \\ 1 & & \\ & & \varrho^2 \end{pmatrix}.$$
$(\tau_2\sigma)^3$ läßt P_0 und R, ferner die Gerade PQ punktweise fest. Daher folgt wie vorhin:
$$\begin{aligned} (\tau_2\sigma)^3 &= 1, \\ (\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3) &= (\tau_2\sigma)^3(\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3) = (\tau_2\sigma)(\mathfrak{x}_1 + \varrho\mathfrak{x}_2 + \varrho^2\mathfrak{x}_3), \\ \varrho\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3 &= \sigma(\mathfrak{x}_1 + \varrho\mathfrak{x}_2 + \varrho^2\mathfrak{x}_3), \\ \sigma(\mathfrak{x}_2 + \varrho^2\mathfrak{x}_3) &= \mathfrak{x}_1 + \varrho\mathfrak{x}_2 + \varrho^2\mathfrak{x}_3. \end{aligned}$$
Ebenso folgt, wenn τ_2 durch $\tau_3 = \begin{pmatrix} & \varrho^2 & \\ 1 & & \\ & & \varrho \end{pmatrix}$ ersetzt wird, daß
$$\sigma(\mathfrak{x}_2 + \varrho\mathfrak{x}_3) = \mathfrak{x}_1 + \varrho^2\mathfrak{x}_2 + \varrho\mathfrak{x}_3.$$
$\sigma(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \varrho\mathfrak{x}_3)$ liegt auf der Geraden durch P und $(\mathfrak{x}_2 + \varrho^2\mathfrak{x}_3)$ nach Satz 2. Da σ die Punkte $(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2)$ und $(\mathfrak{x}_3)$ festläßt, nicht aber den Punkt $(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3)$ auf der Geraden durch $(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2)$ und $(\mathfrak{x}_3)$ läßt, so liegt nach Bemerkung zu Satz 5 auch $\sigma(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \varrho\mathfrak{x}_3)$ nicht auf der Geraden durch $(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2)$ und $(\mathfrak{x}_3)$. Folglich
$$\sigma(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \varrho\mathfrak{x}_3) = (\mathfrak{x}_1 + \varrho\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3),$$
ebenso
$$\sigma(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \varrho^2\mathfrak{x}_3) = (\mathfrak{x}_1 + \varrho^2\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3).$$

Wenn $L_{4,3}$ in $\mathfrak{G}_{P_0}$ liegt, so enthält $\mathfrak{G}_{P_0}$ die Permutation
$$\tau_4 = \begin{pmatrix} \varrho & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$
$(\tau_4\sigma)^2$ läßt die Geraden PQ und PR punktweise fest, ferner läßt $(\tau_4\sigma)^2$ die Ziffer P_0 fest. Daher ist $(\tau_4\sigma)^2 = 1$. Aber
$$\begin{aligned} (\tau_4\sigma)^2(\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3) &= \tau_4\sigma\tau_4(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3) \\ &= \tau_4\sigma(\mathfrak{x}_1 + \varrho^2\mathfrak{x}_2 + \varrho^2\mathfrak{x}_3) \\ &= \tau_4(\mathfrak{x}_1 + \varrho^2\mathfrak{x}_2 + \varrho^2\mathfrak{x}_3) \neq (\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3). \end{aligned}$$
Folglich ist $(\mathfrak{G}_{P_0} : LF(3, 4))$ Teiler von 2.

Da $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{G}_{P_0}$ und σ erzeugt wird, so ist $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt. Leicht wird bewiesen, daß tatsächlich die Permutationsgruppe $LF(3, 4)$ der 21 Punkte aus $\Gamma_{4,3}$ zusammen mit der Permutation

$$\sigma = (P_0, \mathfrak{x}_1)(\mathfrak{x}_1 + \varrho\,\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_1 + \varrho^2\mathfrak{x}_2)(\mathfrak{x}_1 + \varrho\,\mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_1 + \varrho^2\mathfrak{x}_3)$$
$$(\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3)(\mathfrak{x}_2 + \varrho\,\mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_1 + \varrho^2\mathfrak{x}_2 + \varrho\,\mathfrak{x}_3)(\mathfrak{x}_2 + \varrho^2\mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_1 + \varrho\,\mathfrak{x}_2 + \varrho^2\mathfrak{x}_3)$$
$$(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \varrho\,\mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_1 + \varrho\,\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3)(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \varrho^2\mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_1 + \varrho^2\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3)$$

eine dreifach transitive Permutationsgruppe $\mathfrak{G}_{22}$ von der Ordnung $20\,160 \cdot 22$ erzeugt. Der Index des Normalisators von $\mathfrak{G}_{22}$ nach $\mathfrak{G}_{22}$ in $\mathfrak{S}_{22}$ ist Teiler von 2. Tatsächlich transformiert die Permutation $S(\mathfrak{x})$, wo S Automorphismus von k_4, die Gruppe $\mathfrak{G}_{22}$ in sich. Daher besitzt $\langle S, LF(3, 4)\rangle$ ebenfalls eine transitive Erweiterung $\mathfrak{G}_{22}$.

In einer transitiven Erweiterung $\mathfrak{G}_{23}$ von $\mathfrak{G}_{22}$ muß die Permutation

$$\sigma' = (P_{00}, \mathfrak{x}_1)(\mathfrak{x}_1 + \varrho\,\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_1 + \varrho^2\mathfrak{x}_2)(\mathfrak{x}_1 + \varrho\,\mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_3)$$
$$(\mathfrak{x}_2 + \varrho^2\mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \varrho^2\mathfrak{x}_3)(\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_1 + \varrho^2\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3)(\mathfrak{x}_2 + \varrho\,\mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_1 + \varrho\,\mathfrak{x}_2 + \varrho\,\mathfrak{x}_3)$$
$$(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_1 + \varrho\,\mathfrak{x}_2 + \varrho^2\mathfrak{x}_3)(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \varrho\,\mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_1 + \varrho^2\mathfrak{x}_2 + \varrho^2\mathfrak{x}_3)$$

liegen (eventuell muß P_0 und P_{00} vertauscht und die $\mathfrak{x}_i$ müssen umnormiert werden). σ' wird ähnlich wie vorhin σ gefunden. Es muß beachtet werden, daß in $\mathfrak{G}_{23}$ kein dreigliedriger Zyklus vorkommen kann. Denn $\mathfrak{G}_{23}$ soll vierfach, aber nicht fünffach transitiv sein.

Tatsächlich erzeugt $\mathfrak{G}_{22}$ und die Permutation σ eine Gruppe $\mathfrak{G}_{23}$ von der Ordnung $20\,160 \cdot 22 \cdot 23$. Eine transitive Erweiterung von $\mathfrak{G}'_{22}$ kann es nicht geben, weil S die aus σ' und $LF(3, 4)$ erzeugte Untergruppe $\mathfrak{U}_{P_0}$ von $\mathfrak{G}_{23}$ nicht in sich transformiert.

In einer transitiven Erweiterung von $\mathfrak{G}_{23}$ muß die Permutation

$$\sigma'' = (P_{000}, \mathfrak{x}_1)(\mathfrak{x}_1 + \varrho\,\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_1 + \varrho^2\mathfrak{x}_2)(\mathfrak{x}_1 + \varrho^2\mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_3)$$
$$(\mathfrak{x}_2 + \varrho\,\mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \varrho\,\mathfrak{x}_3)(\mathfrak{x}_2 + \varrho^2\mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_1 + \varrho^2\mathfrak{x}_2 + \varrho^2\mathfrak{x}_3)(\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_1 + \varrho\,\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3)$$
$$(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \varrho^2\mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_1 + \varrho\,\mathfrak{x}_2 + \varrho\,\mathfrak{x}_3)(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_1 + \varrho^2\mathfrak{x}_2 + \varrho\,\mathfrak{x}_3)$$

liegen. Tatsächlich erzeugt σ'' und $\mathfrak{G}_{23}$ eine fünffache transitive Permutationsgruppe $\mathfrak{G}_{24}$ von 24 Ziffern, deren Ordnung $20\,160 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24$ ist.

Eine transitive Erweiterung von $\mathfrak{G}_{24}$ existiert nicht.

(Eingegangen am 6. 4. 1935.)

Über die Abbildungen bikompakter Räume in Euklidische Räume.

Von

A. Tychonoff in Moskau.

Für einen kompakten metrischen Raum F gilt der Satz, daß es für jedes ε eine ε-Abbildung von F in einen Euklidischen Raum R^n gibt[1]). Unsere Aufgabe ist, diesen Satz auf den Fall bikompakter topologischer Räume[2]) zu verallgemeinern. Dabei haben wir ein topologisches Analogon der ε-Abbildungen zu finden. Das eine und das andere ist im folgenden Satze enthalten.

Satz. *Für jede offene Überdeckung* $\{U\}$ *eines bikompakten Hausdorffschen Raumes* F *gibt es eine Abbildung dieses Raumes in einen Euklidischen Raum, bei der das Urbild jedes Punktes in einem Element der Überdeckung enthalten ist.*

Beweis. Für jeden Punkt $\bar{x}$ gibt es in $\{U\}$ ein Element $U = U(\bar{x})$, welches diesen Punkt enthält. Da jeder bikompakte Hausdorffsche Raum regulär ist, gibt es eine Umgebung $V(\bar{x})$ mit $\overline{V(\bar{x})} \subset U(\bar{x})$, und eine stetige Funktion $f(x)$ mit

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \quad \text{für} \quad x \subset \overline{V(\bar{x})}, \\ 0 \leqq f(x) &\leqq 1 \quad \text{„} \quad x \subset U(\bar{x}) - \overline{V(\bar{x})}, \\ f(x) &= 1 \quad \text{„} \quad x \subset R - U(\bar{x})^{3)}. \end{aligned}$$

Auf solche Weise erhalten wir eine Überdeckung $\{V\}$ des bikompakten Raumes F. Wir ersetzen diese Überdeckung durch eine endliche Teil-

---

1) Unter einer ε-Abbildung versteht man eine solche, bei der der Durchmesser des Urbildes eines jeden Bildpunktes kleiner als ε ist. Der Begriff einer ε-Abbildung und der obige Satz rühren von Herrn Alexandroff her.

2) Ein topologischer Raum R heißt bikompakt, wenn in jeder offenen Überdeckung des Raumes (d. h. in jedem System offener Mengen, deren Vereinigungsmenge der ganze Raum R ist) endlich viele offene Mengen gefunden werden können, die eine Überdeckung von R bilden. Vgl. P. Alexandroff und P. Urysohn, Zur Theorie der topologischen Räume, Math. Annalen **92** (1924), S. 258 u. ff.

3) Siehe A. Tychonoff, Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Annalen **102** (1929), S. 551.

überdeckung $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Es seien $U_1, U_2, \ldots, U_n$ die entsprechenden Elemente von $\{U\}$ (einige von ihnen können in dieser Reihe mehrfach vorkommen) und $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ die zugehörigen Funktionen.

Wir bilden nun den Raum F in den R^n ab, indem wir einem Punkte x den Punkt $\xi \subset R^n$ mit den Koordinaten $x_i = f_i(x)$ zuschreiben. Diese Abbildung ist stetig[4]), da alle $f_i(x)$ stetig sind.

Wir behaupten nun, daß das Urbild eines Punktes $\xi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ zu einem der $U_i (i = 1, \ldots, n)$ gehört. Ist die i-te Koordinate x_i von ξ kleiner als 1, so liegt nach der Definition von $f_i(x)$ jeder Originalpunkt von x in U_i. Die offenen Mengen $V_1, V_2, \ldots, V_n$ bilden aber eine Überdeckung von R, also ist wenigstens eine Koordinate jedes Punktes gleich 0, woraus unsere Behauptung folgt.

---

[4]) P. Alexandroff, Math. Annalen 98 (1928), S. 617.

(Eingegangen am 22. 4. 1935.)

Über einen Funktionenraum.

Von

A. Tychonoff in Moskau.

In der vorliegenden Arbeit soll ein neues Häufungsstellenprinzip für Funktionenmengen aufgestellt werden; es wird sodann auf die Lösung eines Problems aus der Theorie der bikompakten topologischen Räume angewandt, welches vor mehr als zehn Jahren von Alexandroff und Urysohn gestellt worden ist[1]. Unter einer Funktion wird hier durchweg eine reelle Funktion einer reellen Veränderlichen verstanden. Die Übertragung auf allgemeinere Funktionen- bzw. Abbildungsklassen liegt auf der Hand.

§ 1.

Definition. *Eine Funktion $f_0(x)$, $0 \leqq x \leqq 1$, heißt eine* **Häufungsfunktion** *einer Funktionenmenge $M = f(x)$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ und jede endliche Punktmenge $x_1, \ldots, x_n$ der Strecke $0 \leqq x \leqq 1$ eine Funktion $f(x)$ aus M gibt, so daß*

$$|f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n)$$

ist.

Betrachtet man die Menge aller Häufungsfunktionen der Funktionenmenge M als die abgeschlossene Hülle von M, so wird dadurch in der Menge aller auf der Einheitsstrecke der Zahlengeraden definierten reellen Funktionen eine *topologische Zuordnung* erklärt, so daß die letztgenannte Menge als ein topologischer Raum F aufgefaßt werden kann[2]. Betrachtet man unter den Elementen von F nur diejenigen Funktionen $f(x)$, die der Ungleichung

$$-k \leqq f(x) \leqq k, \quad 0 \leqq x \leqq 1,$$

[1] Die Formulierung dieses Problems findet der Leser zu Beginn des § 2 dieser Arbeit.

[2] Vgl. Alexandroff-Hopf, Topologie I (Berlin, Springer) Kap. I, § 1, Nr. 1, oder auch Alexandroff, Math. Annalen 96 (1926), S. 555.

für eine feste natürliche Zahl k genügen, so erhält man eine Teilmenge F_k des Raumes F, die ihrerseits als topologischer Raum (als Relativraum von F) betrachtet werden kann. Von diesen Räumen F_k beweisen wir nun, daß sie *bikompakte Hausdorffsche Räume* sind.

Wir beweisen sogar mehr, nämlich daß bei jedem k der Raum F_k dem bikompakten Hausdorffschen Raume $R_{\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c}$ ist die Mächtigkeit des Kontinuums), den ich bei einer anderen Gelegenheit definiert habe, homöomorph ist[3]).

Die Punkte des Raumes $R_{\mathfrak{c}}$ sind Systeme

$$y = (\ldots y_\alpha, \ldots)$$

der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ von „Koordinaten", wobei jede Koordinate eine reelle Zahl y_α, $-1 \leqq y_\alpha \leqq 1$, ist. Eine Umgebung eines Punktes $y^0 = (\ldots y^0_\alpha \ldots)$ erhält man, wenn man ein willkürliches $\varepsilon > 0$ wählt, eine willkürliche endliche Anzahl von Koordinaten, $y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_s}$ herausgreift und diejenigen Punkte von $R_{\mathfrak{c}}$ betrachtet, die in diesen endlich vielen Koordinaten $y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_s}$ den Ungleichungen

$$|y^0_{\alpha_i} - y_{\alpha_i}| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, s)$$

genügen (die übrigen Koordinaten sind keinen Bedingungen unterworfen).

Zwischen den Punkten von $R_{\mathfrak{c}}$ und den Punkten von F_1 stellen wir eine eineindeutige Beziehung dadurch her, daß wir zuerst irgendwie die Menge der Punkte der Einheitsstrecke auf die Menge aller Koordinaten (-stellen) eineindeutig abbilden (eine solche Abbildung ist möglich, weil die beiden Mengen die gleiche Mächtigkeit haben). Es sei

$$x \rightleftarrows \alpha$$

diese Abbildung. Wir lassen sodann der Funktion $f(x)$ den Punkt

$$y = (\ldots y_\alpha \ldots)$$

von $R_{\mathfrak{c}}$ dadurch entsprechen, daß wir $y_\alpha = f(x)$ für $x \rightleftarrows \alpha$ setzen. Diese Zuordnung ergibt eine eineindeutige Abbildung von F_1 auf $R_{\mathfrak{c}}$; die Topologie in $R_{\mathfrak{c}}$ und in F_1 wurde so eingeführt, daß die gewonnene eineindeutige Abbildung eine Homöomorphie zwischen F_1 und $R_{\mathfrak{c}}$ darstellt. Bildet man noch die Strecke $[-1; 1]$ auf die Strecke $[-k; k]$ proportional ab, so erhält man eine Homöomorphie zwischen $R_{\mathfrak{c}}$ und F_k, wie wir sie haben wollten.

---

[3]) Vgl. A. Tychonoff, Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Annalen **102** (1929), S. 544.

Aus der soeben bewiesenen Bikompaktheit der Räume F_k folgt insbesondere:

Satz I (Häufungsstellenprinzip). *Zu jeder Menge gleichmäßig beschränkter Funktionen gibt es mindestens eine Häufungsfunktion.*

Wir beweisen ferner:

Satz II. *Eine gleichmäßig beschränkte Funktionenfolge*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{1}$$

besitzt dann und nur dann eine einzige Häufungsfunktion, wenn sie (im gewöhnlichen Sinne) konvergiert.

Beweis. Es ist klar, daß, wenn die Folge (1) gegen die Funktion $f(x)$ konvergiert, diese Funktion die einzige Häufungsfunktion der Funktionenmenge (1) ist.

Es sei umgekehrt $f(x)$ die einzige Häufungsfunktion von (1). Würde (1) nicht gegen $f(x)$ konvergieren, so gäbe es eine Teilfolge

$$f_{n_1}(x),\ f_{n_2}(x),\ \ldots,\ f_{n_h}(x),\ \ldots \tag{2}$$

von (1), ein festes $\varepsilon > 0$ und einen festen Punkt x_0 der Einheitsstrecke derart, daß

$$|f(x_0) - f_{n_h}(x_0)| \geqq \varepsilon \tag{3}$$

für alle h ist. Da die $f_{n_h}(x)$ gleichmäßig beschränkt sind, besitzen sie eine Häufungsfunktion $f'(x)$; aus der Definition einer Häufungsfunktion folgt, daß es ein $f_{n_h}(x)$ mit $|f'(x_0) - f_{n_h}(x_0)| < \varepsilon$ gibt; aus dieser Ungleichung und der Ungleichung (3) folgt, daß $f'(x_0) \neq f(x_0)$ ist, daß somit $f'(x)$ eine von $f(x)$ verschiedene Berührungsfunktion der Funktionenmenge (2), also auch der Funktionenmenge (1) ist. Durch diesen Widerspruch ist der Satz II bewiesen.

§ 2.

Wir wollen in diesem Paragraphen einen *bikompakten Hausdorffschen Raum konstruieren, welcher keine einzige nicht triviale konvergente Punktfolge enthält*[4]). Eine Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ nennen wir dabei trivial, falls alle ihre Glieder von einem bestimmten n an untereinander identisch sind.

Zu diesem Zweck konstruieren wir zuerst eine Folge von Funktionen, die keine nicht triviale konvergente Teilfolge enthält. Es sei

$$x = 0,\ a_1 a_2 \ldots a_n \ldots,\quad a_n = a_n(x)$$

---

[4]) Vgl. z. B. Alexandroff und Urysohn, Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Verh. Kon. Akad. Amsterdam 14, Nr. 1, S. 54.

die dyadische Entwicklung der Zahl x, $0 < x < 1$; falls x zwei dyadische Entwicklungen besitzt, wählen wir diejenige, die von einer bestimmten Stelle an aus lauter Nullen besteht. Wir betrachten die Funktionenfolge

(4) $$a_1(x),\ a_2(x),\ \ldots,\ a_n(x),\ \ldots.$$

Es sei

(5) $$a_{n_1}(x),\ a_{n_2}(x),\ \ldots,\ a_{n_h}(x),\ \ldots$$

eine Teilfolge von (4). Wir betrachten den Punkt

$$x_0 = 0,\ b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$

der dadurch definiert ist, daß an den Stellen n_{2m} als b_n die Ziffer 1, an allen übrigen die Ziffer Null steht. Es ist

$$a_{n_{2m}}(x_0) = b_{n_{2m}} = 1$$

$$a_{n_{2m+1}}(x_0) = b_{n_{2m+1}} = 0,$$

die Funktionenfolge (5) konvergiert also im Punkte x_0 nicht. Das heißt: (4) *enthält keine nicht triviale konvergente Teilfolge.*

Wir betrachten jetzt die Funktionenfolge (4) als eine Punktmenge A des Raumes F_1. Die abgeschlossene Hülle $\bar{A}$ von A in F_1 ist ein bikompakter Hausdorffscher Raum; *wir beweisen, daß dieser Raum keine nicht triviale konvergente Punktfolge enthält.*

Nach dem Satz II genügt es zu zeigen, daß die Funktionenmenge $\bar{A}$ keine (im gewöhnlichen Sinne) konvergente nicht triviale Folge enthält. Es sei

(1) $$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

eine beliebige Folge, deren Elemente zu $\bar{A}$ gehören und alle untereinander verschieden sind. Wir nehmen an, daß diese Folge gegen ein $f(x)$ konvergiert. Wegen der Kompaktheit von $\bar{A}$ und nach dem Satz II gehört $f(x)$ ebenfalls zu $\bar{A}$. Es sei U_1 eine Umgebung (in $\bar{A}$) des Punktes $f \equiv f(x)$ von $\bar{A}$; es sei f_{n_1} ein dieser Umgebung angehörendes Element der Folge (1). Wir wählen eine Umgebung U_2 von f so, daß $\bar{U}_2 \subset U_1$ und $f_{n_1} \subset U_1 - \bar{U}_2$ ist. Es sei ferner $f_{n_2} \subset U_2$ und $\bar{U}_3 \subset U_2$, $f_{n_2} \subset U_2 - \bar{U}_3$. Auf diese Weise fortfahrend erhalten wir eine Folge von ineinander geschachtelten Umgebungen

$$U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_h \supset \ldots$$

von f und eine Teilfolge

$$f_{n_1},\ f_{n_2},\ \ldots,\ f_{n_h},\ \ldots,$$

so daß

$$\overline{U}_{h+1} \subset U_h, \; f_{n_{h+1}} \subset U_h - \overline{U}_{h+1}$$

ist. Wir bezeichnen mit A_h den Durchschnitt von A mit $U_h - \overline{U}_{h+1}$; keine der Mengen A_h ist leer, und alle diese Menge sind disjunkt, also erst recht paarweise voneinander verschieden. Die Elemente von A_h bezeichnen wir mit

$$a^h_{n_1}(x), \; a^h_{n_2}(x), \; \ldots, \; a^h_{n_i}(x), \; \ldots$$

und betrachten den Punkt

$$x_0 = 0, \; b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$

der Strecke $(0; 1)$, wobei b_n für $n = n_i^{2m}$ (bei beliebigem i) die Ziffer 1, für alle anderen n die Ziffer 0 ist. Dann sind für ein gerades h alle Funktionen aus A_h, also auch f_{n_h} als ihre Häufungsfunktion, in dem Punkte x_0 gleich 1; für ein ungerades h sind diese Funktionen gleich Null; die Funktionenfolge (1) divergiert somit im Punkte x_0, w. z. b. w.

(Eingegangen am 22. 4. 1935.)

Ein Fixpunktsatz.

Von

A. Tychonoff in Moskau.

Unsere Aufgabe ist, den Schauderschen Fixpunktsatz[1]) auf allgemeinere topologische lineare Räume zu erweitern und einige Anwendungen des so verallgemeinerten Satzes zu geben.

§ 1.

Einleitende Betrachtungen.

Eine Menge R heißt ein allgemeiner linearer Raum[2]), falls für ihre Elemente (im folgenden Punkte genannt) eine assoziative, kommutative, eindeutig umkehrbare Addition und eine den Bedingungen

$$a(b\,x) = (a\,b)\,x,$$
$$a\,x + b\,x = (a+b)\,x,$$
$$a\,x + a\,y = a\,(x+y),$$
$$1\,x = x,$$
$$0\,x = 0$$

genügende Multiplikation der Elemente mit reellen Zahlen definiert sind.

Unter einer die Punkte x und y verbindenden Strecke versteht man die aus allen Punkten $a\,x + b\,y$, $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 1$ bestehende Menge.

Eine Menge heißt konvex, falls jede Strecke, die je zwei der Menge gehörende Punkte verbindet, ganz der Menge angehört.

Einen allgemeinen linearen Raum R nennen wir einen linearen topologischen Raum, falls in der Menge R eine topologische Zuordnung eingeführt ist und in bezug auf diese topologische Zuordnung die Addition der Elemente von R und Multiplikation dieser Elemente mit reellen Zahlen stetig sind[3]).

Dabei folgt aus der zitierten Kolmogoroffschen Arbeit, daß R, als topologischer Raum betrachtet, notwendigerweise ein Hausdorffscher regulärer Raum ist.

---

[1]) Vgl. Schauder, Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. Studia Mathematica **2** (1930), S. 171.

[2]) Vgl. S. Banach, Théorie des opérations linéaires. Warszawa, 1932, Kap. II.

[3]) Vgl. A. Kolmogoroff, Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes. Studia Mathematica **5** (1934), S. 29.

Einen linearen topologischen Raum nennen wir endlich einen lokal-konvexen Raum, falls für jede Umgebung U des Nullpunktes eine konvexe Umgebung V des Nullpunktes existiert, welche ganz in U liegt. Offenbar folgt daraus, daß auch jeder vom Nullpunkt verschiedene Punkt des Raumes R die analoge Eigenschaft besitzt.

Ein linearer Raum R heißt ein *normierter* Raum, wenn für jeden Punkt x eine reelle Zahl $|x|$, die Norm von x, definiert ist, wobei die Bedingungen

$$|0| = 0, \tag{1}$$

$$|x| > 0, \quad \text{falls } x \neq 0, \tag{2}$$

$$|a x| = |a|\,|x|, \tag{3}$$

$$|x+y| \leqq |x| + |y| \tag{4}$$

erfüllt sind. Als Entfernung von x und y wird $|x-y|$ erklärt. Mit dieser Entfernung bildet R bekanntlich einen metrischen und folglich auch einen topologischen Raum, in welchem die Addition und die Multiplikation stetig sind. Da außerdem die sphärischen Umgebungen konvex sind, so gehören alle normierten Räume zur Klasse der lokal-konvexen linearen topologischen Räume.

Wir wollen zeigen, daß *es lineare topologische Räume gibt, welche keine lokal-konvexen Räume sind.* Dazu betrachten wir den Raum $H_{1/2}$, dessen Punkte abzählbare Zahlenfolgen $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ sind, mit konvergenter $\sum\limits_{1}^{\infty} \sqrt{|x_i|}$. Die Addition und Multiplikation werden wie gewöhnlich definiert. Als Norm des Punktes x setzen wir

$$|x| = \left(\Sigma \sqrt{|x_i|}\right)^2.$$

Die so definierte Norm genügt den Bedingungen (1), (2) und (3). Statt (4) gilt aber nur die abgeschwächte Bedingung

$$|x+y| \leqq 2(|x| + |y|). \tag{4'}$$

In der Tat ist

$$\left(\Sigma \sqrt{|x_i + y_i|}\right)^2 \leqq \left(\Sigma \sqrt{|x_i|} + \Sigma \sqrt{|y_i|}\right)^2 \leqq 2\left[\left(\Sigma \sqrt{|x_i|}\right)^2 + \left(\Sigma \sqrt{|y_i|}\right)^2\right].$$

Man beweist leicht auf Grund der Bedingungen (1), (2), (3) und (4'), daß $H_{1/2}$ ein linearer topologischer Raum ist. Die Annahme, daß $H_{1/2}$ lokalkonvex ist, führt dagegen zu einem Widerspruch. Wir betrachten, um das zu beweisen, die sphärische Umgebung K_1 vom Radius 1 um den Nullpunkt. Gibt es eine konvexe in ihr enthaltene Umgebung $V(0)$, so gibt es auch eine sphärische Umgebung K_ε vom Radius ε, die in $V(0)$ liegt. Sind also $x_i = \{x_1^{(i)}, \ldots, x_k^{(i)}, \ldots\}$ $(i = 1, \ldots, N)$ irgendwelche

Punkte von K_ε und $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ irgendwelche Zahlen $\alpha_i > 0$, $\sum\limits_1^N \alpha_i = 1$, so liegt auch der Punkt $y = \sum\limits_{i=1}^N \alpha_i x_i$ in $V(0)$, also auch in K_1.

Die Punkte x_i mit $x_k^{(i)} = 0$ und $x_i^{(i)} = \varepsilon$ liegen in K_ε. Wir nehmen irgendeine Anzahl N dieser Punkte $i = 1, \ldots, N$ und wählen die Zahlen α_i den Zahlen $\frac{1}{i^2}$ proportional: $\alpha_i = \frac{1}{C_N} \cdot \frac{1}{i^2}$, sie sind > 0 und $\sum\limits_{i=1}^N \alpha_i = 1$, falls $C_N = \sum\limits_{i=1}^N \frac{1}{i^2}$. Der entsprechende Punkt $y = \{y_1, \ldots, y_n, \ldots\} = \sum\limits_{i=1}^N \alpha_i x_i$ hat als Komponenten $y_n = \frac{1}{C_N} \cdot \frac{1}{i^2} \cdot \varepsilon \; (n \leqq N)$, $y_n = 0 \; (n > N)$ und seine Norm ist

$$|y| = (\Sigma \sqrt{y_n})^2 = \frac{\varepsilon}{C_N} \left(\sum_1^N \frac{1}{n} \right)^2.$$

Für hinreichend große N ist $|y| > 1$, also liegt y nicht in K_1, was ein Widerspruch ist.

Zum Schluß beweisen wir den folgenden Satz:

Hat ein linearer topologischer Raum R eine n-gliedrige Basis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, d. h. ist jeder Punkt x des Raumes R auf eine und nur eine Weise in der Form $\sum\limits_{k=1}^n a_k x_k$ darstellbar, so ist R dem n-dimensionalen Euklidischen Raum $E^{(n)}$ linear homöomorph.

Beweis. Jedem Punkte $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ des Euklidischen Koordinatenraumes E^n lassen wir den Punkt $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$ des Raumes R entsprechen. Man überzeugt sich leicht, daß die so erhaltene Abbildung des Raumes E auf den Raum R linear, eineindeutig und stetig ist. (Die Stetigkeit folgt unmittelbar aus der Stetigkeit der Multiplikation und der Addition.) Es bleibt dann die Stetigkeit der umgekehrten Abbildung von R auf E^n zu beweisen. Da ein linearer topologischer Raum homogen ist, haben wir nur zu zeigen, daß es für jedes $\eta > 0$ in R eine solche Umgebung V des Nullpunktes gibt, daß ihr Urbild in E^n in der sphärischen η-Umgebung K_η des Nullpunktes η liegt. Es sei S_η die Sphäre $\Sigma a_k^2 = \eta^2$ im E^n. Bekanntlich ist S_η bikompakt. Das Bild S'_η von S_η in R ist folglich auch bikompakt. Der Nullpunkt ist also kein Häufungspunkt der Menge S'_η. Es gibt folglich eine Umgebung $U(0)$ des Nullpunktes in R, deren Urbild in E^n mit S_η keinen gemeinsamen Punkt hat. Es gibt weiter ein ε und $U_0(0)$ derart, daß $a x \subset U$, falls $a \leqq \varepsilon$ und $x \subset U_0$ Man beweist jetzt leicht, daß das Urbild der Umgebung $V = \varepsilon U_0$ ganz in der sphärischen Umgebung vom Radius η liegt. Es sei in der Tat x ein Punkt von V, dann ist $x = \varepsilon y$, wobei $y \subset U_0$. Fehmen wir jetzt an, daß das Urbild x' von x außerhalb K liegt. Dann

gibt es eine reelle Zahl $q \leqq 1$ derart, daß das Urbild $q x'$ des Punktes $q x$ auf S_η liegt. Der Punkt $q x = q \varepsilon y$ liegt also auf S'_η. Da $q \varepsilon \leqq q$ ist, gehört aber $q \varepsilon y$ zu U, was unmöglich ist. Dieser Widerspruch beweist unseren Satz.

§ 2.

Fixpunktsatz.

Satz. *Bei jeder stetigen Abbildung einer konvexen bikompakten*[4]) *Menge eines linearen topologischen lokal-konvexen Raumes in sich gibt es wenigstens einen Fixpunkt*[5]).

Beweis. Wir setzen voraus, daß es bei einer Abbildung $y = f(x)$ einer konvexen, bikompakten Menge F in sich keinen Fixpunkt gibt, d. h. $f(x) \neq x$ für alle Punkte der Menge F gilt. Wir trennen jeden Punkt x von seinem Bilde $y = f(x)$ durch die punktfremden Umgebungen $W'(x)$ und $W''(y)$. Weiter können wir vermöge der Stetigkeit der Abbildung im Innern von $W'(x)$ eine andere Umgebung $W(x)$ von x wählen, deren Bild ganz in $W''(y)$ liegt: $f(W(x)) \subset W''(y)$. Die so gewählte Umgebung $W(x)$ hat also die Eigenschaft, daß sie mit ihrem Bilde keinen gemeinsamen Punkt hat. Auf solche Weise bekommen wir eine Überdeckung $\{W(x)\}$ der Menge F. Wir werden zu einem Widerspruch kommen, falls wir zeigen, daß in jeder Überdeckung eines bikompakten Raumes wenigstens ein Gebiet mit seinem Bilde gemeinsame Punkte hat.

Wir können voraussetzen, daß die Überdeckung $\{W(x)\}$ aus konvexen Gebieten besteht, da sie sonst durch eine andere, die vorausgesetzte Eigenschaft besitzende ersetzt werden könnte.

Eine Überdeckung $\{U\}$ nennen wir die zweifache Verfeinerung einer Überdeckung $\{W\}$, falls man jedem U ein $W \supset U$ zuordnen kann, so daß jedes U', welches zu U nicht fremd ist, auch in W enthalten ist[5a]).

Um diese Überdeckung $\{U\}$ zu konstruieren, ersetzen wir $\{W\}$ durch eine endliche Teilüberdeckung $\{W_1, \ldots, W_n\}$. Dieses ist wegen der vorausgesetzten Bikompaktheit immer möglich. Für jeden Punkt x wählen wir eine Umgebung $W^*(x)$, deren abgeschlossene Hülle in einer der

---

[4]) Siehe P. Alexandroff und P. Urysohn, Zur Theorie der topologischen Räume, Math. Annalen 92 (1924), S. 258.

[5]) Bei Schauder ist der entsprechende Satz für metrische Räume bewiesen.

[5a]) Für den metrischen Raum kann man als $\{W\}$ die Gesamtheit aller ε-Umgebungen der Punkte F nehmen. In diesem Falle bilden alle $\frac{\varepsilon}{3}$-Umgebungen eine zweifache Verfeinerung von $\{W\}$.

$W_1, \ldots, W_n$ enthalten ist: $W^*(x) \subset W_i$, und ersetzen die Überdeckung $W^*(x)$ durch eine endliche Teilüberdeckung $W_1^*, \ldots, W_m^*$. Weiter setzen wir

$$(1) \qquad U(x) = \Big(\prod_{x \subset W_k^*} W_k^*\Big) \cdot \Big(\prod_{x \subset R - \overline{W}_j^*} (R - \overline{W}_j^*)\Big) \cdot \Big(\prod_{x \subset W_i} W_i\Big),$$

wobei im ersten bzw. dritten Produkte nur den Punkt x enthaltende Gebiete W_k^* (bzw. W_i), im zweiten Produkte nur diejenigen auftreten, für die $R - \overline{W}_j^* \supset x$ ist. Liegt also $x \subset \overline{W}^* - W^*$, so kommt W^* in den $U(x)$ bestimmenden Produkten nicht vor. Es gibt nur eine endliche Anzahl verschiedener $U_1, \ldots, U_p$. Es seien $U(x)$ und $U'(x')$ zwei nicht disjunkte Umgebungen: $U(x) \cdot U'(x') \neq 0$. Wir wählen jetzt ein W_k^* aus dem ersten Produkte in (1). Dann ist $U(x) \subset W^*$. Zu diesem W^* wählen wir ein $W \supset \overline{W}^*$; die Umgebung W enthält x, gehört also zum dritten Produkte in (1). Der Punkt x' liegt in $\overline{W}^*$, da, falls $x' \subset F - \overline{W}^*$ wäre, $U'(x') \subset F - \overline{W}^*$, also $U(x) \cdot U'(x') = 0$ sein müßte. Daraus folgt $x' \subset \overline{W}^* \subset W$ und auch $U'(x') \subset W$. Wir haben also für eine Überdeckung $\{W\}$ eine andere $\{U\}$ konstruiert und jedem U ein $W \supset U$ zugeordnet derart, daß aus $U \cdot U' \neq 0$ auch $U' \subset W$ folgt.

Wir wählen noch um jeden Punkt x eine Umgebung $V(x)$, deren Bild ganz in einem U liegt.

In jedem Gebiete $U_1, \ldots, U_p$ wählen wir die Punkte $x_1, \ldots, x_p$, $x_i \subset V_i$, und betrachten die aus den Punkten

$$y = \sum_1^p \alpha_i x_i \qquad \Big(\alpha_i > 0, \ \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1\Big)$$

bestehende Menge L. Nach dem Satze des § 1 ist diese Punktmenge einem r-dimensionalen Simplex ($r \leqq p$) homöomorph, also bikompakt. Wir unterteilen die Menge L in endlich-viele so kleine Simplexe $\{S\}$, daß jedes S im Innern eines V liegt, d. h. $f(S)$ ganz zu einem U gehört. Es seien $y_1, \ldots, y_q$ die Eckpunkte dieser Simplexe. Wir bestimmen eine Abbildung φ der Menge L in sich, indem wir $\varphi(y_i) = x_k$ setzen, wo x_k demjenigen U_k zugeordnet ist, zu dem $f(y_i)$ gehört. Die Abbildung φ ist dadurch nur in den Eckpunkten der Simplexe S bestimmt. Sie wird auch in allen anderen Punkten definiert, indem wir sie linear interpolieren. Diese Abbildung φ bildet das Simplex L auf sich selbst ab. Also gibt es nach dem bekannten Brouwerschen Satze einen Punkt x_0, für den $\varphi(x_0) = x_0$.

Wir wollen zeigen, daß $\varphi(x)$ und $f(x)$ für jeden Punkt (von L) in demselben W liegen, was ein Widerspruch ist, da $x_0 = \varphi(x_0)$ und $f(x_0)$ nach Konstruktion von $\{W\}$ nicht zu demselben W gehören können.

Es sei x ein Punkt von L. Er liegt in einem Simplex S, dessen Eckpunkte $y_1, \ldots, y_l$ seien. Das Bild von S bei der Abbildung f, also

$f(x)$ und alle $f(y_i)$ $(i = 1, \ldots, l)$ liegen in demselben U_0. Dann liegen $f(y_i)$ und $\varphi(y_i)$ nach Definition von $\varphi(y_i)$ in U_i, so daß $U_0 \cdot U_i \supset f(y_i) \neq 0$ ist. Daraus folgt aber, daß alle U_i $(i = 1, \ldots, l)$ einem U_0 zugeordneten W angehören. Alle $\varphi(y_i)$ gehören zu W_0, und wegen der Konvexität von W_0 gehört auch $\varphi(x)$ zu W_0, also ist $f(x) \subset U_0 \subset W_0$ und auch $\varphi(x) \subset W_0$.

§ 3.

Anwendungen.

Zuerst wollen wir eine Definition des Produktes von Räumen geben, wobei die Gesamtheit der Faktoren eine beliebige Mächtigkeit haben kann[6]).

Es sei $\{R_\alpha\}$ eine Menge von topologischen Räumen, wobei der einzelne Raum durch ein Element α einer Menge $\mathfrak{M}$ charakterisiert wird. Ein Punkt des zu definierenden Raumes R ist definitionsgemäß ein System von „Koordinaten" $\{\ldots, x_\alpha, \ldots\}$ $(x_\alpha \subset R_\alpha)$. Das Umgebungssystem eines Punktes $x_0 = \{\ldots, x_\alpha^0, \ldots\}$ wird folgendermaßen definiert. Wir nehmen irgendeine endliche Anzahl von irgendwelchen Umgebungen $U(x_{\alpha_1}^0), \ldots, U(x_{\alpha_n}^0)$ der Punkte $x_{\alpha_1}^0, \ldots, x_{\alpha_n}^0$ in den betreffenden Räumen $R_{\alpha_1}, \ldots, R_{\alpha_n}$. Dann besteht eine Umgebung des Punktes $x_0 = \{\ldots, x_\alpha^0, \ldots\}$ definitionsgemäß aus allen Punkten $x = \{\ldots, x_\alpha, \ldots\}$ mit $x_{\alpha_i} \subset U(x_{\alpha_i}^0)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Die anderen Koordinaten werden dabei keinen Bedingungen unterworfen. Dadurch, daß man die Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von $\mathfrak{M}$, sowie die Umgebungen $U(x_{\alpha_i}^0)$ variiert, erhält man verschiedene Umgebungen von x_0.

Das Produkt von bikompakten Räumen ist wieder bikompakt. Diesen Satz beweist man wörtlich so wie die Bikompaktheit des Produktes von Strecken[7]).

Sind alle Räume R_α lineare topologische Räume, so kann man die Elemente von R gliedweise addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren:

$$x + x' = \{\ldots, x_\alpha, \ldots\} + \{\ldots, x'_\alpha, \ldots\} = \{\ldots, x_\alpha + x'_\alpha, \ldots\},$$
$$a\,x = a\,\{\ldots, x_\alpha, \ldots\} = \{\ldots, a\,x_\alpha, \ldots\}.$$

Die so definierte Addition und Multiplikation erfüllt alle Forderungen, welche in der Einleitung formuliert wurden. Das Produkt R ist also ein linearer topologischer Raum.

Man beweist noch leicht, daß wenn alle R lokal-konvex sind, auch R lokal-konvex ist.

---

[6]) Vgl. A. Tychonoff, Über topologische Erweiterung von Räumen, Math. Annalen 102 (1929), S. 544, wo die Definition des Produktes von Strecken gegeben ist.

[7]) Vgl. A. Tychonoff, ibid. § 2.

Man sieht leicht, daß man das Produkt von endlich vielen normierten linearen Räumen R_i $(i = 1, \ldots, n)$ auch als einen normierten Raum $R = \{x_1, \ldots, x_n\}$ betrachten kann, wobei als Norm von $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ die Zahl $|x| = \sum_1^n |x_i|$ oder $|x| = \sqrt{\sum |x_i|^2}$ genommen werden kann. Das Produkt von abzählbar vielen normierten Räumen ist metrisierbar durch $\varrho(x', x'') = \min\left(\frac{1}{n} + (x', x'')_n\right)$ als Entfernung zweier Punkte[8])

$$x' = (x'_1, \ldots, x'_n, \ldots) \qquad \text{und} \qquad x'' = \{x''_1, \ldots, x''_n, \ldots\};$$

dabei ist $(x', x'')_n = \max(|x'_1 - x''_1|, \ldots, |x'_n - x''_n|)$. Man kann den Produktraum auch als linearen topologischen Raum, aber nicht als normierten Raum auffassen[9]) (falls unendlich viele unserer Räume mehr als einen Punkt enthalten). Es sei in der Tat $R = R_1 \cdot R_2 \cdot \ldots \cdot R_n \cdot \ldots$, wobei alle R_i mehrpunktig und normiert sind. Wir setzen jetzt voraus, daß R normiert ist. Es sei 0 der durch alle Koordinaten 0, $x^{(n)}$ der durch die n-te Koordinate $x_n \neq 0$ und alle anderen 0 charakterisierte Punkt von R, und $d_n = |x^{(n)}|$. Die Entfernung zwischen 0 und $z^{(n)} = \frac{1}{d_n} x^{(n)}$ ist $|z^n| = \frac{1}{d_n}|x^n| = 1$. Die Punkte $z^{(n)}$ konvergieren aber nach der Produktdefinition gegen 0, was ein Widerspruch ist.

Nun wollen wir einige Anwendungen des Fixpunktsatzes angeben. Eine Funktion von unendlich vielen Veränderlichen $f(\ldots, y_\alpha, \ldots)$ nennen wir an der Stelle $(\ldots, y_\alpha, \ldots)$ stetig, falls man für jedes ε ein δ und eine endliche Anzahl von Argumenten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ angeben kann, so daß

$$|f(\ldots, y_\alpha, \ldots) - f(\ldots, y'_\alpha, \ldots)| < \varepsilon,$$

falls

$$|y_{\alpha_i} - y'_{\alpha_i}| < \delta \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

(die übrigen Veränderlichen können dabei beliebige Werte annehmen).

Hängt die Funktion f nur von endlich oder abzählbar vielen Veränderlichen ab, so fällt die gegebene Definition mit der Vollstetigkeit zusammen. Wir beweisen nun den folgenden Satz:

Jedes System von Differentialgleichungen

$$\text{(A)} \qquad \frac{d\,y_\alpha}{d\,x} = f_\alpha(x, \ldots, y_\beta, \ldots),$$

wo α und β Elemente einer Menge $\mathfrak{M}$ von einer beliebigen Mächtigkeit τ sind, hat wenigstens eine Lösung, die vorgegebene Anfangswerte

$$y_\alpha(x_0) = y_\alpha^0 \qquad (\alpha \subset \mathfrak{M})$$

[8]) Vgl. M. Fréchet, Les espaces abstraits, Gauthier-Villars.

[9]) Vgl. Urysohn, Sur un problème de M. Fréchet, Congrès Dijon, 1925.

annimmt, falls die rechten Seiten für alle Werte von y_α ($\alpha \subset \mathfrak{M}$) und für $|x - x_0| \leqq a$ definiert, stetig und beschränkt sind:

$$|f_\alpha(x, \ldots, y_\beta, \ldots)| \leqq M_\alpha \qquad (\alpha \subset \mathfrak{M}).$$

Setzt man in eine stetige Funktion $f(x, \ldots, y_\alpha, \ldots)$ statt y_α stetige Funktionen $y_\alpha(x)$ einer Veränderlichen x ein, so ergibt sich auf diese Weise, wie man leicht sieht, auch eine stetige Funktion von x. Daraus folgt, daß unser System folgendem System von Integralgleichungen äquivalent ist

$$\text{(B)} \qquad y_\alpha(x) = y_\alpha^0 + \int_{x_0}^{x} f_\alpha(x, \ldots, y_\beta(x), \ldots)\, d\, x \qquad (\alpha \subset \mathfrak{M}).$$

Betrachten wir nun den Funktionenraum C, dessen Punkte alle stetigen Funktionen $f(x)$ einer reellen Veränderlichen x, $|x - x_0| \leqq a$ sind, und wo eine Umgebung U von $f_0(x)$ aus allen $f(x)$, für die

$$|f_0(x) - f(x)| < \varepsilon$$

gilt, besteht. Dieser Raum ist bekanntlich normierbar und folglich topologisch und linear, wobei wir als Summe von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ den Ausdruck $f_1(x) + f_2(x)$ und als Produkt von λ und $f(x)$ den Ausdruck $\lambda f(x)$ annehmen. Wir betrachten alle Funktionen $f(x)$, für welche die folgenden Bedingungen gelten:

1. $y_\alpha^0 - M_\alpha \cdot a \leqq f(x) \leqq y_\alpha^0 + M_\alpha \cdot a$.
2. $f(x)$ hat absolut unter M_α gelegene derivierte Zahlen.

Diese Funktionenmenge bezeichnen wir mit $\mathfrak{Y}_\alpha$. Nach dem Arzelaschen Satze ist diese Menge kompakt. Sie ist aber auch bikompakt, da sie ein abzählbares definierendes Umgebungssystem besitzt. Es ist ferner evident, daß sie konvex ist.

Jedem α (aus $\mathfrak{M}$) ordnen wir ein Exemplar von $C : C_\alpha$ zu, und in jedem C_α betrachten wir $\mathfrak{Y}_\alpha$. Das Produkt aller C_α sei C_τ; seine Punkte sind die Funktionensysteme $(\ldots, y_\alpha(x), \ldots)$ ($\alpha \subset \mathfrak{M}$). Offenbar ist C_τ ein linearer topologischer Raum. Es sei $\mathfrak{Y}$ das Produkt aller $\mathfrak{Y}_\alpha$ ($\alpha \subset \mathfrak{M}$). Es ist eine konvexe, bikompakte Menge des Raumes C_τ. Die Funktionentransformation

$$\text{(B)} \qquad z_\alpha(x) = y_\alpha^0 + \int_{x_0}^{x} f_\alpha(x, \ldots, y_\alpha(x), \ldots)\, d\, x$$

ist für alle Punkte der Menge $\mathfrak{Y}$ sinnvoll und stellt eine Abbildung der Menge $\mathfrak{Y}$ auf sich dar. Diese Abbildung ist stetig. Ist in der Tat $(\ldots, \bar{z}_\alpha(x), \ldots)$ bzw. $(\ldots, z_\alpha(x), \ldots)$ das Bild von $(\ldots, \bar{y}_\alpha(x), \ldots)$ bzw. $(\ldots, y_\alpha(x), \ldots)$, so ist

$$\overline{z_{\alpha_k}(x)} - z_{\alpha_k}(x) = \int_{x_0}^{x} \{f_{\alpha_k}(x, \ldots, \overline{y_\alpha(x)}, \ldots) - f_{\alpha_k}(x, \ldots, y_\alpha(x), \ldots)\}\, d\, x,$$

$$|x - x_0| \leqq a.$$

Man sieht leicht, daß für den Punkt $(\ldots, \overline{y}_\alpha(x), \ldots)$ und jedes ε unabhängig von x ein δ und $\alpha_1^{(k)}, \ldots, \alpha_{n_k}^{(k)}$ derart existieren, daß

$$|f_{\alpha_k}(x, \ldots, \overline{y}_\alpha, \ldots) - f_{\alpha_k}(x, \ldots, y_\alpha, \ldots)| < \varepsilon, \qquad |x - x_0| \leqq a$$

ist, falls

$$|\overline{y_{\alpha_i^k}} - y_{\alpha_i^k}| < \delta_k \qquad (i = 1, \ldots, n_k)$$

gilt. Liegt also der Punkt $(\ldots, y_\alpha(x), \ldots)$ in der durch die Bedingungen

$$|\overline{y_{\alpha_i^k}}(x) - y_{\alpha_i^k}(x)| < \delta_k \qquad (i = 1, \ldots, n_k)$$

bestimmten Umgebung des Punktes $(\ldots, \overline{y_\alpha(x)}, \ldots)$, so ist

$$|\overline{z_{\alpha_k}}(x) - z_{\alpha_k}(x)| < \varepsilon \cdot a.$$

Es sei eine durch die Bedingungen

$$|\overline{z_{\alpha_k}}(x) - z_{\alpha_k}(x)| < \varepsilon a \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

bestimmte Umgebung U von $(\ldots, z_{\alpha_k}(x), \ldots)$ gegeben. Nehmen wir eine durch die Bedingungen

$$|\overline{y_{\alpha_{i_k}^k}}(x) - y_{\alpha_{i_k}^k}(x)| < \delta \qquad \begin{pmatrix} k = 1, \ldots, n \\ i_k = 1, \ldots, n_k \end{pmatrix} \qquad \delta = \min(\delta_1, \ldots, \delta_n)$$

bestimmte Umgebung von $(\ldots, \overline{y_\alpha(x)}, \ldots)$, so gehört das Bild jedes Punktes $(\ldots, y_\alpha(x), \ldots)$ aus dieser Umgebung zu U, d. h. die untersuchte Abbildung ist stetig. Nach dem bewiesenen Fixpunktsatze besitzt diese Abbildung einen Fixpunkt; das entsprechende Funktionensystem ist eine Lösung von (B), also auch eine Lösung von (A) und genügt den gestellten Anfangsbedingungen.

Um eine zweite Anwendung unseres Fixpunktsatzes zu formulieren, betrachten wir einen für alle Funktionen einer reellen Variablen bestimmten Operator $A(f(x)) = A(f, y) = \varphi(y)$, der folgenden Stetigkeitsbedingungen genügt. Für jedes y und ε gibt es ein δ und $x_1, \ldots, x_n$ derart, daß

$$|A(f, y) - A(\overline{f}, y)| < \varepsilon,$$

falls

$$|\overline{f}(x_i) - f(x_i)| < \delta \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Für jeden Operator, welcher erstens der gestellten Stetigkeitsbedingung genügt und für den zweitens $|A(f, y)| < M$ ist (M ist eine von $f(x)$ und y nicht abhängende Konstante), gibt es wenigstens eine Funktion $\varphi(x)$, die der Gleichung

$$A(\varphi(x), y) = \varphi(y)$$

genügt.

Wir betrachten den Raum E_c, das Produkt von geraden Linien, deren Menge die Mächtigkeit des Kontinuums hat. Ein Punkt dieses Raumes ist also die Gesamtheit von Koordinaten $\{\ldots, y_\alpha, \ldots\}$, wobei

$-\infty < \alpha < +\infty$ und $-\infty < y_\alpha < +\infty$ ist. Man erhält eine Umgebung eines Punktes $y_0 = \{\ldots, y_\alpha^0, \ldots\}$, wenn man alle Punkte $y = \{\ldots, y_\alpha, \ldots\}$ betrachtet, die für ein δ und eine endliche Anzahl von Indizes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ der Bedingung

$$|y_{\alpha_i}^0 - y_{\alpha_i}| < \varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

genügen.

Wir lassen nun jeder Funktion $f(x)$ einen Punkt $y = \{\ldots, y_\alpha, \ldots\}$ entsprechen, indem wir $y_\alpha = f(\alpha)$ setzen. Dabei entspricht jedem Punkte nur eine Funktion. Die Umgebung einer Funktion $f_0(x)$ besteht aus allen Funktionen $f(x)$, die für ein δ und eine endliche Anzahl von Punkten $x_1, \ldots, x_n$ der Ungleichung

$$|f_0(x_i) - f(x_i)| < \delta$$

genügen. Dieser Raum ist linear, die Summe $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ist $f_1(x) + f_2(x)$ und das Produkt von λ mit $f(x)$ ist $\lambda f(x)$. Die Menge aller beschränkten Funktionen $\{f(x) < M\}$ ist eine konvexe bikompakte Untermenge dieses Raumes[10]. Der Operator $A(f(x), y)$ bildet diese Menge in sich ab, und diese Abbildung ist stetig. Es gibt also einen Fixpunkt

$$A(\varphi(x), y) = \varphi(y),$$

der die Lösung dieser Gleichung darstellt.

[10]) Vgl. A. Tychonoff, Über einen Funktionenraum, dieser Band, S. 762—763.

(Eingegangen am 22. 4. 1935.)

Über die Biegung der Kreisplatte mit exzentrischer Einzellast.

Von

Erich Reissner in Berlin

Das Problem, die Biegungsflächen einer dünnen elastischen Kreisplatte zu bestimmen, die längs des Randes gestützt und in einem Punkte innerhalb des Randes durch eine Einzelkraft P beansprucht ist (Greensche Funktionen), lautet in mathematischer Formulierung bekanntlich[1]) folgendermaßen:

Es ist eine Lösung der Gleichung

$$\Delta \Delta w = 0; \quad \Delta \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \tag{1}$$

zu bestimmen, die folgenden Bedingungen genügt:

$$(w)_{r=1} = 0, \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=1} = 0, \tag{3}$$

$$w = \frac{P\varrho_0}{8\pi N}|z-a|^2 \ln|z-a| + \zeta(r,\vartheta). \tag{4}$$

Dabei sind ν, ϱ_0, $0 \leqq a < 1$ und N Konstanten, $z = x + iy = re^{i\vartheta}$ und ζ eine Lösung von (1), die für $r \leqq 1$ keine Singularitäten aufweist.

Diese Aufgabe ist in geschlossener Form bisher nur für den Fall $\nu = \infty$, und zwar von J. H. Michell[2]) durch Inversion des zentralsymmetrischen Ansatzes gelöst worden, während für $\nu \neq \infty$, wo das Verfahren

[1]) A. E. H. Love, Mathematical Theory of Elasticity, 4. ed. 1927; S. 489—491.

[2]) J. H. Michell, London Math. Soc. Proc. 1902; S. 223. — Die Annahme $\nu = \infty$ bedeutet, daß die Platte starr eingespannt ist. Beim Problem der gelenkig gestützten Platte ist ν die Querkontraktionszahl ($0 \leqq \nu \leqq 0{,}5$). Wenn man der Zahl $\nu > 0$ eine andere Bedeutung zulegt, kann man (3) auch als Randbedingung für eine elastisch eingespannte Platte ansehen. — Es sei noch die Bedeutung der Konstanten in (4) angegeben: ϱ_0 ist der Plattenradius, N die Biegungssteifigkeit der Platte, $a\varrho_0$ der Belastungsradius [das Koordinatensystem ist so gewählt, daß $\vartheta(P) = 0$] und $w\varrho_0$ die Biegungsfläche in wahrer Größe.

nicht zum Ziele führt, A. Föppl[3]) vermittels Reihenentwicklungen nach einer klassischen Methode von Clebsch[4]) eine Lösung gegeben hat.

Die vorliegende Note enthält eine Lösung der von Föppl behandelten Aufgabe in geschlossener Form.

Um diese zu finden, wird ausgegangen von der bekannten Tatsache, daß sich jede Lösung von (1) in der Form

$$w = r^2 \varphi_1 + x \varphi_2 + \varphi_3$$

mit

$$\Delta \varphi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

darstellen läßt. Also ist auch

$$w = \Re\left\{|z-a|^2 \ln \frac{z-a}{1-az} + (1-r^2) f(z)\right\} \frac{P \varrho_0}{8 \pi N} \tag{5}$$

eine Lösung von (1). Man erkennt, daß sie die Bedingungen (2) und (4) bereits im Ansatz erfüllt, wenn $f(z)$ eine für $r \leqq 1$ regulär analytische Funktion ist. Die Bedingung (3) dient dazu, diese Funktion zu bestimmen.

Es ist zweckmäßig, die Bedingung (3) etwas umzuformen. Wegen (2) ist

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)_{r=1} = \left(\Delta w - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=1}.$$

Damit wird

$$\left(\Delta w - (1-\nu)\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=1} = 0. \tag{3}$$

Beachtet man, daß

$$\begin{aligned} \Delta(r^2 \Re\{f(z)\}) &= 4 \Re\left\{\frac{d}{dz}(z f(z))\right\}, \\ \Delta(x \Re\{f(z)\}) &= 2 \Re\left\{\frac{d}{dz}(f(z))\right\}, \end{aligned} \tag{6}$$

so erhält man mit (5) aus (3) die folgende Gleichung zur Bestimmung von $f(z)$

$$\Re\left\{\frac{4(1-a^2)}{1-az} - (1-a^2)(1-\nu) - 4z\frac{df}{dz} - 2(1+\nu) f(z)\right\}_{r=1} = 0. \tag{3a}$$

(3a) ist in bekannter Weise als eine Differentialgleichung für $f(z)$ aufzufassen[5]). Ihr allgemeines Integral ergibt sich mit einer willkürlichen

[3]) A. Föppl, Ber. d. Kgl. Bayr. Ak. d. Wiss. 1912; S. 155.

[4]) A. Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper. Leipzig 1862.

[5]) Auf diesen direkten Schluß hat mich freundlicherweise Herr Prof. G. Hamel hingewiesen. Ursprünglich war die Lösung gefunden worden durch Ansetzen einer Potenzreihe für $f(z)$, deren Koeffizienten sich aus (3a) bestimmen, und Identifizierung der Reihe mit der Funktion (8).

Konstanten c und unter Weglassung einer bedeutungslosen rein imaginären additiven Konstanten zu

$$f(z) = c z^{-\frac{1+\nu}{2}} + 2(1-a^2)(az)^{-\frac{1+\nu}{2}} \int_0^{\sqrt{az}} \frac{u^\nu du}{1-u^2} - \frac{1-a^2}{2}\frac{1-\nu}{1+\nu}. \tag{8}$$

Wegen der vorausgesetzten Regularität von $f(z)$ ist $c = 0$.

Wenn man (8) in (5) einsetzt, wird die gesuchte Biegungsfläche

$$\begin{aligned} w = \frac{P\varrho_0}{8\pi N}\Re\Big\{ & |z-a|^2 \ln\frac{z-a}{1-az} \\ & + (1-a^2)(1-r^2)\Big[2(az)^{-\frac{1+\nu}{2}} \int_0^{\sqrt{az}} \frac{u^\nu du}{1-u^2} - \frac{1-\nu}{2(1+\nu)}\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Nun läßt sich das Integral in (9) in allen den Fällen geschlossen ausintegrieren, in denen ν eine rationale Zahl ist, also praktisch immer, und damit hat man in (9) die gesuchte Lösung der Aufgabe in geschlossener Form.

Für den Grenzfall $\nu = 0$ z. B. erhält man in reeller Schreibweise

$$\begin{aligned} w = \frac{P\varrho_0}{16\pi N}\Bigg\{ & (r^2+a^2-2ar\cos\vartheta)\ln\frac{r^2+a^2-2ar\cos\vartheta}{1+a^2r^2-2ar\cos\vartheta} \\ & + (1-a^2)(1-r^2)\Bigg[\frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{ar}}\ln\frac{1+ar+2\sqrt{ar}\cos\frac{\vartheta}{2}}{1+ar-2\sqrt{ar}\cos\frac{\vartheta}{2}} \\ & + \frac{2\sin\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{ar}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{ar}\sin\frac{\vartheta}{2}}{1-ar}\right) - 1\Bigg]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{9a}$$

Für $\nu = \frac{1}{3}$ ist

$$\begin{aligned} w = \frac{P\varrho_0}{8\pi N}\Re\Bigg\{ & |z-a|^2\ln\frac{z-a}{1-az} \\ & + (1-a^2)(1-r^2)\Bigg[-\frac{1}{4} + \frac{2}{\sqrt[3]{az}}\left(\ln\frac{(1+\sqrt[3]{az})^2-\sqrt[3]{az}}{1-\sqrt[3]{az}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{az}}{2+\sqrt[3]{az}}\right)\right)\Bigg]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{9b}$$

Für die Durchbiegung unter dem Lastangriffspunkt (Biegungspfeil) ergibt sich daraus

$$\nu = 0;\ w(a,0) = \frac{P\varrho_0}{16\pi N}(1-a^2)^2\left[\frac{2}{a}\ln\frac{1+a}{1-a} - 1\right],$$

$$\nu = \frac{1}{3};\ w(a,0) = \frac{P\varrho_0}{8\pi N}(1-a^2)^2\left\{\frac{2}{\sqrt[3]{a^2}}\left[\ln\frac{1+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^4}}{1-\sqrt[3]{a^2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{a^2}}{2+\sqrt[3]{a^2}}\right] - \frac{1}{4}\right\}.$$

Man kann als einfache Verallgemeinerung des vorstehenden Lösungsgedankens den folgenden Satz aussprechen:

Die Randwertaufgabe der Bipotentialtheorie für den Kreis läßt sich im Falle gegebener Funktionsrandwerte auf eine Randwertaufgabe der Potentialtheorie für den Kreis zurückführen, deren Art von der zweiten Randbedingung für die Bipotentialfunktion abhängt.

Dieser Satz kann mit Vorteil noch für andere technisch wichtige Aufgaben aus der Theorie der durch eine oder mehrere Einzelkräfte und stetige Belastung beanspruchten Kreisplatte verwendet werden. Es ist beabsichtigt, dies an anderer Stelle auszuführen.

(Eingegangen am 18. 5. 1935.)

721/7/57 - V/12/6